This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

AJ 190

PHILLIPS LIBRARY
OF
HARVARD COLLEGE OBSERVATORY

RESERVE
LIBRARY

Digitized by Google

LIBRARY
RVATORY
T
02138

Digitized by Google

Digitized by Google

BULLETIN

ASTRONOMIQUE.

Digitized by Google

25301 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

BULLETIN
ASTRONOMIQUE

FONDÉ EN 1884

PAR

E. MOUCHEZ ET F. TISSERAND.

PUBLIÉ PAR L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

Commission de Rédaction :

H. POINCARÉ, Président;
G. BIGOURDAN; O. CALLANDREAU; H. DESLANDRES; R. RADAU.

TOME XV. — 1898.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

(Tous droits réservés.)

Digitized by Google

MICROFILMED
AT HARVARD

Digitized by Google

BULLETIN

ASTRONOMIQUE.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

DEUXIÈME MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION DES TERMES A LONGUES PÉRIODES DANS L'EXPRESSION DE LA LONGITUDE DES PETITES PLANÈTES DU TYPE DE HÉCUBE;

PAR M. O. BACKLUND.

Dans l'exposition de la méthode pour déterminer les termes à longues périodes (*Bulletin astronomique,* septembre 1897), on a supposé que la fonction X contient seulement des termes dont les arguments sont de la forme $\sigma^i - \sigma^j\tau + \Gamma^i - \Gamma^j$. Mais la méthode est applicable au cas général, c'est-à-dire si X contient aussi des termes caractéristiques, termes dont les arguments sont de la forme $\overline{\Delta + \sigma\tau} + D$; cependant elle devient alors pénible à cause de la longueur des calculs.

Dans cette Note, je vais montrer qu'on peut résoudre la question sans faire intervenir les fonctions elliptiques, d'une manière tout à fait élémentaire qui conduit, pour ce groupe de planètes, à une convergence rapide et à un calcul facile.

Par la condition que Ψ doit embrasser tous les termes à longues périodes, caractéristiques et élémentaires, on arrive à l'équation différentielle suivante, où l'on a écrit tous les termes du premier et du deuxième degré par rapport aux excentricités, et du premier ordre par rapport à la masse perturbatrice, celle de Jupiter,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{d\tau^2} = &- \alpha \sin \Psi_1 \\ &- \beta_1 \sin(\overline{\Delta + \sigma\tau} + \Psi + D + \theta_1) \\ &+ \beta_2 \sin(\overline{\Delta + \sigma\tau} + 2\Psi_1 + \Psi_0 + D + \theta_2) \\ &+ \beta_3 \sin 2(\overline{\Delta + \sigma\tau} + \Psi + D + \theta_3) \\ &+ X \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Digitized by Google

α est une constante du premier degré et du premier ordre;

β_1 est une fonction élémentaire à longues périodes du premier degré et du premier ordre;

β_2 est une fonction élémentaire à longues périodes du deuxième degré et du premier ordre;

β_3 est une fonction élémentaire à longues périodes du deuxième degré et du deuxième ordre;

X est une fonction élémentaire à longues périodes du deuxième degré et du deuxième ordre.

$\beta_3 \sin 2(\overline{\Delta + \sigma\tau} + \Psi + D + \theta_3)$ consiste essentiellement dans les termes du deuxième degré que M. Souillart a mis en évidence dans son travail important sur les satellites de Jupiter.

Par Ψ_0, nous entendons la partie élémentaire, et par Ψ_1, la partie caractéristique de Ψ, de manière que

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1.$$

Nous développons suivant les puissances de Ψ_0 et Ψ_1 et séparons les déterminations de ces deux fonctions en écrivant

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\Psi_1}{d\tau^2} = & -\beta_1 \sin(V+\theta_1) + \beta_2 \sin(V+\theta_2) + \beta_3 \sin 2(V+\theta_3) \\
& -\Psi_1[\alpha + \beta_1 \cos(V+\theta_1) - 2\beta_2 \cos(V+\theta_2) - 2\beta_3 \cos 2(V+\theta_3)] \\
& + \frac{\Psi_1^2}{2}[\beta_1 \sin(V+\theta_1) - 4\beta_2 \sin(V+\theta_2) - 4\beta_3 \sin 2(V+\theta_3)] \\
& -\Psi_0[\beta_1 \cos(V+\theta_1) - \beta_2 \cos(V+\theta_2) - 2\beta_3 \cos 2(V+\theta_3)] \\
& +\Psi_0\Psi_1[\beta_1 \sin(V+\theta_1) - 2\beta_2 \sin(V+\theta_2) - 4\beta_3 \sin 2(V+\theta_3)] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& -f_1 - f_2 - \ldots
\end{aligned}\right.$$

et

$$\frac{d^2\Psi_0}{d\tau^2} = f_1 + f_2 + \ldots + X.$$

Pour abréger, on a écrit

$$V = (\Delta + \sigma)\tau + D.$$

Il faut intégrer la première de ces équations par des approximations successives. Sans m'arrêter aux différents procédés par lesquels on peut les exécuter, j'expliquerai seulement comment les fonctions f_1, f_2, ... s'obtiennent à chaque approximation.

Digitized by Google

Par la première approximation nous obtenons, en négligeant les quantités du deuxième ordre par rapport à la masse perturbatrice

$$\begin{aligned}\Psi_1^{(1)} = & \frac{\beta_1}{(\Delta+\sigma)^2}\sin(V+\theta_1) \\ & - \frac{\beta_2}{(\Delta+\sigma)^2}\sin(V+\theta_2) - \frac{\beta_3}{4(\Delta+\sigma)^2}\sin 2(V+\theta_3) - \ldots \\ & + \Psi_0\left[\frac{\beta_1}{(\Delta+\sigma)^2}\cos(V+\theta_1) - \frac{\beta_2}{(\Delta+\sigma)^2}\cos(V+\theta_2)\right. \\ & \left. - \frac{\beta_3}{2(\Delta+\sigma)^2}\cos 2(V+\theta_3) - \ldots\right].\end{aligned}$$

En introduisant cette expression dans le second membre de l'équation (I), on obtient, outre les termes caractéristiques, l'expression

$$\frac{\Psi_0}{2(\Delta+\sigma)^2}(\beta_1^2 + 2\beta_2^2 + \beta_3^2) - \frac{\beta_1\beta_2}{2(\Delta+\sigma)^2}\sin(\theta_2-\theta_1),$$

qui devient élémentaire par l'intégration. Nous l'égalons à f_1. Au début de la deuxième approximation le second membre est donc débarrassé des termes qui par l'intégration peuvent devenir élémentaires. L'introduction de $\Psi_1^{(2)}$, obtenu par la deuxième approximation, donnera de la même manière l'expression de f_2, et ainsi de suite. On trouve par ce procédé l'équation différentielle suivante pour la détermination de Ψ_0

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^2\Psi_0}{d\tau} - \nu_0^2\Psi_0 = & \left[\nu_1^2 - \frac{3}{2}\frac{\beta_1\beta_2}{(\Delta+\sigma)^2}\cos(\theta_2-\theta_1)\right]\Psi_0 \\ & - \frac{\beta_1\beta_2}{2(\Delta+\sigma)^2}\sin(\theta_2-\theta_1) \\ & + \frac{5}{16}\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(\Delta+\sigma)^4}\sin(2\theta_3-\theta_2-\theta_1) \\ & - \frac{1}{4}\frac{\beta_2^2\beta_3}{(\Delta+\sigma)^4}\sin 2(\theta_3-\theta_2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

où l'on a écrit

ν_0^2 pour la partie constante de $\frac{1}{2(\Delta+\sigma)^2}(\beta_1^2 + 2\beta_2^2 + \beta_3^2)$

et

ν_1^2 pour la partie variable de $\frac{1}{2(\Delta+\sigma)^2}(\beta_1^2 + 2\beta_2^2 + \beta_3^2)$.

Digitized by Google

Les approximations par lesquelles on obtient Ψ_1 convergent très rapidement, pour le groupe des planètes dont il s'agit ici, supposé que le module de l'excentricité ne surpasse pas une certaine limite. On le voit facilement par le fait que $\frac{m'}{(\Delta+\sigma)^2}$ n'est pas sensiblement plus grand que l'unité même pour Hécube.

Si dans $\frac{1}{2(\Delta+\sigma)^2}(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)$ on néglige β_2 et β_3, on retombe sur l'expression $\frac{2\beta_0^2}{(\Delta+\sigma)^2}$ de ν_0^2 de la Note citée.

Après avoir développé les fonctions du second membre, on obtient l'intégrale de (II) sous la forme

$$\Psi_0 = \Sigma\alpha_{i,j}\frac{x_i x_j}{(\nu_0^2+\sigma^i-\sigma^j)^2}\sin(\sigma^i-\sigma^j\tau+\Gamma^i-\Gamma^j),$$

expression qui, à cause de la présence de ν_0^2 dans les dénominations est très convergente. Dans le cas de notre groupe de planètes, seulement trois ou quatre termes sont sensibles, toujours en supposant que l'excentricité n'est pas grande.

Comme les intégrales de nos équations différentielles sont particulières, nous avons pu supposer les constantes d'intégration égales à zéro.

Je donne ici l'expression pour Ψ_1 qui s'est montrée suffisante dans la pratique, s'il s'agit seulement d'une orbite approchée :

$$\begin{aligned}\Psi_1 = {} & \frac{\beta_1}{(\Delta+\sigma)^2}\sin(V+\theta_1) - \frac{\beta_2}{(\Delta+\sigma)^2}\sin(V+\theta_2) - \frac{\beta_3}{4(\Delta+\sigma)^2}\sin 2(V+\theta_3)\\ & + \frac{7}{8}\frac{\beta_1\beta_3}{(\Delta+\sigma)^4}\sin(V+2\theta_3-\theta_1)\\ & - \frac{3}{4}\frac{\beta_2\beta_3}{(\Delta+\sigma)^4}\sin(V+2\theta_3-\theta_2)\\ & + \frac{1}{8}\frac{\beta_1^2}{(\Delta+\sigma)^4}\sin 2(V+\theta_1).\end{aligned}$$

Avec une exactitude correspondante Ψ_0 peut être déterminé par

$$\frac{d^2\Psi_0}{d\tau^2} - \nu_0^2\Psi_0 = -\frac{\beta_1^2}{2(\Delta+\sigma)^2}\sin(\theta_2-\theta_1).$$

On voit que par le procédé exposé, le calcul des termes à longues périodes devient d'une simplicité qui ne laisse rien à désirer.

Digitized by Google

Voici les expressions numériques de Ψ_0 pour la planète Déjopeja :

$$\begin{aligned}\Psi_0 = &-1^\circ.445 \sin(\overline{\sigma' - \sigma}\,\tau + \Gamma' - \Gamma)\\ &-0.403 \sin(\overline{\sigma'' - \sigma}\,\tau + \Gamma'' - \Gamma)\\ &-0.057 \sin(\overline{\sigma''' - \sigma}\,\tau + \Gamma''' - \Gamma)\\ &+0.019 \sin(\overline{\sigma'' - \sigma'}\,\tau + \Gamma'' - \Gamma').\end{aligned}$$

Dans ma Note (*Bull.*, sept. 1897), les coefficients de Ψ_0 ont été doublés par inadvertance. Si on les divise par 2 et qu'on ait encore égard à $2\beta_2$ et β_3 le plus grand coefficient $5^\circ,873$ se réduit à peu près à 2°.

A la page 324 s'est glissée une faute. La dernière formule doit s'écrire

$$\begin{aligned}&\cos 2\,\mathrm{am}\,\frac{K}{\pi}(\overline{\Delta + \sigma\tau} + 2\theta + D)\\ &= -\frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{16}k_1^3 - \ldots - 16\left(\frac{\pi}{2kK}\right)^2\left[\frac{q}{1-q^2}\cos(\overline{\Delta + \sigma\tau} + 2\theta + D)\ldots\right].\end{aligned}$$

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE L'HODOGRAPHE DE HAMILTON;

PAR M. RYDZEWSKI.

L'hodographe de Hamilton est une courbe plane, puisque les vitesses d'une planète non troublée sont toujours situées dans le plan de l'orbite.

Prenons le plan de l'orbite pour le plan des X, Y. Par le point S, le centre de gravité du Soleil, menons deux axes rectangulaires SX et SY, dont SX passe par la position initiale du rayon vecteur de la planète M.

Soient x, y, r et α les coordonnées rectangulaires de la planète M, son rayon vecteur et l'angle que fait ce rayon avec SM_0 à l'époque t.

Nous poserons $\mu = f(1+m)$, où f est l'attraction de deux unités de masse à l'unité de distance et m est la masse de la planète M, la masse du Soleil étant prise pour unité des masses.

Les équations du mouvement de la planète relativement au

Digitized by Google

Soleil seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu\frac{y}{r^3};$$

ou bien, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par x' et y',

$$dx' = -\mu\frac{x}{r^3}\,dt,$$

$$dy' = -\mu\frac{y}{r^3}\,dt:$$

d'où, en remplaçant dt par sa valeur $\frac{r^2}{c}\,d\alpha$, déduite de l'intégrale des aires, x et y par $r\cos\alpha$ et $r\sin\alpha$ respectivement, il vient

$$(1)\qquad \begin{cases} dx' = -\frac{\mu}{c}\cos\alpha\,dt, \\ dy' = -\frac{\mu}{c}\sin\alpha\,dt. \end{cases}$$

En désignant $\frac{\mu}{c}$ par ρ, intégrons les équations (1) entre les limites o et α; il viendra

$$(2)\qquad \begin{cases} x' - x'_0 = -\rho\sin\alpha, \\ y' - y'_0 = \rho\cos\alpha - \rho, \end{cases}$$

où x'_0 et y'_0 sont les projections de la vitesse initiale v_0 sur les axes SX et SY.

Les équations (2) nous donnent immédiatement l'équation de l'hodographe

$$(3)\qquad (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0 + \rho)^2 = \rho^2,$$

qui montre que l'hodographe planétaire est un cercle de rayon ρ, dont le centre a pour coordonnées x'_0 et $y'_0 - \rho$. En désignant la distance SO du centre O de l'hodographe au centre S des coordonnées par R et l'angle OSM_0 par $\psi = 90^\circ - w_0$ il viendra

$$(4)\qquad \begin{cases} x'_0 = R\sin w_0, \\ y'_0 - \rho = R\cos w_0 \end{cases}$$

et

$$(5)\qquad \begin{cases} x' = R\sin w_0 - \rho\sin\alpha, \\ y' = R\cos w_0 + \rho\cos\alpha. \end{cases}$$

Digitized by Google

En se servant de ces valeurs de x' et y' il est facile de déduire l'expression de la constante des aires c au moyen de R, ρ et w. On a

$$c = r[\rho + R\cos(w_0 + \alpha)],$$

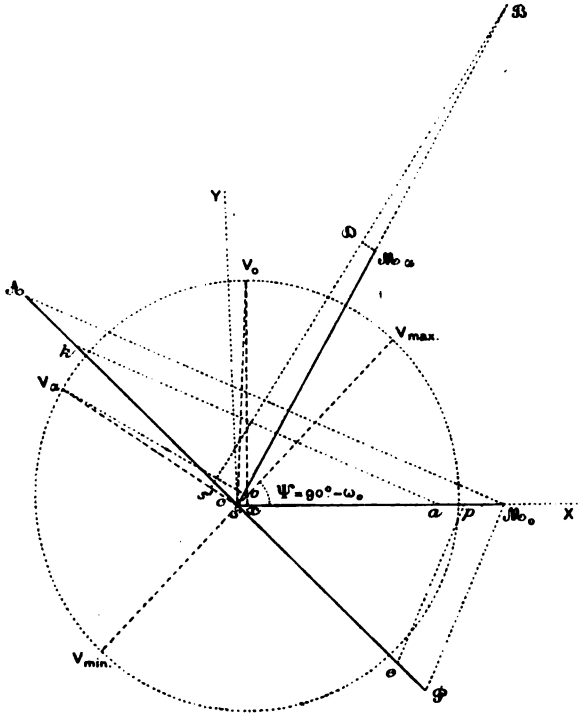
ou, pour t_0,

$$6) \qquad c = r_0(\rho + R\cos w_0) = r_0 y'_0.$$

Pour obtenir graphiquement les valeurs ρ, R et w_0 menons la ligne SV_0 (*fig.* 1) faisant avec la ligne des abscisses SX un angle V_0SM_0 égale à l'angle du rayon vecteur initial avec la vitesse initiale et dont la longueur SV_0 exprimée en unités de vitesse est égale à la valeur v_0 de la vitesse initiale.

Sur notre *fig.* 1, les lignes exprimées en unités de longueur

Fig. 1.



sont tracées d'une manière continue; les lignes représentant les vitesses sont tracées par traits et les lignes auxiliaires sont ponctuées.

Digitized by Google

En prenant sur l'ordonnée du point V_0 une longueur V_0O égale à $\rho = \frac{\mu}{c}$, on obtient le centre O de l'hodographe. Les vitesses maximum et minimum sont situées sur la ligne qui joint les points S et O et sont égales à SV_{max} et SV_{min} ou à $\rho + R$ et $\rho - R$.

Comme ces vitesses sont normales à la ligne des absides, la direction de cette dernière peut être obtenue en menant la ligne PA perpendiculaire à la ligne $V_{max}V_{min}$.

La cotangente de l'angle formé par la vitesse avec le rayon vecteur, pour chaque moment, s'exprime ainsi

$$\frac{dr}{r\,dz} = \frac{x'\cos z - y'\sin z}{-x'\sin z - y'\cos z},$$

ou en raison des équations (5)

$$(7) \qquad \frac{dr}{r\,dz} = \frac{R\sin(\omega_0 - z)}{\rho - R\cos(\omega_0 - z)}.$$

Après l'intégration de cette équation on obtient

$$r = \frac{r_0(\rho - R\cos\omega_0)}{\rho - R\cos(\omega_0 - z)},$$

ou bien

$$(8) \qquad r = \frac{r_0\left(1 - \frac{R}{\rho}\cos\omega_0\right)}{1 - \frac{R}{\rho}\cos(\omega_0 - z)}.$$

L'équation (8) montre que la courbe décrite par le rayon vecteur est une section conique avec le foyer en S, dont l'excentricité est $\frac{R}{\rho}$. Ainsi, si le rayon ρ de l'hodographe est plus grand que la distance R de son centre au point S, la courbe décrite par le point M est une ellipse; si l'hodographe passe par le point S ($\rho = R$), c'est une parabole; et enfin si ρ est plus petit que R, c'est une hyperbole (1). Nous allons considérer ici le cas de $R < \rho$ c'est-à-dire le cas de l'ellipse.

(1) Si R est égale à ρ la courbe est évidemment un cercle.

Digitized by Google

De la formule (8) on obtient facilement les expressions

$$p = a(1 - e^2) = \frac{r_0(\rho + R\cos w_0)}{\rho}, \tag{9}$$

$$e = \frac{R}{\rho}, \tag{10}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \frac{a(1-e)}{\rho + R\cos w_0} &= \frac{r_0}{\rho + R} \\ \frac{a(1+e)}{\rho + R\cos w_0} &= \frac{r_0}{\rho - R}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Donc, en se servant des formules (11), on peut facilement construire les distances au point S du périhélie $a(1-e)$ et d'aphélie $a(1+e)$. Pour les trouver on prend sur la ligne des absides (*fig.* 1) des longueurs Se et Sk égales à $\rho + R\cos w_0$ ou à V_0x, sur la ligne SM_0 des longueurs Sa et Sp respectivement égales à $\rho - R$ et à $\rho + R$. En joignant les points a et p respectivement avec les points k et e et en menant les lignes M_0A et M_0P respectivement parallèles aux lignes ak et pe, on obtient l'aphélie A et le périhélie P.

Le centre de l'ellipse est évidemment situé sur la ligne AP à une distance de P égale à $\frac{1}{2}$ AP. En connaissant la position et la grandeur AP (en unités de longueur) du grand axe de l'ellipse ainsi que la position C de son centre on peut tracer l'ellipse entièrement si l'on veut obtenir la grandeur du rayon vecteur SM_α faisant avec le rayon vecteur initial SM_0 un angle α, on mène une ligne SB inclinée à l'axe des abscisses sous un angle α; on porte sur cette ligne une longueur SB égale à AP, on joint avec le point B le point S′, second foyer de l'ellipse, qui est un point symétrique de S par rapport à C et l'on élève une perpendiculaire DM_α à la ligne S′B au point D, milieu de S′B; l'intersection de cette perpendiculaire avec la ligne SB donnera l'extrémité M_α du rayon vecteur cherché SM_α.

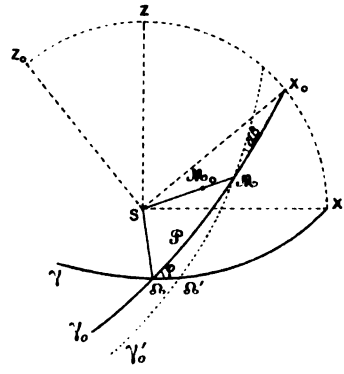
La direction et la grandeur de la vitesse de la planète au point M_α, en raison des formules (2), peuvent être obtenues ainsi : on mène du point O, centre de l'hodographe, une perpendiculaire au rayon vecteur SM_α et on la prolonge jusqu'à son intersection V_α

Digitized by Google

avec l'hodographe; la ligne SV_α est égale en grandeur et en direction à la vitesse de la planète au point M_α de l'orbite.

Considérons maintenant la position de l'orbite dans l'espace.

Fig. 2.



Soient (*fig.* 2) $r\Omega X$ et $r_0\Omega X_0$ les sections de l'écliptique et de l'orbite planétaire par une sphère de rayon $SM = 1$ ayant pour centre le centre S du Soleil; l'angle $X\Omega X_0$ l'inclinaison φ de l'orbite, et l'arc $r\Omega$, compté du point vernal r dans le sens du mouvement de la planète, la longitude θ du nœud ascendant. La longitude ω du périhélie est égale à $r_0\Omega + \Omega P$, où $r_0\Omega = r\Omega$, l'argument de la latitude v est égale à ΩM; l'arc MP est évidemment l'angle M_0SP de la figure (1).

D'après ces notations nous pouvons écrire

$$\omega = r_0\Omega + \Omega M - MP = \theta + v - w_0. \tag{12}$$

Si la longitude de l'époque est ε on a

$$\varepsilon = \omega + u_0 - e \sin u_0, \tag{13}$$

où u_0 est l'anomalie excentrique initiale.

Les quantités r_0, w_0 et u_0 sont liées, comme on le connaît, par les équations

$$\begin{aligned} a\sqrt{1-e^2}\sin u_0 &= r_0 \sin w_0, \\ a(\cos u_0 - e) &= r_0 \cos w_0, \\ a(1 - e\cos u_0) &= r_0. \end{aligned}$$

Ainsi, la position de l'orbite dans l'espace est déterminée par

Digitized by Google

deux éléments θ et φ, et la position de M_0 dans l'orbite par quatre éléments a, e, w_0 et ε.

Les éléments a et e s'expriment aisément au moyen des éléments ρ et R de l'hodographe.

Des formules (6) et (9), on déduit

$$p = \frac{c}{\rho} = \frac{\mu}{\rho^2};$$

d'où, en se servant de l'expression (10), $e = \frac{R}{\rho}$, on a

$$a = \frac{\rho}{1 - e^2} = \frac{\mu}{\rho^2 - R^2}. \tag{14}$$

Inversement, ρ et R s'expriment au moyen de p et de e, ainsi

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{p}}, \qquad R = e\sqrt{\frac{\mu}{p}},$$

ou, en se servant de la relation connue $\mu = n^2 a^3$,

$$\rho = \frac{\mu}{na^2\sqrt{1 - e^2}}, \qquad R = e\,\frac{\mu}{na^2\sqrt{1 - e^2}}. \tag{15}$$

M. L. Picart, dans son article *Sur la variation des éléments elliptiques* (¹), a déduit d'une manière élémentaire les expressions des variations des éléments osculateurs d'une planète en fonction de ces éléments et des composantes S′, T′, W′ de la force perturbatrice suivant le rayon vecteur, la perpendiculaire à ce rayon dans le plan de l'orbite et la perpendiculaire au plan de l'orbite.

En se servant de l'hodographe on peut arriver aux mêmes équations d'une manière encore plus rapide.

La composante W′ seule peut changer la position du plan de l'orbite. Les composantes S′ et T′ changeront seulement les valeurs ρ, R et w_0 de l'hodographe.

Nous allons supposer que la force perturbatrice commence à agir au moment t_0, qui peut être pris arbitrairement; les valeurs ρ et R, comme il est aisé de voir, pour une même ellipse ne changent pas; la valeur w_0 varie avec le temps t.

L'action de la composante W′ se manifestera en ce que l'orbite ☊MX_0 (*fig.* 2) tournera autour de la direction SM du rayon

(¹) *Bulletin astronomique*, t. XII, p. 5-10.

Digitized by Google

vecteur d'un angle infiniment petit $d\beta$, qui est égale, pour un intervalle infiniment petit, au rapport de $W'dt$ et de la vitesse y'_0. Cette dernière, à raison des formules (6) et de la relation $\varsigma = \frac{\mu}{c}$, est égale à $\frac{c}{r_0} = \frac{\mu}{r_0 \varsigma}$; donc

$$\frac{d\beta}{dt} = W' \frac{r_0}{\mu} \varsigma. \tag{16}$$

Cette rotation autour de l'axe SM peut être décomposée en rotation autour de la ligne des nœuds S☊ et de la perpendiculaire SX_0 à cette ligne située dans le plan de l'orbite. Les rotations autour de ces axes seront respectivement $\frac{d\beta}{dt}\cos v$ et $\frac{d\beta}{dt}\sin v$; ces mêmes rotations peuvent être exprimées aussi pour $\frac{d\varsigma}{dt}$ et $\frac{d\Theta}{dt}\sin\varsigma$ respectivement; donc

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varsigma}{dt} &= \frac{d\beta}{dt}\cos v. \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{d\beta}{dt}\frac{\sin v}{\sin\varsigma}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

La rotation $\frac{dv}{dt}$ autour de l'axe SZ_0 est égale en valeur et contraire en direction à la projection de la rotation $\frac{d\Theta}{dt}$ autour de l'axe SZ sur l'axe SZ_0, donc

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d\Theta}{dt}\cos\varsigma. \tag{18}$$

De l'expression (12) on obtient

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} - \frac{dv}{dt} - \frac{d\varpi_0}{dt},$$

ou, en raison de l'équation (18),

$$\frac{d\varpi}{dt} = 2\sin^2\frac{\varsigma}{2}\frac{d\Theta}{dt} - \frac{d\varpi_0}{dt}. \tag{19}$$

Enfin les équations (16) et (17) donnent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varsigma}{dt} &= W' \frac{r_0}{\mu}\varsigma\cos v. \\ \frac{d\Theta}{dt} &= W' \frac{r_0}{\mu}\varsigma\frac{\sin v}{\sin\varsigma}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Digitized by Google

Il nous reste maintenant à obtenir les expressions donnant les variations des éléments ρ, R et w_0 de l'hodographe en fonctions de ces éléments, de r_0 et des composantes S′ et T′ de la force perturbatrice.

Comme la composante S′ fait varier seulement x'_0 et la composante T′ seulement y'_0, on a

$$dx'_0 = S'\,dt, \qquad dy'_0 = T'\,dt;$$

mais, en raison des formules (4),

$$dx'_0 = d\mathrm{R}\sin w_0 + \mathrm{R}\cos w_0\,dw_0,$$
$$dy'_0 = d\mathrm{R}\cos w_0 - \mathrm{R}\sin w_0\,dw_0 + d\rho,$$

donc

$$d\mathrm{R}\sin w_0 + \mathrm{R}\cos w_0\,dw_0 = S'\,dt,$$
$$d\mathrm{R}\cos w_0 - \mathrm{R}\sin w_0\,dw_0 = T'\,dt - d\rho;$$

d'où l'on a

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{R}}{dt} &= S'\sin w_0 + \left(T' - \frac{d\rho}{dt}\right)\cos w_0,\\ \mathrm{R}\frac{dw_0}{dt} &= S'\cos w_0 - \left(T' - \frac{d\rho}{dt}\right)\sin w_0.\end{aligned}\right.$$

Mais

$$\rho = \frac{\mu}{c} = \frac{\mu}{r_0 y'_0},$$

donc

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\mu}{r_0 y'^2_0}\frac{dy'}{dt} = -\frac{r_0}{\mu}\rho^2 T'.$$

Enfin, en raison des formules précédentes, on a

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{R}}{dt} &= S'\sin w_0 + T'\cos w_0\left(1 + \frac{r_0}{\mu}\rho^2\right),\\ \mathrm{R}\frac{dw_0}{dt} &= S'\cos w_0 - T'\sin w_0\left(1 + \frac{r_0}{\mu}\rho^2\right),\\ \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{r_0}{\mu}\rho^2 T'.\end{aligned}\right.$$

Après la différentiation de l'équation $e = \frac{\mathrm{R}}{\rho}$, on a, en raison des formules (15) et (22),

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{1}{\rho}\frac{d\mathrm{R}}{dt} - \frac{\mathrm{R}}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\\ &= \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{\mu}\left[S'\sin w_0 + T'\cos w_0\left(1 + \frac{r_0}{p}\right)\right] + \frac{naer_0}{\mu\sqrt{1-e^2}}T'\\ &= \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{\mu}\left[S'\sin w_0 + T'\cos w_0\left(1 + \frac{r_0}{p}\right) + T'e\frac{r_0}{p}\right];\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

mais

$$\cos w_0\left(1+\frac{r_0}{p}\right)+e\frac{r_0}{p}=\cos w_0+\frac{r_0}{p}(\cos w_0+e)$$
$$=\cos w_0+\frac{a}{p}(1-e^2)\cos u_0=\cos w_0+\cos u_0,$$

donc

$$(24)\qquad \frac{de}{dt}=\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{\mu}[S'\sin w_0+T'(\cos w_0+\cos u_0)].$$

En prenant les dérivées de deux membres de l'équation (14), on obtient

$$\frac{da}{dt}=-\frac{2\mu}{(\rho^2-R^2)^2}\left(\rho\frac{d\rho}{dt}-R\frac{dR}{dt}\right)=-\frac{2a^2}{\mu}\rho\left(\frac{d\rho}{dt}-e\frac{dR}{dt}\right)$$
$$=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[T'\frac{r_0}{p}+S'e\sin w_0+T'e\cos w_0\left(1+\frac{r_0}{p}\right)\right];$$

d'où, après des réductions faciles, on obtient

$$(25)\qquad \frac{da}{dt}=\frac{2na^2}{\mu\sqrt{1-e^2}}\left(S'e\sin w_0+T'\frac{p}{r_0}\right).$$

En portant, dans les formules (20), la valeur de

$$p=\frac{\mu}{na^2\sqrt{1-e^2}}=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}},$$

on a

$$(26)\qquad \begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=W'r_0\dfrac{na}{\mu\sqrt{1-e^2}}\cos v,\\[2ex] \sin\varphi\dfrac{d\theta}{dt}=W'r_0\dfrac{na}{\mu\sqrt{1-e^2}}\sin v.\end{cases}$$

L'équation (19), à raison de la seconde des formules (22), peut être représentée ainsi

$$R\frac{d\omega}{dt}=2R\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}-S'\cos w_0+T'\sin w_0\left(1+\frac{r_0}{p}\right);$$

d'où, en portant pour R sa valeur $\frac{\mu e}{na^2\sqrt{1-e^2}}$, on obtient

$$(27)\quad e\frac{d\omega}{dt}=2e\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}+\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{\mu}\left[-S'\cos w_0+T'\sin w_0\left(1+\frac{r_0}{p}\right)\right].$$

La variation de l'époque ε se déduit d'une manière un peu plus

Digitized by Google

compliquée. En prenant les dérivées des deux membres de l'équation

$$\varepsilon = \omega + u_0 - e \sin u_0,$$

on a

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{d\omega}{dt} + \frac{du_0}{dt}(1 - e\cos u_0) - \sin u_0 \frac{de}{dt}, \\ &= \frac{d\omega}{dt} + \frac{r_0}{a}\frac{du_0}{dt} - \frac{r_0}{a\sqrt{1-e^2}}\sin w_0 \frac{de}{dt}. \end{aligned}\right.$$

De la formule $r_0 = a(1 - e\cos u_0)$, on déduit aisément

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{r_0}{a}\frac{du_0}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ae}\left(\frac{r_0\cos w_0 + ae}{\sin w_0}\right)\frac{de}{dt} - \frac{r_0}{a}\frac{\sqrt{1-e^2}}{ae}\frac{1}{\sin w_0}\frac{da}{dt}, \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ae}\frac{1}{\sin w_0}\left[(r_0\cos w_0 + ae)\frac{de}{dt} - \frac{r_0}{a}\frac{da}{dt}\right]. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant, dans l'équation (28), $\frac{r_0}{a}\frac{du_0}{dt}$ par son expression (29), on obtient

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{ae}\frac{1}{\sin w_0}\left[\left(r_0\cos w_0 + ae - \frac{r_0 e\sin^2 w_0}{1-e^2}\right)\frac{de}{dt} - \frac{r_0}{a}\frac{da}{dt}\right].$$

Mais

$$\begin{aligned} r_0\cos w_0 + ae - \frac{r_0 e\sin^2 w_0}{1-e^2} &= a\cos u_0 - \frac{a^2 e\sin^2 u_0}{r_0} \\ &= \frac{a^2(\cos u_0 - e)}{r} = a\cos w_0, \end{aligned}$$

donc

$$(30)\quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sin w_0}\left(\cos w_0\frac{de}{dt} - \frac{r_0}{a}\frac{da}{dt}\right).$$

En portant dans cette équation les valeurs de $\frac{da}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$ données par les formules (23) et (28), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt} &+ \frac{1}{\mu}S'\left[\frac{na^2(1-e^2)}{e}\cos w_0 - 2nar_0\right] \\ &+ \frac{na^2(1-e^2)}{\mu e}T'\sin w_0\left[\frac{\cos^2 w_0\left(1 + \frac{r_0}{p}\right) + e\cos w_0\frac{r_0}{p} - 2}{\sin^2 w_0}\right], \end{aligned}$$

Digitized by Google

mais

$$\frac{\cos^2 w_0\left(1+\frac{r_0}{p}\right)+e\cos w_0\,\frac{r_0}{p}-2}{\sin^2 w_0}=\frac{\cos w_0(\cos w_0+e)r_0-p}{p\sin^2 w_0}-1$$

$$=\frac{r_0\cos^2 w_0+r_0 e\cos w_0-p}{p\sin^2 w_0}-1=\frac{r_0\cos^2 w_0-r_0}{p\sin^2 w_0}-1=-\left(\frac{r_0}{p}+1\right);$$

donc

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt}&=\frac{d\omega}{dt}-\frac{2na}{\mu}\,S'r_0\\&\quad-\sqrt{1-e^2}\left\{\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\left[-S'\cos w_0+T'\sin w_0\left(1+\frac{r_0}{p}\right)\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

En comparant cette équation avec la formule (27), on remarque que l'expression entre accolades $\{\ \}$ est égale à $\frac{d\omega}{dt}-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}$.

En portant cette valeur dans l'équation (31), on obtient

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2na}{\mu}\,S'r_0+\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\omega}{dt}+2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}$$

ou

$$(32)\quad\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2na}{\mu}\,S'r_0+\frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{d\omega}{dt}+2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}.$$

Si, dans les formules (24), (25), (26), (27) et (31), on porte les valeurs $f(1+m)$, $fm'S$, $fm'T$ et $fm'W$ au lieu de μ, S', T' et W' respectivement et si l'on rejette chez r_0 et w_0 les indices o, ce que nous pouvons faire puisque la position initiale M_0 est arbitraire, on a

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\frac{2m'}{1+m}\,\frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}}\left(Se\sin w+T\frac{p}{r}\right),\\\frac{de}{dt}&=\frac{m'}{1+m}\,na^2\sqrt{1-e^2}\,[S\sin w+T(\cos u+\cos w)],\\\frac{d\varphi}{dt}&=\frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\,Wr\cos v,\\\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}&=\frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\,Wr\sin v,\\e\frac{d\omega}{dt}&=2e\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}\\&\quad+\frac{m'}{1+m}\,na^2\sqrt{1-e^2}\left[-S\cos w+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\right],\\\frac{d\varepsilon}{dt}&=-2\frac{m'}{1+m}\,naSr+\frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{d\omega}{dt}+2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

C'est en cette forme que sont exprimées les formules classiques donnant la variation des éléments osculateurs, dans le n° 185 du Tome I de la *Mécanique céleste* de M. Tisserand.

On voit ainsi que la considération de l'hodographe planétaire donne un moyen simple pour déduire les variations des éléments elliptiques en fonctions de ces éléments et des composantes de la force perturbatrice.

Pour conclusion, on peut montrer encore que la formule bien connue, reliant la vitesse v d'une planète au temps t, sa distance r au même temps et son demi grand axe a, peut être déduite facilement de la considération de l'hodographe.

D'après les formules (4) on a

$$v_0^2 = R^2 + \rho^2 + 2R\rho\cos w_0,$$

ou en raison de l'équation (6)

$$v_0^2 = R^2 + \rho^2 + 2\rho\left(\frac{\mu}{r_0\rho} - \rho\right) = R^2 - \rho^2 + \frac{2\mu}{r_0};$$

mais, par la formule (14),

$$R^2 - \rho^2 = -\frac{\mu}{a},$$

donc

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} - \frac{\mu}{a},$$

ou, à raison de ce que t_0 est arbitraire,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

c'est-à-dire la formule cherchée.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE PLANÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial de $0^m,26$ d'ouverture);

PAR M. ESMIOL.

Dates.	T. m. Marseille.	ΔR.	ΔP.	N. dec.	R app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
					(14) Irène.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JUIN 18.	10.22.13	+2. 3,86	— 5.45,9	4.4	17.47.30,13	—$\bar{1}$,279	113.33.15,8	—0,897	1
19.	9.28.18	+1. 4,10	— 2.12,6	5.5	17.46.30,38	—$\bar{1}$,443	113.36.49,1	—0,882	2
21.	9.50.47	—1. 0,53	+ 5. 1,9	5.5	17.44.25,77	—$\bar{1}$,345	113.44. 3,6	—0,893	3
22.	9.48.54	—2. 1,87	+ 8.33,6	5.5	17.43.24,44	—$\bar{1}$,334	113.47.35,3	—0,894	4
23.	9.46.23	—3. 2,72	+12. 3,6	5.5	17.42.23,61	—$\bar{1}$,325	113.51. 5,3	—0,895	5
24.	9.54.11	+0.36,84	— 8. 3,7	5.5	17.41.22,65	—$\bar{1}$,273	113.54.24,0	—0,899	6
25.	9.36.55	—0.22,46	— 4.38,5	6.6	17.40.23,36	—$\bar{1}$,324	113.57.49,2	—0,895	7
26.	9.43.45	—0.47,73	— 4.50,3	3.3	17.39.24,01	—$\bar{1}$,276	114. 1.10,2	—0,899	8
28.	9.52. 0	—2.44,44	+ 1.48,0	5.5	17.37.27,32	—$\bar{1}$,189	114. 7.48,5	—0,903	9
JUILL. 5.	10.50. 4	+1.48,54	— 3.57,7	5.5	17.31. 8,16	+$\bar{2}$,507	114.29.35,9	—0,912	10
6.	9.50.38	+1. 1,70	— 1.10,1	5.5	17.30.21,32	—$\bar{2}$,906	114.32.23,5	—0,910	11
7.	9.52.30	+0.13,78	+ 1.44,0	8.8	17.29.33,40	—$\bar{2}$,826	114.35.17,6	—0,911	12
9.	10. 7. 7	—1.17,99	+ 7.24,6	5.5	17.28. 1,64	—$\bar{2}$,247	114.40.58,2	—0,913	13
10.	9.40.22	—2. 0,61	+10. 7,2	5.5	17.27.19,03	—$\bar{2}$,802	114.43.40,9	—0,912	14
15.	9.41.16	—2.43,58	— 1.29,4	5.5	17.24. 4,11	—$\bar{2}$,153	114.56.52,9	—0,914	15
16.	9.39. 8	+1.52,97	— 3.46,4	5.5	17.23.30,09	—$\bar{3}$,967	114.59.32,6	—0,914	16
17.	10. 5.43	+1.19,85	— 1.11,8	5.5	17.22.56,98	+$\bar{2}$,739	115. 2. 7,2	—0,913	17
19.	9.55.35	+0.20,21	+ 3.46,8	5.5	17.21.57,33	+$\bar{2}$,720	115. 7. 5,9	—0,913	18
21.	9.44.34	—0.32,37	+ 8.39,3	5.5	17.21. 4,74	+$\bar{2}$,679	115.11.58,4	—0,914	19
22.	9.32. 3	—0.55,97	+11. 0,0	5.5	17.20.41,14	+$\bar{2}$,489	115.14.19,1	—0,914	20
23.	9.38.51	—1.40,16	+ 8.20,0	5.5	17.20.18,78	+$\bar{2}$,731	115.16.42,0	—0,914	21
24.	9.56.44	—2. 0,68	+10.41,5	5.5	17.19.58,25	+$\bar{2}$,997	115.19. 3,5	—0,911	22
29.	9.16.51	+2.14,48	+ 2.50,3	5.5	17.18.43,85	+$\bar{2}$,781	115.30.25,0	—0,914	23
30.	9.19. 7	+2. 4,86	+ 5. 5,2	5.5	17.18.34,23	+$\bar{2}$,867	115.32.39,9	—0,914	24
31.	9.30.14	+1.56,80	+ 7.19,2	5.5	17.18.26,16	+$\bar{1}$,019	115.34.53,9	—0,912	25
					(33) Polhymnie.				
MAI 29.	10.10.19	+1. 2,36	— 3.23,4	6.6	16.39.33,53	—$\bar{1}$,370	114.57.59,8	—0,894	26
					(57) Mnémosyne.				
JUIN 21.	10.22.46	+1.24,41	+ 3.50,5	5.5	17.58.33,04	—$\bar{1}$,236	93.13.24,0	—0,804	27
22.	10.15.32	+0.39,10	+ 2.46,6	5.5	17.57.47,74	—$\bar{1}$,247	93.12.19,9	—0,803	28
23.	10. 8.54	—0. 5,88	+ 1.47,7	5.5	17.57. 2,77	—$\bar{1}$,256	93.11.20,9	—0,803	29

Digitized by Google

Dates.	T. m. Marseille.	ΔR.	ΔΦ.	N. de c.	R app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	★
					(57) Mnémosyne.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JUIN 24.	10.19.52	—0.51,95	+ 0.57,5	5.5	17.56.16,71	—1̄,184	93.10.30,6	—0,804	30
25.	9.58.45	—1.36,64	+ 0.14,7	5.5	17.55.32,03	—1̄,255	93. 9.47,7	—0,803	31
28.	10.31.48	—3.52,48	— 0.55,3	5.5	17.53.16,21	—2̄,990	93. 8.37,4	—0,805	32
					(113) Amalthée.				
MAI 24.	10.43.40	—0.15,42	— 1.25,8	8.8	15.47. 8,78	—2̄,998	101.30.20,5	—0,856	33
25.	10.14.34	—1.11,56	— 2.27,9	5.5	15.46.12,65	—1̄,259	101.29.18,4	—0,853	34
					(116) Sirona.				
MAI 8.	10. 4.12	+0. 5,01	+ 6.18,3	6.6	14.43.48,34	—1̄,236	103.49.47,0	—0,862	35
10.	9.46.46	—1.40,03	+ 1.21,5	5.5	14.42. 3,32	—1̄,270	103.44.50,2	—0,861	36
11.	9.52.40	—2.32,14	— 1. 3,4	5.5	14.41.11,21	—1̄,223	103.42.25,3	—0,862	37
12.	10. 1.39	—3.23,64	— 3.24,9	5.5	14.40.19,72	—1̄,153	103.40. 3,9	—0,864	38
18.	9.52.50	+0.30,42	— 9.21,9	5.5	14.35.27,59	—1̄,024	103.27.10,0	—0,865	39
19.	9.48.46	—0.15,34	—11.18,2	6.6	14.34.41,83	—1̄,019	103.25.13,7	—0,865	40
20.	9.45.23	—0.59,99	—13. 7,8	5.5	14.33.57,19	—2̄,009	103.23.24,1	—0,865	41
24.	9.49. 3	+1.43,43	— 6.59,2	5.5	14.31. 8,66	—2̄,777	103.16.52,1	—0,866	42
25.	9.53.23	+1. 4,07	— 8.25,5	5.5	14.30.29,30	—2̄,631	103.15.25,7	—0,866	43
28.	9.39.30	+0. 4,31	+ 9.47,2	5.5	14.28.39,74	—2̄,636	103.11.43,0	—0,866	44
29.	9.41.12	—0.29,93	+ 8.43,8	5.5	14.28. 5,50	—2̄,496	103.10.39,6	—0,866	45
31.	9.44.48	+1. 7,89	— 0.40,1	5.5	14.27. 0,45	—3̄,849	103. 8.40,3	—0,866	46
JUIN 1.	9.30. 4	+0.38,17	— 1.23,1	5.5	14.26.30,73	—2̄,432	103. 7.57,3	—0,866	47
5.	9.57.16	—1. 8,04	— 3.19,1	5.5	14.24.44,52	+2̄,774	103. 6. 1,2	—0,865	48
					(137) Meliboea.				
JUILL. 10.	10.17.14	+0.24,26	— 0.33,8	5.5	20. 5.53,30	—1̄,424	87.34.54,5	—0,765	49
17.	9.44.27	+1.15,62	—10.42,3	5.5	20. 1. 2,38	—1̄,425	87.40. 7,7	—0,766	50
19.	10.15.58	—0.11,35	— 6.54,2	6.6	19.59.35,43	—1̄,305	87.43.55,5	—0,764	51
21.	10.13.14	—1.38,14	— 2. 8,4	5.5	19.58. 8,66	—1̄,280	87.48.41,0	—0,765	52
22.	10. 4.36	—0. 9,63	+ 8.49,9	8.8	19.57.26,08	—1̄,295	87.51.27,4	—0,765	53
24.	10.36.51	—0.25,72	+11.40,6	5.5	19.55.58,20	—1̄,097	87.57.40,5	—0,765	54
26.	11.58.10	+3.45,09	— 8.40,0	7.7	19.54.30,35	+2̄,641	88. 5. 4,0	—0,765	55
28.	9.48.27	+2.25,12	— 0.56,8	5.5	19.53.10,39	—1̄,249	88.12.46,9	—0,767	56
29.	9.40.51	+1.43,85	+ 3.21,0	6.6	19.52.29,12	—1̄,262	88.17. 4,6	—0,768	57
30.	9.46. 6	+1. 2,71	+ 7.54,9	5.5	19.51.47,99	—1̄,219	88.21.38,4	—0,769	58
31.	10. 4.32	+0.21,72	+12.45,3	6.6	19.51. 7,00	—1̄,096	88.26.28,6	—0,769	59

Digitized by Google

Dates.	T. m. Marseille.	ΔÆ.	ΔP.	N. de c.	Æ app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
					(184) Deïopée.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JUILL. 27.	14. 8.13	—3.57,84	— 5.34,7	5.5	21.31.56,34	+$\bar{1}$,064	105.12.43,9	—0,873	60
28.	11.25.51	—1.20,47	— 6.35,5	5.5	21.31.18,99	—$\bar{1}$,267	105.15.35,1	—0,868	61
29.	11. 6.37	—2. 2,80	— 3.20,0	6.6	21.30.36,68	—$\bar{1}$,323	105.18.50,6	—0,865	62
30.	11.26. 7	+1.34,72	+ 0.22,0	6.6	21.29.53,29	—$\bar{1}$,225	105.22. 7,9	—0,870	63
31.	11.52.55	+0.50,12	+ 3.39,5	6.6	21.29. 8,71	—$\bar{1}$,040	105.25.25,3	—0,874	64
					(240) Vanadis.				
JUILL. 29.	12.44.40	+0.42,31	+ 1.24,8	9.9	22.26.59,89	—$\bar{1}$,125	101.27. 2,7	—0,854	65
30.	12. 8.31	—0.34,92	+ 3.24,2	5.5	22.26.29,01	—$\bar{1}$,278	101.31.13,2	—0,850	66
31.	12.32.53	—1. 9,64	+ 8. 2,3	6.6	22.25.54,31	—$\bar{1}$,141	101.35.51,2	—0,854	67
					(248) Lameia.				
JUILL. 23.	11.41.57	+1.18,31	+ 8. 2,5	7.7	20. 1.15,76	—$\bar{2}$,349	104.45.28,8	—0,874	68
24.	11.40.23	—0.57,89	+ 1.16,7	6.6	20. 0.18,29	—$\bar{2}$,200	104.47.18,8	—0,874	69
26.	11. 6.16	—0.28,41	— 2.49,7	7.7	19.58.25,94	—$\bar{2}$,800	104.51. 5,0	—0,874	70
27.	12.21. 5	—1.28,45	— 0.42,3	5.5	19.57.25,91	+$\bar{2}$,960	104.53.12,4	—0,873	71
28.	10.21.52	+0.59,41	— 6.23,9	6.6	19.56.34,90	—$\bar{1}$,110	104.54.59,4	—0,871	72
29.	9.58.23	+0. 5,17	— 4.28,6	6.6	19.55.40,67	—$\bar{1}$,213	104.56.54,8	—0,868	73
30.	10. 4.29	—0.50,09	— 2.23,9	5.5	19.54.45,41	—$\bar{1}$,157	104.58.59,6	—0,870	74
31.	10.22.28	—1.44,92	— 0.13,6	5.5	19.53.50,59	—$\bar{1}$,003	105. 1. 9,9	—0,873	75
					(379) 1894 AQ.				
JUILL. 19.	11.39.16	—0.49,03	+13.49,6	6.6	20.34. 0,62	—$\bar{1}$,084	106.43. 4,6	—0,879	76
21.	11.13.26	—2.20,00	+20. 7,3	5.5	20.32.29,69	—$\bar{1}$,185	106.49.22,2	—0,877	77
22.	10.34.22	+1.56,78	— 0.10,3	5.5	20.31.43,50	—$\bar{1}$,330	106.52.24,1	—0,871	78
23.	10.28.28	+1. 9,90	+ 2.59,3	6.6	20.30.56,63	—$\bar{1}$,334	106.55.33,7	—0,871	79
24.	11. 3.55	+0.21,28	+ 6.14,3	6.6	20.30. 8,03	—$\bar{1}$,158	106.58.48,6	—0,878	80
26.	13. 5.43	—1.18,43	+13. 3,4	4.4	20.28.28,34	—$\bar{1}$,045	107. 5.37,6	—0,881	81
27.	12.53.19	+0.54,77	+11.34,5	5.5	20.27.40,72	+$\bar{2}$,983	107. 8.51,2	—0,882	82
28.	10.56.58	+0.10,83	+14.32,4	7.7	20.26.56,79	—$\bar{1}$,084	107.11.49,1	—0,881	83
29.	10.12.16	—0.19,66	— 5.58,5	6.6	20.26. 9,19	—$\bar{1}$,293	107.14.51,1	—0,875	84
30.	10.28.49	—1. 8,41	— 2.39,3	5.5	20.25.20,45	—$\bar{1}$,194	107.18.10,3	—0,879	85
31.	11. 4.58	—1.57,82	+ 0.41,3	6.6	20.24.31,06	—$\bar{2}$,897	107.21.30,8	—0,884	86

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	Æ moy. 1897,0.	Réd. au j.	P moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	7,8	17.45.22,12	+4,15	113.38.55,1	+ 6,6	4648 Radcliffe.
2.	»	»	+4,16	»	+ 6,6	Id.
3.	»	»	+4,18	»	+ 6,6	Id.
4.	»	»	+4,19	»	+ 6,6	Id.

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1897,0.	Réd. au j.	℘ moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
5.	7,8	17.45.22,12	+4,21	113.38.55,1	+ 6,6	4648 Radcliffe.
6.	9	17.40.41,59	+4,22	114. 2.20,6	+ 7,1	13638 W. Zones Sud Arg.
7.	»	»	+4,23	»	+ 7,1	Id.
8.	9	17.40. 7,50	+4,24	114. 5.53,3	+ 7,2	13639 W. Zones Sud Arg.
9.	»	»	+4,26	»	+ 7,2	Id.
10.	8	17.29.15,33	+4,29	114.33.25,2	+ 8,4	4573 Radcliffe.
11.	»	»	+4,29	»	+ 8,4	Id.
12.	»	»	+4,29	»	+ 8,4	Id.
13.	8	»	+4,30	»	+ 8,4	Id.
14.	»	»	+4,31	»	+ 8,5	Id.
15.	9	17.26.43,38	+4,31	114.58.13,4	+ 8,9	13439 W. Zones Sud Arg.
16.	9,10	17.21.32,83	+4,29	115. 3. 9,6	+ 9,4	12171 Z. Cord. — 25° comp. à 13377 W. Zones Sud Arg.
17.	»	»	+4,30	»	+ 9,4	Id.
18.	»	»	+4,29	»	+ 9,5	Id.
19.	»	»	+4,28	»	+ 9,5	Id.
20.	»	»	+4,28	»	+ 9,5	Id.
21.	9	17.21.54,66	+4,28	115. 8.12,5	+ 9,5	13377 W. Zones Sud Arg.
22.	»	»	+4,27	»	+ 9,5	Id.
23.	9	17.16.25,15	+4,22	115.27.24,5	+10,2	13297 W. Zones Sud Arg.
24.	»	»	+4,22	»	+10,2	Id.
25.	»	»	+4,21	»	+10,2	Id.
26.	9	16.38.28,04	+3,13	115. 1.13,1	+10,1	12795 W. Zones Sud Arg.
27.	7	17.57. 4,93	+3,70	93. 9.28,2	+ 5,3	15209 Munich.
28.	»	»	+3,71	»	+ 5,1	Id.
29.	»	»	+3,72	»	+ 5,0	Id.
30.	»	»	+3,73	»	+ 4,9	Id.
31.	»	»	+3,74	»	+ 4,8	Id.
32.	»	»	+3,76	»	+ 4,5	Id.
33.	9	15.47.20,78	+3,42	101.31.30,5	+15,8	861 W_1, XV^h.
34.	»	»	+3,43	»	+15,8	Id.
35.	6,5	14.43.40,14	+3,19	103.43. 9,9	+18,8	3830 Radcliffe.
36.	»	»	+3,21	»	+18,8	Id.
37.	»	»	+3,21	»	+18,8	Id.
38.	»	»	+3,22	»	+18,9	Id.
39.	7,6	14.34.53,94	+3,23	103.36.12,8	+19,1	3792 Radcliffe.
40.	»	»	+3,23	»	+19,1	Id.
41.	»	»	+3,24	»	+19,1	Id.
42.	10	14.29.22,00	+3,23	103.23.32,0	+19,3	10304 Munich.
43.	»	»	+3,23	»	+19,2	Id.
44.	8	14.28.32,20	+3,23	103. 1.36,6	+19,2	10287 Munich.
45.	»	»	+3,23	»	+19,2	Id.
46.	10	14.25.49,34	+3,22	103. 9. 1,2	+19,2	10248 Munich.
47.	»	»	+3,22	»	+19,2	Id.

Digitized by Google

Dates.	T. m. Marseille.	ΔR.	ΔP.	N. de c.	R app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
					(184) Deïopée.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JUILL. 27.	14. 8.13	—3.57,84	— 5.34,7	5.5	21.31.56,34	+$\bar{1}$,064	105.12.43,9	—0,873	60
28.	11.25.51	—1.20,47	— 6.35,5	5.5	21.31.18,99	—$\bar{1}$,267	105.15.35,1	—0,868	61
29.	11. 6.37	—2. 2,80	— 3.20,0	6.6	21.30.36,68	—$\bar{1}$,323	105.18.50,6	—0,865	62
30.	11.26. 7	+1.34,72	+ 0.22,0	6.6	21.29.53,29	—$\bar{1}$,225	105.22. 7,9	—0,870	63
31.	11.52.55	+0.50,12	+ 3.39,5	6.6	21.29. 8,71	—$\bar{1}$,040	105.25.25,3	—0,874	64
					(240) Vanadis.				
JUILL. 29.	12.44.40	+0.42,31	+ 1.24,8	9.9	22.26.59,89	—$\bar{1}$,125	101.27. 2,7	—0,854	65
30.	12. 8.31	—0.34,92	+ 3.24,2	5.5	22.26.29,01	—$\bar{1}$,278	101.31.13,2	—0,850	66
31.	12.32.53	—1. 9,64	+ 8. 2,3	6.6	22.25.54,31	—$\bar{1}$,141	101.35.51,2	—0,854	67
					(248) Lameia.				
JUILL. 23.	11.41.57	+1.18,31	+ 8. 2,5	7.7	20. 1.15,76	—$\bar{2}$,349	104.45.28,8	—0,874	68
24.	11.40.23	—0.57,89	+ 1.16,7	6.6	20. 0.18,29	—$\bar{2}$,200	104.47.18,8	—0,874	69
26.	11. 6.16	—0.28,41	— 2.49,7	7.7	19.58.25,94	—$\bar{2}$,800	104.51. 5,0	—0,874	70
27.	12.21. 5	—1.28,45	— 0.42,3	5.5	19.57.25,91	+$\bar{2}$,960	104.53.12,4	—0,873	71
28.	10.21.52	+0.59,41	— 6.23,9	6.6	19.56.34,90	—$\bar{1}$,110	104.54.59,4	—0,871	72
29.	9.58.23	+0. 5,17	— 4.28,6	6.6	19.55.40,67	—$\bar{1}$,213	104.56.54,8	—0,868	73
30.	10. 4.29	—0.50,09	— 2.23,9	5.5	19.54.45,41	—$\bar{1}$,157	104.58.59,6	—0,870	74
31.	10.22.28	—1.44,92	— 0.13,6	5.5	19.53.50,59	—$\bar{1}$,003	105. 1. 9,9	—0,873	75
					(379) 1894 AQ.				
JUILL. 19.	11.39.16	—0.49,03	+13.49,6	6.6	20.34. 0,62	—$\bar{1}$,084	106.43. 4,6	—0,879	76
21.	11.13.26	—2.20,00	+20. 7,3	5.5	20.32.29,69	—$\bar{1}$,185	106.49.22,2	—0,877	77
22.	10.34.22	+1.56,78	— 0.10,3	5.5	20.31.43,50	—$\bar{1}$,330	106.52.24,1	—0,871	78
23.	10.28.28	+1. 9,90	+ 2.59,3	6.6	20.30.56,63	—$\bar{1}$,334	106.55.33,7	—0,871	79
24.	11. 3.55	+0.21,28	+ 6.14,3	6.6	20.30. 8,03	—$\bar{1}$,158	106.58.48,6	—0,878	80
26.	13. 5.43	—1.18,43	+13. 3,4	4.4	20.28.28,34	—$\bar{1}$,045	107. 5.37,6	—0,881	81
27.	12.53.19	+0.54,77	+11.34,5	5.5	20.27.40,72	+$\bar{2}$,983	107. 8.51,2	—0,882	82
28.	10.56.58	+0.10,83	+14.32,4	7.7	20.26.56,79	—$\bar{1}$,084	107.11.49,1	—0,881	83
29.	10.12.16	—0.19,66	— 5.58,5	6.6	20.26. 9,19	—$\bar{1}$,293	107.14.51,1	—0,875	84
30.	10.28.49	—1. 8,41	— 2.39,3	5.5	20.25.20,45	—$\bar{1}$,194	107.18.10,3	—0,879	85
31.	11. 4.58	—1.57,82	+ 0.41,3	6.6	20.24.31,06	—$\bar{2}$,897	107.21.30,8	—0,884	86

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1897,0.	Réd. au j.	P moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	7,8	17.45.22,12	+4,15	113.38.55,1	+ 6,6	4648 Radcliffe.
2.	»	»	+4,16	»	+ 6,6	Id.
3.	»	»	+4,18	»	+ 6,6	Id.
4.	»	»	+4,19	»	+ 6,6	Id.

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1897,0.	Réd. au j.	℘ moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
5.	7,8	17.45.22,12	+4,21	113.38.55,1	+ 6,6	4648 Radcliffe.
6.	9	17.40.41,59	+4,22	114. 2.20,6	+ 7,1	13638 W. Zones Sud Arg.
7.	»	»	+4,23	»	+ 7,1	Id.
8.	9	17.40. 7,50	+4,24	114. 5.53,3	+ 7,2	13639 W. Zones Sud Arg.
9.	»	»	+4,26	»	+ 7,2	Id.
10.	8	17.29.15,33	+4,29	114.33.25,2	+ 8,4	4573 Radcliffe.
11.	»	»	+4,29	»	+ 8,4	Id.
12.	»	»	+4,29	»	+ 8,4	Id.
13.	8	»	+4,30	»	+ 8,4	Id.
14.	»	»	+4,31	»	+ 8,5	Id.
15.	9	17.26.43,38	+4,31	114.58.13,4	+ 8,9	13439 W. Zones Sud Arg.
16.	9,10	17.21.32,83	+4,29	115. 3. 9,6	+ 9,4	12171 Z. Cord. — 25° comp. à 13377 W. Zones Sud Arg.
17.	»	»	+4,30	»	+ 9,4	Id.
18.	»	»	+4,29	»	+ 9,5	Id.
19.	»	»	+4,28	»	+ 9,5	Id.
20.	»	»	+4,28	»	+ 9,5	Id.
21.	9	17.21.54,66	+4,28	115. 8.12,5	+ 9,5	13377 W. Zones Sud Arg.
22.	»	»	+4,27	»	+ 9,5	Id.
23.	9	17.16.25,15	+4,22	115.27.24,5	+10,2	13297 W. Zones Sud Arg.
24.	»	»	+4,22	»	+10,2	Id.
25.	»	»	+4,21	»	+10,2	Id.
26.	9	16.38.28,04	+3,13	115. 1.13,1	+10,1	12795 W. Zones Sud Arg.
27.	7	17.57. 4,93	+3,70	93. 9.28,2	+ 5,3	15209 Munich.
28.	»	»	+3,71	»	+ 5,1	Id.
29.	»	»	+3,72	»	+ 5,0	Id.
30.	»	»	+3,73	»	+ 4,9	Id.
31.	»	»	+3,74	»	+ 4,8	Id.
32.	»	»	+3,76	»	+ 4,5	Id.
33.	9	15.47.20,78	+3,42	101.31.30,5	+15,8	861 W_1, XV^h.
34.	»	»	+3,43	»	+15,8	Id.
35.	6,5	14.43.40,14	+3,19	103.43. 9,9	+18,8	3830 Radcliffe.
36.	»	»	+3,21	»	+18,8	Id.
37.	»	»	+3,21	»	+18,8	Id.
38.	»	»	+3,22	»	+18,9	Id.
39.	7,6	14.34.53,94	+3,23	103.36.12,8	+19,1	3792 Radcliffe.
40.	»	»	+3,23	»	+19,1	Id.
41.	»	»	+3,24	»	+19,1	Id.
42.	10	14.29.22,00	+3,23	103.23.32,0	+19,3	10304 Munich.
43.	»	»	+3,23	»	+19,2	Id.
44.	8	14.28.32,20	+3,23	103. 1.36,6	+19,2	10287 Munich.
45.	»	»	+3,23	»	+19,2	Id.
46.	10	14.25.49,34	+3,22	103. 9. 1,2	+19,2	10248 Munich.
47.	»	»	+3,22	»	+19,2	Id.

Digitized by Google

✱	Gr.	Æ moy. 1897,0.	Réd. au j.	℘ moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
48.	10	14.25.49,34	+3,22	103. 9. 1,2	+19,1	10248 Munich.
49.	9	20. 5.25,28	+3,76	87.35.34,8	— 6,5	23296 Munich.
50.	8	19.59.42,90	+3,86	87.50.57,3	— 7,3	22898 Munich.
51.	»	»	+3,88	»	— 7,6	Id.
52.	»	»	+3,90	»	— 7,9	Id.
53.	10	19.57.31,81	+3,90	87.42.45,4	— 7,9	22735 Munich.
54.	9	19.56.20,00	+3,92	87.46. 8,0	— 8,1	4065 Arg. Z + 2°.
55.	9	19.50.41,31	+3,95	88.13.52,0	— 8,0	1226 W_1, XIX^h.
56.	»	»	+3,96	»	— 8,3	Id.
57.	»	»	+3,96	»	— 8,4	Id.
58.	»	»	+3,97	»	— 8,5	Id.
59.	»	»	+3,97	»	— 8,7	Id.
60.	7	21.35.49,97	+4,21	105.18.36,0	—17,4	9728 Yarnall.
61.	7	21.32.35,22	+4,24	105.22.27,8	—17,2	9704 Yarnall.
62.	»	»	+4,26	»	—17,2	Id.
63.	9	21.28.14,29	+4,28	105.22. 2,8	—16,9	9251 Rumker.
64.	»	»	+4,30	»	—17,0	Id.
65.	5	22.26.13,59	+3,99	101.25.58,7	—20,8	10173 Yarnall.
66.	10	22.26.59,92	+4,01	101.28.10,0	—21,0	31134 Munich.
67.	»	»	+4,03	»	—21,1	Id.
68.	9	19.59.53,14	+4,31	104.37.34,5	— 8,2	1440 W_1, XIX^h.
69.	10	20. 1.11,86	+4,32	104.46.10,5	— 8,4	22996 Munich.
70.	8,9	19.58.50,01	+4,34	104.54. 2,9	— 8,2	1418 W_1, XIX^h.
71.	»	»	+4,35	»	— 8,2	Id.
72.	8	19.55.31,13	+4,36	105. 1.31,6	— 8,3	15852 W. Zones Sud Arg.
73.	»	»	+4,37	»	— 8,2	Id.
74.	»	»	+4,37	»	— 8,1	Id.
75.	»	»	+4,38	»	— 8,1	Id.
76.	6,7	20.34.45,38	+4,27	106.29.26,4	—11,4	5561 Radcliffe.
77.	»	»	+4,31	»	—11,5	Id.
78.	7,8	20.29.42,39	+4,33	106.52.45,5	—11,1	5535 Radcliffe.
79.	»	»	+4,34	»	—11,1	Id.
80.	»	»	+4,36	»	—11,2	Id.
81.	»	»	+4,38	»	—11,3	Id.
82.	7,8	20.26.41,55	+4,40	106.57.27,7	—11,0	5523 Radcliffe.
83.	»	»	+4,41	»	—11,0	Id.
84.	9	20.26.24,43	+4,42	107.21. 0,6	—11,0	16203 W. Zones Sud Arg.
85.	»	»	+4,43	»	—11,0	Id.
86.	»	»	+4,45	»	—11,1	Id.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE PLANÈTES ET DE LA COMÈTE BROOKS (1895 Nov. 21);

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE TOULOUSE (à l'équatorial Brunner de $0^m,25$ et au télescope Gautier),

PAR M. F. ROSSARD.

Dates.		T. m. Toulouse.	ΔR.	ΔD.	N. de c.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★
					(6) Hébé.					
1895.		h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
FÉVR.	13.	10.16.43	—1.51,79	+ 0.10,9	18:20	11.34.47,17	$\bar{1}$,558n	+12. 2.35,6	0,715	1
	18.	11. 2. 6	+0. 5,76	+ 9.20,4	18:20	11.31.21,22	$\bar{1}$,439n	+12.54.35,0	0,680	2
	19.	10. 6.56	+0.45,05	— 4. 9,8	18:20	11.30.38,00	$\bar{1}$,604n	+13. 4.36,3	0,727	3
MARS	4.	10.26.54	—2.35,98	— 5.58,8	18:20	11.19.55,74	$\bar{1}$,356n	+15.18.30,0	0,643	4
	15.	8.56.49	+1.12,76	+ 3.40,1	18:20	11.10.24,73	$\bar{1}$,461n	+16.58. 4,3	0,640	5
	16.	8.55.52	+0.22,06	+11.47,4	18:20	11. 9.34,03	$\bar{1}$,452n	+17. 6.11,7	0,637	5
	19.	10. 9.25	—1.45,79	— 0. 6,0	15:16	11. 7. 2,38	$\bar{1}$,124n	+17.29.47,9	0,597	6
	19.	10. 9.25	—0.32,56	+ 9.21,4	15:16	11. 7. 2,11	$\bar{1}$,124n	+17.29.49,8	0,597	7
					(8) Flora.					
MAI	28.	11.42. 9	—0. 5,63	— 2.47,6	18:20	16. 4.22,78	$\bar{3}$,760	—13.27.20,7	0,869	8
	29.	11. 7.54	+0.50,99	+ 3.15,5	18:20	16. 3.19,26	$\bar{2}$,713n	—13.26. 4,2	0,868	9
	31.	10. 1.10	—0.38,44	—10.40,8	6:8	16. 1.11,53	$\bar{1}$,199n	—13.24. 4,7	0,862	10
					(10) Hygiea.					
JUILL.	29.	13.37.31	+0.14,05	— 9.48,2	12:20	21.47.11,58	$\bar{2}$,578	—10. 4. 9,2	0,851	11
AOUT	1.	11.39.33	—0.19,97	—14.37,5	18:20	21.45. 6,48	$\bar{1}$,197n	—10.11.13,1	0,846	12
	10.	11. 6. 1	—0.57,78	+ 5.43,8	15:16	21.38.20,95	$\bar{1}$,516n	—10.35.44,3	0,829	13
	13.	9. 7. 5	+0.59,38	— 3.53,5	18:20	21.35.59,48	$\bar{1}$,488n	—10.44.44,3	0,833	14
	15.	9.31. 6	+0.31,13	+11.53,9	10:12	21.34.24,51	$\bar{1}$,415n	—10.50.48,5	0,841	15
	16.	8.57.43	+1. 5,40	+ 0.33,2	18:20	21.33.38,66	$\bar{1}$,481n	—10.53.53,0	0,835	16
	17.	8.46. 4	—1. 1,15	+ 5.51,0	18:20	21.32.52,25	$\bar{1}$,494n	—10.56.51,3	0,834	15
	19.	8.39.25	—1.14,21	— 8.39,4	18:20	21.31.19,07	$\bar{1}$,489n	—11. 3. 5,5	0,834	16
	20.	8.37.37	+1.46,42	+16.51,0	18:20	21.30.33,43	$\bar{1}$,484n	—11. 6.13,9	0,835	17
	21.	8.36.15	+1. 0,58	+13.45,7	18:20	21.29.47,59	$\bar{1}$,478n	—11. 9.19,2	0,837	17
	22.	8.26.30	+0.15,50	+10.42,1	12:20	21.29. 2,52	$\bar{1}$,488n	—11.12.22,7	0,834	17
					(11) Parthénope.					
JANV.	18.	10.19.58	—1.14,74	—19.42,4	15:16	7.40.26,32	$\bar{1}$,232n	+20.10.21,6	0,562	18
	21.	9.11.27	—0.40,65	— 4.42,6	18:20	7.37.24,96	$\bar{1}$,423n	+20.22.39,1	0,583	19
	26.	9.34.53	+0.55,40	+ 9.42,5	18:20	7.32.27,59	$\bar{1}$,262n	+20.42.42,3	0,536	20

Digitized by Google

Dates.		T. m. Toulouse.	ΔR.	ΔD.	N. dec.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★
						(12) Victoria.				
1895.		h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Janv.	26.	11.12.48	+1.10,99	+ 4.40,5	18:20	8.52.19,33	$\bar{1}$,145 *n*	+ 4.42.58,9	0,744	21
						(13) Egeria.				
Sept.	12.	10.54.58	—0.49,74	— 9. 1,5	18:20	23.22.57,80	$\bar{1}$,106 *n*	—28.19.10,2	0,918	22
	13.	11. 6.16	—1.53,25	—10.28,1	18:20	23.21.54,29	$\bar{2}$,977 *n*	—28.20.36,9	0,921	22
	14.	12.25.11	+1.39,77	— 4. 8,3	12:12	23.20.50,81	$\bar{2}$,915	—28.21.13,0	0,921	23
	16.	11.13. 8	—0.24,89	— 5.42,2	18:20	23.18.46,17	$\bar{2}$,703 *n*	—28.22.47,1	0,922	23
	17.	11. 5. 5	—1.26,39	— 6. 7,1	3:4	23.17.44,67	$\bar{2}$,756 *n*	—28.23.12,1	0,922	23
						(17) Thétis.				
Avril	29.	11. 4.49	—0.38,98	— 5.27,7	18:20	14.13. 6,3	$\bar{2}$,849 *n*	— 2.36.33	0,803	24
	30.	10.52.27	+0.52,86	— 7.37,9	18:20	14.12.13,62	$\bar{2}$,931 *n*	— 2.32. 4,9	0,802	25
Mai	1.	10.49.38	+0.15,03	+14.46,3	13:20	14.11.21,05	$\bar{2}$,902 *n*	— 2.27.58,5	0,802	26
	3.	12.12. 4	—1.47,10	+ 4.26,7	18:20	14. 9.33,68	$\bar{2}$,958	— 2.20. 0,1	0,800	25
						(20) Massalia.				
Févr.	13.	9.33. 4	—0.56,19	— 3.29,0	18:20	10.38.56,31	$\bar{1}$,536 *n*	+ 7.27.19,9	0,742	27
	18.	9.55.30	+0.55,94	+ 1. 6,0	18:20	10.34.23,91	$\bar{1}$,455 *n*	+ 7.55.14,6	0,728	28
	19.	9.25.38	—0.31,41	+ 2.27,9	18:20	10.33.29,81	$\bar{1}$,501 *n*	+ 8. 0.52,3	0,733	29
						(22) Kalliope.				
Juin	15.	12.37.37	—1.25,66	+ 2.19,5	18:20	18. 6.44,0	2,327	—31.22.23	0,931	30
	20.	11.47.29	+1. 2,25	+ 0.19,2	18:20	18. 1.51,9	$\bar{2}$,625 *n*	—31.40.13	0,931	31
	21.	10.27.46	+0.50,21	+ 2.20,7	6:4	18. 0.56,0	$\bar{1}$,301 *n*	—31.43. 7	0,918	32
	21.	12.42. 7	+0.44,41	+ 2. 2,8	15:16	18. 0.50,2	$\bar{2}$,951	—31.43.25	0,929	32
	22.	11.11.59	—0.11,32	— 1. 0,9	18:20	17.59.54,4	$\bar{2}$,984 *n*	—31.46.28	0,929	32
	24.	10.58.15	—1.13,79	+ 2.28,0	18:20	17.57.56,1	$\bar{1}$,010 *n*	—31.53.13	0,928	33
	24.	10.58.15	—1.17,87	+ 2. 6,0	18:20	17.57.56,2	$\bar{1}$,010 *n*	—31.53. 5	0,928	34
	25.	11.26.20	+0.27,48	— 3.15,3	18:20	17.56.55,4	$\bar{2}$,518 *n*	—31.56.43	0,932	35
	26.	10.46.54	—0.30,52	— 6. 3,5	18:20	17.55.57,4	$\bar{1}$,043 *n*	—31.59.32	0,928	35
	27.	11.49. 7	—1.32,03	— 8.59,3	6:4	17.54.55,9	$\bar{2}$,593	—32. 2.27	0,931	35
						(24) Thémis.				
Oct.	14.	9.33.36	+0. 3,96	+10.15,5	18:20	1.45.25,62	$\bar{1}$,444 *n*	+10.42. 6,2	0,704	36
	17.	11.51.20	+1.24,28	+ 9.41,5	18:20	1.43. 3,22	$\bar{3}$,978 *n*	+10.29.18,2	0,681	37
	18.	11.14.16	+0.39,03	+ 5.35,5	18:20	1.42.17,98	$\bar{2}$,879 *n*	+10.25.12,3	0,690	37
	19.	11.29.11	—0. 7,93	+ 1.22,6	18:20	1.41.31,03	$\bar{2}$,579 *n*	+10.20.59,4	0,684	37
Nov.	13.	9.41.32	+0.57,19	+ 2. 5,6	18:20	1.23.50,6	2,330 *n*	+ 8.43.40	0,566	38

Digitized by Google

Dates.	T. m. Toulouse.	ΔÆ.	ΔⒹ.	N. de c.	Æ app.	log f. p.	Ⓓ app.	log f. p.	★
				(29) Amphitrite.					
1895.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Avril 20.	11.51.54	—1.10,72	+ 7.52,3	18:20	13.54. 2,27	$\bar{2}$,112 *n*	—17.28.32,4	0,887	39
				(70) Panopæa.					
Mai 28.	12.41.35	+0.27,90	— 9.58,4	18:20	16.23.47,3	$\bar{2}$,959	—28.59.52	0,921	40
29.	11.54.47	+1.43,14	— 0.52,4	18:20	16.22.41,80	$\bar{3}$,330	—29. 4. 9,9	0,926	41
				(49) Pales.					
Sept. 10.	10.19.32	+0. 6,88	+ 2.12,9	18:20	22.47.25,56	$\bar{1}$,104 *n*	— 3. 8.27,5	0,806	42
12.	8.51.35	+1.21,60	+ 5.55,5	18:20	22.45.56,67	$\bar{1}$,412 *n*	— 3.16.14,8	0,802	43
13.	8.38.34	+0.36,72	+ 1.55,5	18:20	22.45.11,79	$\bar{1}$,433 *n*	— 3.20.14,8	0,802	43
14.	8.49.56	—0. 8,87	— 2.10,5	18:20	22.44.26,20	$\bar{1}$,391 *n*	— 3.24.20,7	0,804	43
14.	8.49.56	+2. 3,07	— 1.55,5	18:20	22.44.26,09	$\bar{1}$,391 *n*	— 3.24.23,8	0,804	44
16.	8.50.50	+0.34,71	—10. 0,9	18:20	22.42.57,73	$\bar{1}$,363 *n*	— 3.32.29,1	0,805	44
17.	8.48.34	—0. 8,52	—14. 1,7	18:20	22.42.14,51	$\bar{1}$,357 *n*	— 3.36.29,9	0,805	44
18.	9. 6.29	—0.51,83	—18. 2,1	18:20	22.41.31,20	$\bar{2}$,448	— 3.40.30,3	0,810	44
23.	9.37.54	+0.33,50	— 1.29,7	18:20	22.38.10,55	$\bar{2}$,968 *n*	— 3.59.52,1	0,810	45
23.	9.37.54	+1.26,14	+ 1.11,0	18:20	22.38.10,30	$\bar{2}$,926 *n*	— 3.59.50,2	0,810	46
23.	9.42.30	+0.41,79	— 9.55,1	18:20	22.38.10,20	$\bar{2}$,932 *n*	— 3.59.38,7	0,813	47
24.	9.49. 8	+0.48,48	— 2.33,2	18:20	22.37.32,64	$\bar{2}$,815 *n*	— 4. 3.34,4	0,813	46
				(65) Cybèle.					
Sept. 12.	10. 1.16	+0. 3,70	+ 9.59,7	18:20	0.18. 6,80	$\bar{1}$,465 *n*	+ 0. 2.36,0	0,783	48
13.	9.25.14	—0.32,75	+ 5. 9,7	18:20	0.17.30,36	$\bar{2}$,684 *n*	— 0. 2.14,0	0,783	48
14.	9.29.55	—1.10,90	+ 0. 8,2	18:20	0.16.52,22	$\bar{1}$,504 *n*	— 0. 7.15,4	0,784	48
16.	9.38.33	+2. 2,28	+12.58,9	18:20	0.15.35,31	$\bar{1}$,471 *n*	— 0.17.18,4	0,784	49
17.	9.51.36	—1.36,24	+12.18,7	18:20	0.14.55,98	$\bar{1}$,432 *n*	— 0.22.29,6	0,785	50
17.	9.51.36	+1.22,98	+ 7.50,1	18:20	0.14.56,02	$\bar{1}$,432 *n*	— 0.22.27,2	0,785	49
18.	9.50.34	+0.43,92	+ 2.45,2	18:20	0.14.16,97	$\bar{1}$,425 *n*	— 0.27.32,0	0,786	49
24.	11.12. 1	+0.44,74	— 5.43,0	18:20	0.10.15,73	$\bar{2}$,911 *n*	— 0.58.28,6	0,791	51
				(67) Asia.					
Juin 12.	10. 2 5	—1.12,23	—11.37,7	18:20	16.30.19,34	$\bar{1}$,089 *n*	—12.45.23,5	0,863	52
14.	10.32.54	+1.11,55	— 3.26,2	18:20	16.28.34,88	$\bar{2}$,658 *n*	—12.38.10,4	0,864	53
15.	9.49.25	+0. 3,48	—17.26,7	18:20	16.27.46,39	$\bar{1}$,076 *n*	—12.37.57,8	0,863	54
16.	11. 7.52	—0.28,59	+ 3.10,0	12:20	16.26.54,75	$\bar{2}$,602	—12.31.34,2	0,864	53

Digitized by Google

Dates.		T. m. Toulouse.	ΔR.	ΔD.	N. de c.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★
					(80) Sapho.					
1895.		h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Avril	20.	10.55.20	+0.41,32	— 6.24,9	18:20	13.33.54,1	$\bar{2}$,960 *n*	—12.35.24	0,867	55
	29.	10.19.19	—1. 3,23	+ 9.55,1	18:20	13.25.50,8	$\bar{2}$,834 *n*	—11.18.55	0,857	56
	30.	9.45.11	+0.34,19	—12.33,1	18:20	13.24.57,97	$\bar{1}$,086 *n*	—11.10. 1,1	0,854	57
Mai	1.	9.53.34	—0.16,45	— 4. 6,8	18:20	13.24. 7,33	$\bar{2}$,999 *n*	—11. 1.34,8	0,854	57
	3.	10. 7.34	—0.18,33	—14.34,5	18:20	13.22.29,84	$\bar{2}$,738 *n*	—10.44.59,7	0,854	58
					(82) Alkmène.					
Aout	21.	10.48.11	+1.18,89	+22.30,6	18:20	21.59.25,64	$\bar{1}$,133 *n*	—16. 2.23,5	0,876	59
	22.	10.36.42	+2.41,87	+ 0.19,5	18:20	21.58.35,42	$\bar{1}$,171 *n*	—16. 6.24,6	0,875	60
					(86) Semele.					
Mars	15.	9.53.58	+1.46,06	+ 3.58,9	18:20	11.44.19,57	$\bar{1}$,388 *n*	+ 8.53.32,4	0,715	61
	16.	9.49.41	+1. 2,02	+ 8.38,9	17:20	11.43.35,54	$\bar{1}$,387 *n*	+ 8.58.12,4	0,715	61
	18.	9.31.15	—0.26,15	+17.52,2	14:20	11.42. 7,38	$\bar{1}$,408 *n*	+ 9. 7.25,7	0,715	61
					(92) Undina.					
Juin	14.	13.36.29	—1.44,14	— 2.45,6	18:20	18.12.57,94	$\bar{1}$,041	—20. 1.26,9	0,882	63
	14.	13.36.29	—1.21,29	— 8. 5,8	18:20	18.12.57,64	$\bar{1}$,041	—20. 1.24,1	0,882	62
	15.	11.37.59	—2. 8,65	+11.30,4	18:20	18.12.13,31	$\bar{1}$,064 *n*	—20. 4.13,5	0,894	64
	20.	13.28.56	—1. 0,90	+ 5.39,3	18:20	18. 8. 0,55	$\bar{1}$,176	—20.19.36,4	0,891	65
	21.	11.20. 4	+1.29,34	+ 4.28,3	9:8	18. 7.14,73	$\bar{2}$,977 *n*	—20.22.24,1	0,896	66
	21.	13.25. 5	+1.24,92	+ 4.11,6	18:20	18. 7.10,31	$\bar{1}$,183	—20.22.40,8	0,891	66
	22.	12. 6. 5	+0.36,73	+ 1.14,5	18:20	18. 6.22,13	$\bar{3}$,755	—20.25.37,9	0,899	66
	24.	12.11. 9	—0.57,27	— 8.10,5	18:20	18. 4.40,91	$\bar{2}$,551	—20.31.52,1	0,899	67
	25.	12.37.48	—0.11,25	— 6. 7,9	18:20	18. 3.49,6	$\bar{2}$,977	—20.35.24	0,898	68
	26.	12.12.20	+0.13,41	+ 0.29,2	22:20	18. 2.59,43	$\bar{2}$,789	—20.38.10,3	0,898	69
	27.	11.18.17	—0.35,34	— 2.32,6	18:20	18. 2.10,68	$\bar{2}$,620 *n*	—20.41.12,0	0,900	69
	28.	10.42. 5	—1.17,67	+11.46,6	18:20	18. 1.21,55	$\bar{1}$,012 *n*	—20.44.16,9	0,898	70
					(100) Hékate.					
Juill.	15.	13.45.21	+0. 5,73	— 3. 4,2	18:20	19.27.37,40	$\bar{1}$,326	—18.53.23,2	0,880	71
	16.	9.55.12	—0.34,48	— 6.50,8	18:20	19.26.57,20	$\bar{1}$,330 *n*	—18.57.10,8	0,880	71
	16.	9.55.12	+1. 3,50	— 4.31,9	18:20	19.26.57,13	$\bar{1}$,330 *n*	—18.57. 6,5	0,880	72
	18.	9.43.10	—0.31,71	—13.28,2	18:20	19.25.21,94	$\bar{1}$,344 *n*	—19. 6. 2,8	0,879	72
	19.	9.38. 8	+1.12,42	— 6.18,8	18:20	19.24.34,7	$\bar{1}$,344 *n*	—19.10.38	0,879	73
	20.	11.13.13	+0.22,08	—11. 8,4	18:20	19.23.44,4	$\bar{2}$,523 *n*	—19.15.28	0,895	73
	22.	10.26.20	+0.47,27	+ 0.41,5	18:20	19.22.12,4	$\bar{1}$,033 *n*	—19.24. 8	0,893	74
	23.	9.50.11	—0.29,62	+ 4.42,8	12:20	19.21.28,68	$\bar{1}$,220 *n*	—19.28.34,5	0,887	75
	24.	10.26. 8	—0.43,55	— 8.14,9	18:20	19.20.41,6	$\bar{2}$,956 *n*	—19.33. 4	0,893	74

Digitized by Google

Dates.		T. m. Toulouse.	ΔR.	ΔD.	N. de c.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★
					(104) Klyméne.					
1895.		h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Juin	25.	13.30.18	—0.56,32	—10. 4,8	18:20	19.27.54,21	$\bar{2}$,591	—25.31. 2,3	0,916	76
	26.	13.12. 3	+0.41,81	— 1.52,2	17:20	19.27. 8,65	$\bar{3}$,015	—25.33.27,4	0,916	77
	26.	13.12. 3	+0.20,36	+ 7. 8,1	17:20	19.27. 8,80	$\bar{3}$,015	—25.33.29,1	0,916	78
	27.	13.12.10	—0.25,78	+ 4.56,1	9:12	19.26.22,68	$\bar{2}$,255	—25.35.41,1	0,916	78
	27.	13.12.10	—0.22,93	+ 6.28,7	9:12	19.26.22,0	$\bar{2}$,255	—25.35.51	0,916	79
Juill.	16.	10.47.21	—0.43,13	— 4. 3,4	12:16	19.10.45,56	$\bar{2}$,967 *n*	—26.10.54,8	0,915	80
	23.	12.17. 8	—1.48,33	—14.53,1	11:12	19. 5. 1,38	$\bar{1}$,203	—26.19.53,6	0,909	81
					(106) Dione.					
Juin	15.	10.44.33	—0.58,95	— 0.59,4	18:20	17.45.53,54	$\bar{1}$,237 *n*	—25.59.43,8	0,908	82
	15.	10.44.33	—0.36,08	+ 1.48,7	18:20	17.45.54,0	$\bar{1}$,237 *n*	—25.59.57	0,908	83
	16.	11.59.10	—0.29,08	—15.49,7	17:20	17.44.59,01	$\bar{3}$,076 *n*	—26. 0.34,4	0,917	84
	20.	10.53.14	+1.36,05	+ 6.28,4	18:20	17.41.33,0	$\bar{1}$,037 *n*	—26. 3.18	0,914	85
	21.	11.58.23	+0.41,62	+ 5.54,0	12:16	17.40.38,6	$\bar{2}$,568	—26. 3.52	0,917	85
	22.	10.10.20	—0. 6,28	+ 5.24,9	18:20	17.39.50,7	$\bar{1}$,242 *n*	—26. 4.21	0,907	85
	24.	9.42.38	+0.40,49	+10.27,7	18:20	17.38. 8,96	$\bar{1}$,324 *n*	—26. 5. 3,7	0,902	86
	25.	9.44.36	—0.10,95	+10. 3,6	18:20	17.37.17,53	$\bar{2}$,895 *n*	—26. 5.27,8	0,904	86
	26.	9.39.31	—1. 1,38	+ 9.39,9	18:20	17.36.27,11	$\bar{2}$,895 *n*	—26. 5.51,5	0,904	86
	27.	9.43.24	—1.52,29	+ 9.18,3	18:20	17.35.36,21	$\bar{2}$,779 *n*	—26. 6.13,1	0,907	86
	28.	11.39.11	—0.54,26	+ 0.17,1	18:20	17.34.39,0	$\bar{2}$,822	—26. 6.36	0,918	87
					(113) Amalthéa.					
Déc.	16.	10.49.16	+0.30,52	— 9.50,5	15:20	5.29.21,3	$\bar{1}$,059 *n*	+17.53.32	0,586	88
	17.	11.41. 0	—0.38,31	— 8.53,3	18:20	5.28.12,5	$\bar{3}$,094 *n*	+17.54.29	0,579	88
	21.	10.46.12	+0.42,15	+ 9.30,3	18:20	5.23.50,1	$\bar{2}$,882 *n*	+17.58.37	0,581	89
					(130) Électra.					
Févr.	13.	8.58.33	+1. 4,07	+11.42,3	18:20	10. 3.57,98	$\bar{1}$,542 *n*	+12.48.51,8	0,704	90
	18.	10.33.44	—1.46,99	+ 2.47,7	18:20	10. 0.13,72	$\bar{1}$,235 *n*	+13.34.49,2	0,654	91
	19.	11. 0.40	—2.32,40	+11.55,8	18:20	9.59.28,31	$\bar{1}$,057 *n*	+13.43.57,3	0,646	91
					(139) Juewa.					
Mars	15.	11. 0.43	—1.43,60	+ 2.50,5	18:20	12.20.43,12	$\bar{1}$,285 *n*	— 1.45.11,9	0,795	92
	16.	10.44.43	—0.23,99	—11.43,2	18:20	12.19.44,72	$\bar{1}$,324 *n*	— 1.45.32,4	0,795	93
	18.	10.41.44	—1.59,46	—10.36,4	18:20	12.17.48,79	$\bar{1}$,300 *n*	— 1.45.58,3	0,795	94
	19.	12.53.21	+1. 5,72	+ 4.38,9	18:20	12.16.43,8	$\bar{1}$,196	— 1.46. 2	0,795	95
					(142) Polana.					
Aout	13.	9.53.48	+1.41,73	+ 4.35,5	18:20	21.34.21,52	$\bar{1}$,378 *n*	—12.26. 8,9	0,851	96
	15.	10. 3. 9	—0.15,76	— 3.17,8	12:20	21.32.24,05	$\bar{1}$,315 *n*	—12.34. 2,1	0,855	96
	16.	9.32.11	—1.12,35	— 7. 5,2	12:12	21.31.27,47	$\bar{1}$,398 *n*	—12.37.49,4	0,849	96

Digitized by Google

Dates.		T. m. Toulouse.	ΔR.	ΔD.	N. de c.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★
					(153) Hilda.					
1895.		h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Mars	18.	12.48.48	—1.22,42	+ 1.31,2	18:20	11.32.59,86	$\bar{1}$,060	— 6. 0. 4,8	0,825	97
	19.	11.41.19	—1.56,78	+ 6. 7,1	18:16	11.32.25,50	$\bar{3}$,273 *n*	— 5.55.29,0	0,827	97
					(161) Athor.					
Aout	13.	12.32.27	—1. 7,11	+ 5.30,7	18:20	21.49.41,20	$\bar{2}$,400	—29.13. 9,3	0,926	98
	15.	11.25.44	—0. 7,25	— 5.44,2	18:20	21.47.32,92	$\bar{2}$,981 *n*	—29.14.46,1	0,923	99
	16.	11.25.16	—0.27,41	— 0.12,3	18:20	21.46.28,36	$\bar{2}$,939 *n*	—29.15.29,3	0,924	100
	19.	10.42.18	—0.48,07	—14. 3,2	18:20	21.43.15,26	$\bar{1}$,162 *n*	—29.15.16,9	0,926	101
	20.	10.48. 2	+0.56,11	+ 2.57,7	15:16	21.42.11,2	$\bar{1}$,089 *n*	—29.14.26	0,922	102
	20.	10.48. 2	+2.40,52	— 2.46,6	15:16	21.42.10,58	$\bar{1}$,089 *n*	—29.14.54,5	0,922	103
	21.	11.33.47	—0. 9,58	+ 3.45,7	18:20	21.41. 5,5	$\bar{2}$,213 *n*	—29.13.38	0,926	102
	21.	11.33.47	+1.34,83	— 1.59,7	18:20	21.41. 4,89	$\bar{2}$,213 *n*	—29.14. 7,6	0,926	103
	22.	11.19.29	+0.32,51	— 0.58,0	12:20	21.40. 2,58	$\bar{2}$,255 *n*	—29.13. 6,0	0,925	103
					(162) Laurentia.					
Déc.	21.	9.49.22	—0.39,56	— 7. 3,5	18:20	5.52. 2,45	$\bar{1}$,403 *n*	+30.56.42,4	0,386	104
					(168) Sibylla.					
Oct.	14.	10.23.34	+0.12,58	+ 2.20,8	12:20	2.33.30,45	$\bar{1}$,446 *n*	+14.27.11,0	0,665	105
	17.	12.39.28	—1.49,06	—11.43,9	18:20	2.31.28,86	$\bar{3}$,705 *n*	+14.13. 6,5	0,634	105
	18.	12. 4.40	+1.25,10	+ 2.43,2	18:20	2.30.49,18	$\bar{2}$,850 *n*	+14. 8.33,9	0,637	106
	19.	12.28.15	—0.57,87	+ 6. 7,4	18:20	2.30. 8,08	$\bar{2}$,224 *n*	+14. 3.48,4	0,636	107
	19.	12.28.15	+0.43,54	— 2. 3,4	18:20	2.30. 7,63	$\bar{2}$,224 *n*	+14. 3.47,4	0,636	106
Nov.	13.	10.54.52	+1.35,25	+ 7.45,2	14:16	2.12.25,74	$\bar{2}$,351 *n*	+12. 2.13,1	0,663	108
	16.	10.21. 2	—0.17,95	— 5.27,5	10:20	2.10.32,55	$\bar{3}$,702 *n*	+11.49. 0,4	0,665	108
					(173) Ino.					
Juill.	29.	12.43.27	—1.48,87	— 4.46,5	18:20	20.36.50,74	$\bar{2}$,842	— 9.30.19,6	0,848	109
Aout	1.	9.29.41	—0.56,21	+ 3.19,7	3:4	20.34.32,64	$\bar{1}$,407 *n*	— 9.57.27,3	0,838	110
	1.	9.29.41	—0.52,73	— 3.56,8	3:4	20.34.32,96	$\bar{1}$,407 *n*	— 9.57.29,8	0,838	111
	1.	10.51.27	—0.55,75	— 4.25,0	15:16	20.34.29,93	$\bar{1}$,065 *n*	— 9.57.58,0	0,849	111
	1.	10.51.27	—0.59,18	+ 2.50,3	15:16	20.34.29,67	$\bar{1}$,065 *n*	— 9.57.56,7	0,849	110
					(177) Irma.					
Aout	13.	11.50. 7	—0.48,17	+ 2.12,1	18:20	21.32.30,50	$\bar{2}$,459 *n*	—15.52.46,2	0,881	112
	15.	10.47.14	+0.36,10	+ 9.40,9	18:20	21.30.45,95	$\bar{1}$,108 *n*	—15.59.56,8	0,878	113
	16.	10.35.48	—0.16,98	+ 6. 8,4	18:20	21.29.52,88	$\bar{1}$,150 *n*	—16. 3.29,2	0,876	113
	19.	10. 2.30	+0.33,02	— 3.39,4	18:20	21.27.14,22	$\bar{1}$,245 *n*	—16.13.52,6	0,873	114

Digitized by Google

Dates.		T. m. Toulouse.	ΔR.	Δ(D).	N. de c.	R app.	log. f. p.	(D) app.	log f. p.	*
					(177) Irma.					
1895.		h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Aout	20.	10. 1.32	—0.19,78	— 7. 4,4	18:20	21.26.21,42	$\bar{1}$,226 *n*	—16.17.17,6	0,873	114
	21.	10. 1.21	—1.11,93	—10.25,8	18:20	21.25.29,27	$\bar{1}$,204 *n*	—16.20.39,0	0,877	114
	22.	9.48.35	+1.24,26	+ 8.38,5	18:20	21.24.37,98	1,241 *n*	—16.23.50,3	0,875	115
					(182) Elsa.					
Sept.	13.	10.16.26	—3.16,83	+ 8.23,7	18:20	0. 2.58,13	$\bar{1}$,380 *n*	— 3.30.53,8	0,805	116
	14.	11. 1.25	+0.14,36	—19.51,6	8:12	0. 2. 7,58	$\bar{1}$,198 *n*	— 3.37.24,1	0,807	117
	16.	10.24.59	+2. 1,24	+ 8.42,4	18:20	0. 0.27,54	1,307 *n*	— 3.50.57,0	0,808	118
	17.	10.41. 4	+1. 9,11	+ 3.13,8	18:20	23.59.35,42	$\bar{1}$,223 *n*	— 3.56.25,6	0,811	118
	18.	10.34. 0	+0.17,09	— 3. 8,7	12:20	23.58.43,40	$\bar{1}$,232 *n*	— 4. 2.48,0	0,811	118
					(209) Didon.					
Aout	16.	12.21.44	+0.56,26	— 4.17,5	18:20	22.23.58,44	$\bar{2}$,647 *n*	—16.16. 7,3	0,882	119
	19.	11.27.16	—1.30,00	+18.14,4	18:20	22.21.36,20	$\bar{1}$,075 *n*	—16.24.30,3	0,879	120
	19.	11.27.16	—1.41,69	+16.23,0	18:20	22.21.36,28	$\bar{1}$,075 *n*	—16.24.32,7	0,879	121
	20.	11.35.45	+2.49,63	+ 2. 8,2	18:20	22.20.47,26	$\bar{2}$,976 *n*	—16.27.19,4	0,880	122
	21.	12.20.13	+1.58,67	— 0.43,1	18:20	22.19.56,31	$\bar{3}$,289	—16.30.10,6	0,883	122
					(225) Henriette.					
Avril	30.	12.48.30	—1.12,34	— 2.16,7	18:20	15.48.15,2	2,669 *n*	— 3.40.19	0,812	123
Mai	1.	13. 1.29	—0.55,74	+ 9.54,5	18:20	15.47.39,2	$\bar{2}$,692 *n*	— 3.30.11	0,812	124
	11.	11.25.11	—1.53,58	+ 0.22,9	18:20	15.41.12,66	$\bar{1}$,031 *n*	— 1.50.44,9	0,797	125
	13.	12.37. 2	+1.36,92	+ 4.31,0	18:20	15.39.46,94	$\bar{2}$,651	— 1.31.20,9	0,795	126
	13.	12.37. 2	—0.55,92	— 2.36,3	18:20	15.39.46,47	$\bar{2}$,651	— 1.31.20,5	0,795	127
	28.	10.23.57	—1.21,17	+ 5. 3,4	18:20	15.29.18,84	$\bar{2}$,881 *n*	+ 0.29.47,4	0,779	128
	29.	10.19.46	—1.27,61	— 3. 7,1	18:20	15.28.40,25	$\bar{2}$,871 *n*	+ 0.36.27,0	0,778	129
					(241) Germania.					
Oct.	14.	11.17.14	+1. 2,94	—22.54,5	18:20	2.29.47,58	$\bar{1}$,290 *n*	+22. 7.57,7	0,535	130
	17.	10.55.13	+1. 3,63	+ 4.27,2	18:20	2.27.33,28	$\bar{1}$,322 *n*	+21.57. 2,3	0,543	131
	18.	10.24.42	+0.18,08	+ 0.35,8	18:20	2.26.47,74	$\bar{1}$,406 *n*	+21.53.11,0	0,560	131
	19.	10.34.34	—0.29,14	— 3.28,4	18:20	2.26. 0,53	$\bar{1}$,359 *n*	+21.49. 6,9	0,568	131
					(288) Glauke.					
Avril	30.	11.41.30	+0. 5,31	— 7.54,1	18:20	14.49. 0,18	$\bar{2}$,792 *n*	— 8. 5.47,3	0,839	132
Mai	1.	12. 7.49	—0.44,69	— 4.29,0	18:20	14.48.10,19	$\bar{3}$,572 *n*	— 8. 2.22,2	0,839	132
	1.	12. 8.42	+0.52,49	—10.53,0	18:20	14.48.10,13	$\bar{3}$,275 *n*	— 8. 2.20,2	0,839	133
	3.	13.17. 5	—0.48,64	— 4.21,5	18:20	14.46.29,02	$\bar{1}$,154	— 7.55.48,7	0,835	133
	11.	10.36.11	—0.31,42	—13.29,6	18:20	14.40. 9,76	$\bar{2}$,940 *n*	— 7.35. 1,6	0,835	134
	13.	11.32.10	—0. 5,81	+17.51,0	18:20	14.38.36,59	$\bar{2}$,576	— 7.30.57,3	0,838	135

Digitized by Google

Dates	T. m. Toulouse.	ΔR.	Δ(☉).	N. de c.	R app.	log. f. p.	(☉) app.	log. f. p.	★
					(306) Unitas.				
1895.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Mars 23.	11.44. 4	+0.51,26	+ 5.25,0	18:20	13.50.12,02	$\bar{1}$,336 *n*	— 0.54. 2,1	0,789	136
Avril 20.	9.57.10	—0.18,75	+ 3.55,1	18:20	13.27. 8,73	$\bar{1}$,237 *n*	+ 2.41.49,0	0,762	137
30.	8.53. 6	—2.12,14	+ 9.42,7	18:20	13.18.38,53	$\bar{1}$,300 *n*	+ 3.36. 6,6	0,755	138
Mai 1.	9. 9. 3	—1. 7,28	+ 7.42,4	18:20	13.17.50,91	$\bar{1}$,215 *n*	+ 3.40.30,2	0,754	139
3.	9.7. 25	+1.23,44	— 1.46,1	18:20	13.16.20,63	$\bar{1}$,181 *n*	+ 3.48.19,6	0,752	140
					(313) Chaldaea.				
Sept. 13.	12.20.32	+1.53,54	— 1.25,9	18:20	1.40. 7,07	1,294 *n*	+ 5.11.58,3	0,742	141
14.	11.53.26	+1.30,12	— 9.40,6	12:12	1.39.43,67	$\bar{1}$,370 *n*	+ 5. 3.43,7	0,745	141
16.	12.28.38	+2.49,07	—11.34,9	18:20	1.38.50,73	$\bar{1}$,201 *n*	+ 4.46.13,5	0,744	142
16.	12.28.38	+1. 3,87	— 1.57,7	18:20	1.38.50,94	$\bar{1}$,201 *n*	+ 4.46.10,7	0,744	143
17.	11.56.44	—0.11,74	+ 9. 2,2	13:20	1.38.23,22	$\bar{1}$,314 *n*	+ 4.37.31,2	0,746	144
17.	11.56.44	+0.40,88	— 3.50,6	13:20	1.38.23,26	$\bar{1}$,314 *n*	+ 4.37.32,6	0,746	145
18.	12. 5.24	—0.41,90	— 0. 6,2	18:20	1.37.53,08	$\bar{1}$,266 *n*	+ 4.28.22,9	0,748	144
24.	12. 2. 2	+1.20,03	+ 0.18,9	18:20	1.33.59,96	$\bar{1}$,155 *n*	+ 3.33.49,9	0,754	146
24.	12. 2. 2	+0.25,54	— 1.58,3	18:20	1.33.59,98	$\bar{1}$,155 *n*	+ 3.33.50,4	0,754	147
					(349) Dembowska.				
Mai 11.	12.26.22	—1.27,21	— 2.33,3	18:20	15.34.19,62	$\bar{2}$,310	—24. 0.30,9	0,911	148
11.	12.26.22	—0.44,37	+ 3.20,2	18:20	15.34.19,50	$\bar{2}$,310	—24. 0.29,7	0,911	149
13.	13. 7. 2	+0.54,61	+12.21,7	3:4	15.32.28,0	$\bar{1}$,090	—23.59.16	0,907	150
28.	9.34.39	—0.58,86	+ 1.57,7	18:20	15.18.58,3	$\bar{1}$,204 *n*	—23.40.56	0,902	151
28.	9.34.39	—1.11,71	+ 0.52,7	18:20	15.18.59,0	$\bar{1}$,204 *n*	—23.40.31	0,902	152
29.	9.35.50	+0.46,86	+ 3.57,1	18:20	15.18. 8,67	$\bar{1}$,171 *n*	—23.39.14,8	0,902	153
31.	9.32.18	—0.53,55	+ 7. 2,6	18:20	15.16.28,28	$\bar{1}$,136 *n*	—23.36. 9,4	0,903	153
					(354).				
Aout 9.	8.53.12	+1.59,78	+ 1.32,7	6:8	21.49.37,51	$\bar{1}$,563 *n*	—14. 0.59,4	0,830	154
10.	9.46.46	+1.12,90	— 7.47,9	18:20	21.48.50,65	$\bar{1}$,463 *n*	—14.10.20,0	0,848	154
13.	11.11.56	—1.12,01	+ 3. 7,8	15:16	21.46.31,43	$\bar{1}$,099 *n*	—14.37.37,1	0,869	155
16.	10. 3.28	+2.43,99	— 4.20,2	12:12	21.44.14,55	$\bar{1}$,348 *n*	—15. 4. 3,1	0,863	156
19.	9.19.58	+1.48,94	+ 6.23,7	18:20	21.41.56,60	$\bar{1}$,437 *n*	—15.30.14,3	0,858	157
20.	9.19. 8	+1. 2,40	— 2.27,8	18:20	21.41.10,07	$\bar{1}$,423 *n*	—15.39. 5,8	0,858	157
21.	9.16.11	+0.16,14	—11.10,6	12:20	21.40.23,82	$\bar{1}$,420 *n*	—15.47.48,6	0,860	157
22.	9. 6. 1	+0.15,28	+ 8. 8,0	12:20	21.39.38,78	$\bar{1}$,433 *n*	—15.56.25,6	0,860	158
					(399).				
Mars 1.	9.43.40	—1.51,03	+ 2.51,5	18:20	10.55. 3,68	1,429 *n*	+ 9.13. 4,4	0,715	159

Digitized by Google

Dates.		T. m. Toulouse.	ΔR.	ΔD.	N. de c.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★
					(404).					
1895.		h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JUILL.	23.	10.53. 2	−0.37,35	− 7.33,5	15:24	17. 7.49,79	$\bar{1}$,339	−24. 4. 2,2	0,895	160
	24.	11.20.51	−0.47,46	−13.57,5	18:20	17. 7.39,67	$\bar{1}$,436	−24.10.26,3	0,887	160
					(409).					
DÉC.	23.	9.49.15	−0. 0,27	+10.14,7	18:20	4.12.39,94	$\bar{2}$,454 *n*	+17.43.44,6	0,678	161
					Brooks (Nov. 21).					
DÉC.	9.	9.59.18	+0. 7,96	+ 2.24,3	18:20	7.57.38,93	1,788 *n*	+48.34.38,8	0,392	162
	16.	11.46.33	+4.10,45	+ 3.10,2	6:8	6. 0.54,04	2,169 *n*	+65.27.44,9	0,514	163
	16.	12.14.54	−1.50,93	−15.22,8	15:16	6. 0.36,04	2,473 *n*	+65.29. 4,2	0,520	164

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1895,0.	Réd. au j.	D moy. 1895,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	9,0	11.36.37,13	1,83	+12. 2.36,1	−11,4	Weisse$_1$ 602 H. 11.
2.	8,0	11.31.13,51	1,95	+12.45.26,0	−11,4	Weisse$_1$ 504 H. 11.
3.	9,0	11.29.50,98	1,97	+13. 8.57,5	−11,4	Weisse$_1$ 478 H. 11.
4.	9,0	11.22.29,52	2,20	+15.24.40,1	−11,3	Paris 14003.
5.	8,0	11. 9. 9,67	2,30	+16.54.34,2	−10,0	½ (Weisse$_2$ 119 H. 11 + Berlin 4391).
5.	8,0	11. 9. 9,67	2,30	+16.54.34,2	− 9,9	Id.
6.	8,9	11. 8.45,85	2,32	+17.30. 3,6	− 9,7	½ (Weisse$_2$ 112 H. 11 + Berlin 4388).
7.	9,2	11. 7.32,35	2,32	+17.20.38,0	− 9,6	Berlin 4384.
8.	8,9	16. 4.25,56	2,85	−13.24.17,4	−15,7	Munich$_1$ 12196.
9.	7,5	16. 2.25,42	2,85	−13.29. 4,0	−15,7	⅓(Mun$_1$12148+W$_1$1147+Sant.1475).
10.	8,8	16. 1.47,10	2,87	−13.13. 8,2	−15,7	⅓(Mun$_1$12132+W$_1$1131+Sant.1473).
11.	7,8	21.46.54,01	3,52	− 9.54.33,8	+12,8	½(W$_1$1053+Arg.29924+Sant.2463).
12.	9,3	21.45.22,87	3,58	− 9.56.48,6	+13,0	½(Schjellerup 8874+Munich$_1$29651).
13.	8,8	21.39.15,00	3,73	−10.41.41,4	+13,3	⅓(Sch.8826+Run.9415+Mun$_1$29370)
14.	8,6	21.34.56,34	3,76	−10.41. 3,9	+13,1	⅓(W$_1$780+Mun$_1$29139+Runker9338)
15.	6,3	21.33.49,59	3,79	−11. 2.55,5	+13,1	⅓(W$_1$749+Mun$_1$29076+Sant.2434).
16.	9,0	21.32.29,46	3,80	−10.54.39,3	+13,1	⅓(Run.9298+Got.5721+Mun$_1$29006)
15.	6,3	21.33.49,59	3,81	−11. 2.55,5	+13,2	
16.	9,0	21.32.29,46	3,82	−10.54.39,3	+13,2	
17.	9,1	21.28.43,17	3,84	−11.23.17,8	+12,9	Munich$_1$ 28801.
17.	9,1	21.28.43,17	3,85	−11.23.17,8	+13,0	Id.
18.	9,4	7.41.39,18	1,88	+20.30. 0,4	+ 3,6	Bonn t. VI 1906.
19.	7,8	7.38. 3,70	1,91	+20.27.18,0	+ 3,7	Paris 9476.
20.	9,0	7.31.30,26	1,93	+20.32.55,7	+ 4,1	Weisse$_2$ 854 H. 7.
21.	8,0	8.51. 6,59	1,75	+ 4.38.18,7	− 0,3	½ (Weisse$_1$ H. 8 + Albany 3603).
22.	8,5	23.23.43,22	4,32	−28.10.30,6	+21,9	Argentin 31789.

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1895,0.	Réd. au j.	⏀ moy. 1895,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
22.	8,5	23.23.43,22	4,32	—28.10.30,6	+21,8	Argentin 31789.
23.	8,5	23.19. 6,7	4,34	—28.17.26	+21,3	Position approchée.
23.	8,5	23.19. 6,7	4,36	—28.17.26	+21,1	Id.
23.	8,5	23.19. 6,7	4,36	—28.17.26	+21,0	Id.
24.	9,6	14.13.42,9	2,39	— 2.30.48	—17,5	Id.
25.	9,1	14.11.18,36	2,40	— 2.24. 9,5	—17,5	Munich$_2$ 5238.
26.	6,4	14.11. 3,61	2,41	— 2.42.27,4	—17,4	$\frac{1}{3}$(Glasg. 1211+Carl. 486+ Rad. 3693).
25.	9,1	14.11.18,36	2,42	— 2.24. 9,5	—17,3	Munich$_2$ 5238.
27.	9,0	10.39.50,60	1,90	+ 7.30.56,6	— 7,7	Weisse$_1$ 668 H. 10.
28.	8,4	10.33.25,99	1,98	+ 7.54.16,3	— 7,7	Bonn t. VI 2387.
29.	8,9	10.33.59,23	1,99	+ 7.58.32,2	— 7,8	Weisse$_1$ 567 H. 10.
30.	8,5	18. 8. 6,0	3,62	—31.24.55	— 7,4	Position approchée.
31.	8,5	18. 0.45,9	3,73	—31.40.24	— 8,3	Id.
32.	8,3	18. 0. 2,0	3,75	—31.45.19	— 8,4	Id.
32.	8,3	18. 0. 2,0	3,76	—31.45.19	— 8,4	Id.
33.	9,0	17.59. 6,1	3,78	—31.55.32	— 8,9	Id.
34.	9,5	17.59.10,3	3,79	—31.55. 2	— 8,9	Id.
35.	9,0	17.56.24,1	3,80	—31.53.19	— 8,9	Id.
35.	9,0	17.56.24,1	3,81	—31.53.19	— 9,0	Id.
35.	9,0	17.56.24,1	3,82	—31.53.19	— 9,0	Id.
36.	5,5	1.45.17,68	3,98	+10.31.23,7	+27,0	Greenwich 281.
37.	6,8	1.41.34,94	4,00	+10.19. 9,5	+27,2	$\frac{1}{7}$(W$_1$709+BAC 542+Sch. 523+Mun$_1$ 783+Par. 2204+Yarn 854+Gl. 385).
37.	6,8	1.41.34,94	4,01	+10.19. 9,5	+27,3	Id.
37.	6,8	1.41.34,94	4,02	+10.19. 9,5	+27,3	Id.
38.	9,5	1.22.49,3	4,06	+ 8.41. 7	+27,7	Position approchée.
39.	8,0	13.55.10,70	2,29	—17.36. 7,2	—17,5	Argelander Weiss 13307.
40.	9,1	16.23.16,3	3,13	—28.49.39	—14,9	Position approchée.
41.	7,5	16.20.55,52	3,14	—29. 3. 2,4	—15,1	$\frac{1}{3}$(Yarnall 6913 + Argentin 22274 + Cap. 8941).
42.	7,8	22.47.14,91	3,77	— 3.11. 0,7	+20,3	$\frac{1}{2}$[Sjchell. (9373-4) + Rad. 6116.]
43.	8,3	22.44.31,29	3,78	— 3.22.30,5	+20,2	Sjchellerup 9351.
43.	8,3	22.44.31,29	3,78	— 3.22.30,5	+20,3	Id.
44.	9,0	22.42.19,24	3,78	— 3.22.48,4	+20,1	Munich 31585.
44.	9,0	22.42.19,24	3,78	— 3.22.48,4	+20,2	Id.
44.	9,0	22.42.19,24	3,79	— 3.22.48,4	+20,2	Id.
46.	7,7	22.36.40,38	3,78	— 4. 1.21,1	+19,9	$\frac{1}{4}$(Lal. 44383 + W$_1$ 731 + Schj. 9285 + Munich$_1$ 31429).
45.	9,1	22.37.33,26	3,79	— 3.58.42,4	+20,0	Munich$_2$ 12647.
47.	9,1	22.37.24,63	3,78	— 3.50. 3,6	+20,0	Lalande 44420.
48.	8,5	0.17.59,41	3,69	— 0. 7.48,6	+24,9	Weisse$_1$ 271 H. 0.
48.	8,5	0.17.59,41	3,70	— 0. 7.48,6	+24,9	Id.
48.	8,5	0.17.59,41	3,71	— 0. 7.48,6	+25,0	Id.
49.	9,2	0.13.29,29	3,74	— 0.30.42,3	+25,0	$\frac{1}{2}$(Munich$_1$ 145 + Schjellerup 93).

Digitized by Google

★	Gr.	⅋ moy. 1895,0. h m s	Réd. au j. s	⑮ moy. 1895,0. ° ′ ″	Réd. au j. ″	Autorités.
50.	8,3	0.16.28,47	3,75	— 0.35.13,4	+25,1	$\frac{1}{4}$(W$_1$ 246 + Mun$_1$ 179 + Yarn. 157 + Paris 362).
49.	9,2	0.13.29,29	3,75	— 0.30.42,3	+25,0	$\frac{1}{2}$(Munich$_1$ 145 + Schjellerup 93).
49.	9,2	0.13.29,29	3,76	— 0.30.42,3	+25,1	Id.
51.	8,0	0. 9.27,17	3,82	— 0.53.10,8	+25,2	$\frac{1}{3}$(Mun$_1$ 104 + Paris 178 + Kam 42).
52.	8,4	16.31.28,54	3,03	—12.33.31,8	—14,0	$\frac{1}{2}$(Weisse$_1$ 547 + Santini 1849).
53.	7,3	16.27.20,30	3,03	—12.34.30,2	—14,0	Radcliffe 4295.
54.	7,8	16.27.39,88	3,03	—12.20.17,2	—13,9	Radcliffe 4297.
53.	7,3	16.27.20,30	3,04	—12.34.30,2	—14,0	Radcliffe 4295.
55.	9,7	13.33.10,5	2,26	—12.28.42	—17,5	Position approchée.
56.	9,0	13.26.51,8	2,29	—11.28.32	—17,7	Id.
57.	9,0	13.24.21,49	2,29	—10.57.10,4	—17,6	Munich$_2$ 4895.
58.	8,8	13.22.45,88	2,29	—10.30. 7,6	—17,6	Munich$_2$ 4884.
59.	8,5	21.58. 2,79	3,96	—16.25. 9,5	+15,4	Argelander Weiss 17182.
60.	7,0	21.55.49,59	3,96	—16. 6.59,3	+15,2	Radcliffe 5925.
61.	6,0	11.42.31,35	2,16	+ 8.49.46,0	—12,5	$\frac{1}{3}$(W$_1$ 706 + Mun$_2$ 4103 + Gl. 3033).
61.	6,0	11.42.31,35	2,17	+ 8.49.46,0	—12,5	Id.
61.	6,0	11.42.31,35	2,18	+ 8.49.46,0	—12,5	Id.
63.	8,4	18.14.15,63	3,30	—19.53.10,9	— 7,4	Argelander Weiss 14257.
62.	9,0	18.14.38,78	3,30	—19.58.33,9	— 7,4	Argelander Weiss 14265.
64.	8,0	18.14.18,64	3,32	—20.15.36,5	— 7,4	Argelander Weiss 14259.
65.	6,5	18. 8.58,04	3,41	—20.25. 8,0	— 7,7	Radcliffe 4767.
66.	7,5	18. 5.41,97	3,42	—20.26.44,5	— 7,9	Radcliffe 4750.
66.	7,5	18. 5.41,97	3,43	—20.26.44,5	— 7,9	Radcliffe 4750.
67.	9,3	18. 5.34,72	3,46	—20.23.33,8	— 7,8	Argelander Weiss 14071.
68.	9,2	18. 3.57,4	3,47	—20.29. 8	— 8,0	Position approchée.
69.	9,0	18. 2.42,53	3,49	—20.38.31,4	— 8,1	Argelander Weiss 14011
69.	9,0	18. 2.42,53	3,49	—20.38.31,4	— 8,0	Id.
70.	8,7	18. 2.35,70	3,52	—20.55.55,5	— 8,0	Argelander Weiss 14009.
71.	8,2	19.27.27,94	3,73	—18.50.19,0	0,0	$\frac{1}{3}$(Arg. W 15486 + Argentin 26788 + Radcliffe 5200).
71.	8,2	19.27.27,94	3,74	—18.50.19,0	0,0	Id.
72.	8,3	19.25.49,89	3,74	—18.52.34,5	— 0,1	$\frac{1}{2}$(Arg. Weiss 15462 + Bonn t. VI 60).
72.	8,3	19.25.49,89	3,76	—18.52.34,5	— 0,1	Id.
73.	8,5	19.23.18,5	3,78	—19. 4.19	— 0,3	Position approchée.
74.	9,0	19.21.21,3	3,81	—19.24.50	— 0,4	Id.
75.	8,2	19.21.54,48	3,82	—19.33.16,9	— 0,4	Cincinnati 3228.
76.	8,8	19.28.46,93	3,60	—25.20.57,3	— 0,2	Argentin 26812.
77.	8,5	19.26.23,21	3,63	—25.31.34,9	— 0,3	$\frac{1}{2}$(Arg. Weiss 15471 + Arg. 26262).
78.	8,0	19.26.44,81	3,63	—25.40.36,9	— 0,3	$\frac{1}{2}$(Arg. Weiss 15478 + Arg. 26771).
78.	8,0	19.26.44,81	3,65	—25.40.36,9	— 0,3	Id.
79.	9,8	19.26.41,3	3,65	—25.42.20	— 0,3	Position approchée.
80.	9,0	19.11.24,74	3,95	—26. 6.49,6	— 1,8	$\frac{1}{2}$(Argentin 26411 + Munich$_1$ 19441)
81.	6,3	19. 6.45,71	4,00	—26. 4.58,0	— 2,5	Greenwich.

Digitized by Google

★	Gr.	☊ moy. 1895,0.	Réd. au j.	ⓓ moy. 1895,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
82.	9,4	17.46.49,03	3,46	—25.58′35,0	— 9,4	Argelander-Weiss 13720.
83.	9,2	17.46.26,6	3,46	—26. 1.36	— 9,4	Position approchée.
84.	7,9	17.45.24,62	3,47	—25.44.35,2	— 9,5	$\frac{1}{3}$(Lal. 32559+Arg.W.+Arg. 24244).
85.	8,2	17.39.53,4	3,52	—26. 9.36	—10,1	Position approchée.
85.	8,2	17.39.53,4	3,54	—26. 9.36	—10,1	Id.
85.	8,2	17.39.53,4	3,54	—26. 9.36	—10,1	Id.
86.	8,0	17.37.24,90	3,57	—26.15.21,0	—10,4	$\frac{1}{2}$(Arg. 24038 + Lalande 32264).
86.	8,0	17.37.24,90	3,58	—26.15.21,0	—10,4	Id.
86.	8,0	17.37.24,90	3,59	—26.15.21,0	—10,4	Id.
86.	8,0	17.37.24,90	3,60	—26.15.21,0	—10,4	Id.
87.	8,0	17.35.29,6	3,62	—26. 6.42	—10,7	Position approchée.
88.	9,1	5.28.45,6	5,22	+18. 3.11	+11,8	Id.
88.	9,1	5.28.45,6	5,20	+18. 3.11	+11,8	Id.
89.	9,3	5.23. 2,8	5,24	+17.48.54	+12,3	Id.
90.	9,4	10. 2.51,89	2,02	+12.37.15,3	— 5,8	Bonn t. VI 2150.
91.	9,0	10. 1.58,62	2,09	+13.32. 7,4	— 5,9	Weisse$_1$ 1279 H. 9.
92.	8,9	12.22.24,72	2,00	— 1.47.48,1	—14,3	Weisse$_1$ 329 H. 12.
93.	10,0	12.20. 6,69	2,02	— 1.33.35,1	—14,1	Munich$_1$ 8033.
94.	9,0	12.19.46,21	2,04	— 1.35. 7,7	—14,2	Weisse 275 H. 12.
95.	9,5	12.15.36,0	2,05	— 1.50.26	—14,5	Position approchée.
96.	8,3	21.32.35,98	3,81	—12.30.57,3	+12,9	$\frac{1}{3}$(W$_1$ 717 + Mun$_1$ 29012 + Santini).
96.	8,3	21.32.35,98	3,83	—12.30.57,3	+13,0	Id.
96.	8,3	21.32.35,98	3,84	—12.30.57,3	+13,1	Id.
97.	9,0	11.34.20,29	1,99	— 6. 1.23,6	—12,4	Bonn t. VI 3325.
97.	9,0	11.34.20,29	2,00	— 6. 1.23,6	—12,5	Id.
98.	8,0	21.50.44,02	4,29	—29.18.54,7	+14,7	$\frac{1}{2}$(Arg. 30007 + Munich$_1$ 29851).
99.	7,6	21.47.35,85	4,32	—29. 9.16,1	+14,2	$\frac{1}{2}$(Arg. Weiss 17081 + Mun$_1$ 29735).
100.	8,8	21.46.51,44	4,33	—29.15.31,1	+14,1	Argentin 29920.
101.	9,0	21.43.58,97	4,36	—29. 1.27,3	+13,6	Argelander Weiss 17049.
102.	8,7	21.41.10,7	4,38	—29.17.37	+13,2	Position approchée.
103.	7,6	21.39.25,68	4,38	—29.12.20,9	+13,0	$\frac{1}{5}$(Arg.W. 17006+Arg.29751+Yarn. + Munich$_1$ 29376 + Cap 11477).
102.	8,7	21.41.10,7	4,39	—29.17.37	+13,2	Position approchée.
103.	7,6	21.39.25,68	4,38	—29.12.20,9	+12,9	$\frac{1}{5}$(Arg. Weisse 17006.....
104.	8,0	5.52.36,15	5,86	+31. 3.37,0	+ 8,9	Weisse$_2$ 1641 H. 5.
105.	7,5	2.33.13,85	4,02	+14.24.24,7	+25,5	$\frac{1}{4}$(W$_1$ 519 + Yarn. 1202 + Paris 3269 + Glasgow 596).
105.	7,5	2.33.13,85	4,07	+14.24.24,7	+25,7	Id.
106.	8,8	2.29.20,00	4,08	+14. 5.24,8	+25,9	Weisse$_1$ 446 H. 2.
107.	9,0	2.31. 1,90	4,09	+13.57.15,1	+25,9	Weisse$_1$ 482 H. 2.
106.	8,8	2.29.20,00	4,09	+14. 5.24,8	+26,0	Weisse$_1$ 446 H. 2.
108.	8,0	2.10.46,23	4,26	+11.54. 0,7	+27,2	$\frac{1}{6}$[W$_1$119+Rüm.575+Mun$_1$893+Par. 2820 + Gl.(70)497 + Gl.(1890)173].
108.	8,0	2.10.46,23	4,27	+11.54. 0,7	+27,2	Id.

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1895,0.	Réd. au j.	(D moy. 1895,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
109.	7,8	20.38.35,98	3,63	− 9.25.40,3	+ 7,2	$\frac{1}{3}$(W$_1$928 + Sant.2313 + Mun$_1$25768).
110.	8,5	20.35.25,18	3,67	−10. 0.54,2	+ 7,2	$\frac{1}{3}$(W$_1$849 + Sant. 2307 + Mun$_1$25542).
111.	8,5	20.35.22,02	3,67	− 9.53.40,2	+ 7,2	$\frac{1}{3}$(Bonn 5472 + Mun$_1$ 25536 + Santini 2306).
112.	8,3	21.33.14,77	3,90	−15.55.11,3	+13,0	Argelander Weiss.
113.	8,7	21.30. 5,93	3,92	−16. 9.50,4	+12,7	$\frac{1}{2}$(Yarnall 9678 + Mun$_1$ 28076).
113.	8,7	21.30. 5,93	3,93	−16. 9.50,4	+12,8	Id.
114.	8,5	21.26.37,24	3,96	−16.10.25,7	+12,5	$\frac{1}{2}$(Arg. Weiss 16871 + Mun. 28682).
114.	8,5	21.26.37,24	3,97	−16.10.25,7	+12,5	Id.
115.	9,3	21.23. 9,74	3,98	−16.32.40,9	+12,1	Munich$_1$ 28504.
116.	8,0	0. 6.11,20	3,76	− 3.39.42,2	+24,7	$\frac{1}{2}$(Paris 119 + Munich$_1$ 69).
117.	8,8	0. 1.49,45	3,77	− 3.17.57,0	+24,5	Munich$_1$ 11.
118.	9,0	23.58.22,50	3,80	− 4. 0. 3,9	+24,5	Sjchellerup 9977.
118.	9,0	23.58.22,50	3,81	− 4. 0. 3,9	+24,5	Id.
118.	9,0	23.58.22,50	3,81	− 4. 0. 3,9	+24,6	Id.
119.	9,0	22.22.58,32	3,86	−16.12. 7,3	+17,5	Yarnall 10142.
120.	8,5	22.23. 2,30	3,90	−16.43. 2,3	+17,6	Argelander Weiss 17419.
121.	8,3	22.23.14,07	3,90	−16.41.13,3	+17,6	Argelander Weiss 17423.
122.	8,3	22.17.53,71	3,92	−16.29.44,7	+17,1	Argelander Weiss 17373.
122.	8,3	22.17.53,71	3,93	−16.29.44,7	+17,2	Id.
123.	9,3	15.49.25,1	2,39	− 3.37.45,0	−17,5	Position approchée.
124.	9,2	15.48.32,6	2,41	− 3.39.48,0	−17,5	Id.
125.	8,3	15.43. 3,68	2,56	− 1.50.50,8	−17,0	$\frac{1}{2}$(Mun$_1$ 11756 + Sjch. 785).
126.	5,5	15.40.39,81	2,58	− 1.28.27,4	−16,8	$\frac{1}{4}$(Lal. 28722 + BAC 5206 + Arg. 21378 + Radcliffe 4069).
127.	8,7	15.38. 7,44	2,58	− 1.35.35,1	−16,8	$\frac{1}{4}$(Lal. 28651 + W$_1$693 + Gottin. 3773 + Munich$_1$ 11666).
128.	8,0	15.30.37,31	2,70	+ 0.24.59,5	−15,5	Weisse$_1$ 526 H. 15.
129.	9,1	15.30. 5,15	2,71	+ 0.39.49,5	−15,4	Weisse$_1$ 515 H. 15.
130.	8,1	2.28.40,52	4,12	+22.30.27,5	+24,7	$\frac{1}{3}$(W$_2$637 + Albany 781 + Radcl. 598).
131.	8,0	2.26.25,49	4,16	+21.52. 9,9	+25,2	$\frac{1}{5}$(W$_2$587 + Paris 3127 + Yarnall 1159 + Albany 768 + Radcliffe 592).
131.	8,0	2.26.25,49	4,17	+21.52. 9,9	+25,3	Id.
131.	8,0	2.26.25,49	4,18	+21.52. 9,9	+25,4	Id.
132.	7,5	14.48.52,44	2,43	− 7.57.35,5	−17,7	$\frac{1}{4}$(Lal. 27125 + W$_1$881 + Mun$_1$ 10688 + Radcliffe 3848).
133.	8,3	14.47.15,20	2,44	− 7.51. 9,5	−17,7	Munich$_1$ 10659.
132.	7,5	14.48.52,44	2,44	− 7.57.35,5	−17,7	$\frac{1}{4}$(Lal. 27125 + W$_1$881 + Mun$_1$ 10688 + Radcliffe 3848).
133.	8,3	14.47.15,20	2,46	− 7.51. 9,5	−17,7	Munich$_1$ 10659.
134.	7,1	14.40.38,66	2,52	− 7.21.14,5	−17,5	$\frac{1}{3}$(W$_1$709 + Mun$_1$ 10533 + Rad. 3819).
135.	6,5	14.38.39,88	2,52	− 7.48.30,8	−17,5	$\frac{1}{3}$(Arg. 19963 + Mun$_1$ 10483 + Radcl. 3807).
136.	5,6	13.49.18,78	1,98	− 0.59. 9,5	−17,6	$\frac{1}{3}$(Rüm. 4510 + Sjch. 4970 + Mun$_1$ 9619).

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1895,0.	Réd. au j.	⑮ moy. 1895,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
137.	10,0	13.27.25,16	2,32	+ 2.38.10,5	—16,6	½(Albany 4746 + Munich₁ 9275).
138.	9,0	13.20.48,31	2,36	+ 3.26.39,7	—15,8	½(Weisse₁ 296 + Albany 4718).
139.	9,4	13.18.55,83	2,36	+ 3.33. 3,5	—15,7	Munich₁ 9151.
140.	7,5	13.14.54,84	2,35	+ 3.50.21,0	—15,3	½(Weisse₁ 207 + Albany 4697).
141.	8,3	1.38.10,02	3,51	+ 5.12.58,6	+25,6	½(Albany 490 + Paris 2147).
141.	8,3	1.38.10,02	3,53	+ 5.12.58,6	+25,7	Id.
142.	5,0	1.35.58,08	3,58	+ 4.57.22,5	+25,9	¼(W₁ 609 + Yarnall 823 + Paris 2100 + Albany 474.
143.	8,8	1.37.43,50	3,57	+ 4.47.42,4	+26,0	Albany 489.
144.	8,3	1.38.31,37	3,59	+ 4.28. 2,9	+26,1	⅓(Sjch.509 + Paris 2152 + Alb. 493).
145.	8,8	1.37.38,79	3,59	+ 4.40.57,2	+26,0	½(Weisse₁ 649 + Alb. 487).
144.	8,3	1.38.31,37	3,61	+ 4.28. 2,9	+26,2	⅓(Sch.509 + Paris 2152 + Albany 493).
146.	9,0	1.32.36,21	3,72	+ 3.33. 4,3	+26,7	½(Yarnall 786 + Albany 456).
147.	8,8	1.33.30,72	3,72	+ 3.35.22,0	+26,7	¼(W₁ 540 + Yarnall 789 + Kam 365 + Albany 460).
148.	7,4	15.35.44,11	2,72	—23.57.41,1	—16,5	½(Argentin 21271 + Radcl. 4046).
149.	8,1	15.35. 1,15	2,72	—24. 3.33,4	—16,5	½(Œltzen Nord 12065 + Arg. 21248).
150.	8,5	15.31.30,7	2,74	—24.11.21	—16,8	Position approchée.
151.	9,1	15.19.54,4	2,85	—23.42.36	—18,0	Id.
152.	9,3	15.20. 7,9	2,85	—23.41. 6	—18,0	Id.
153.	8,3	15.17.18,97	2,84	—23.42.53,8	—18,1	Argelander Weiss 11858.
153.	8,3	15.17.18,97	2,86	—23.42.53,8	—18,2	Id.
154.	5,0	21.47.33,95	3,78	—14. 2.46,2	+14,1	Greenwich 3654.
154.	5,0	21.47.33,95	3,80	—14. 2.46,2	+14,1	Id.
155.	7,5	21.47.39,59	3,85	—14.40.59,2	+14,3	⅓(Arg. Weiss 17082 + Santini 2043 + Yarnall 9843).
156.	7,7	21.41.26,68	3,89	—14.59.56,7	+13,8	¼(Arg. Weiss 17021 + W₁ 944 + Mun₁ 29481 + Radcliffe 5872).
157.	8,5	21.40. 3,73	3,93	—15.36.51,8	+13,8	Argelander Weiss 17010.
157.	8,5	21.40. 3,73	3,94	—15.36.51,8	+13,8	Id.
157.	8,5	21.40. 3,73	3,95	—15.36.51,8	+13,8	Id.
158.	8,9	21.39.19,53	3,97	—16. 4.47,3	+13,7	Munich₁ 29372.
159.	9,0	10.56.52,63	2,08	+ 9.10.22,5	— 9,6	Paris 13509.
160.	8,2	17. 8.23,67	3,47	—23.56.15,8	—12,9	⅓(Lal. 31294 + Arg. 23340 + Yar. 7263).
160.	8,2	17. 8.23,67	3,46	—23.56.15,8	—13,0	Id.
161.	8,7	4.12.35,20	5,01	+17.33.10,1	+19,8	½(W₂ 203 + Yarnall 1901).
162.	8,5	7.57.24,48	6,49	+48.32.26,7	—12,2	6375 Bonn.
163.	7,5	5.56.33,85	9,74	+65.24.27,4	+ 7,3	976 Helsingfors-Gotha.
164.	5,7	6. 2.17,12	9,85	+65.44.20,7	+ 6,3	½(Hels.-G. 994 + Groombridge 1076).

Toutes les observations de planètes ont été faites à l'équatorial Brunner de $0^m,25$; celles de la comète Brooks au grand télescope Gautier.

Digitized by Google

ÉLÉMENTS PROVISOIRES DE LA PLANÈTE 1897 (DG) = (188) MÉNIPPÉ;

PAR M. J. CONIEL.

La planète 1897 (DG), considérée comme nouvelle, a été découverte par M. Charlois, à l'observatoire de Nice.

A l'aide des observations des 28 août, 20 septembre et 1er octobre, nous avons obtenu les éléments suivants, qui nous ont permis de conclure son identité avec la planète (188) Ménippé, perdue depuis 1878. Les éléments de cette planète que M. A. Leman a calculés à l'aide d'observations n'embrassant que quelques jours d'intervalle et que nous donnons en regard des nôtres, sont, comme on le voit, bien près de la vérité.

	(DG) 1897 août 28,36270, t. m. de Paris.		(188) Ménippé. 1878 juill. 5,5, t. m. de Paris.	
L.....	330°.37'.29",7		272°.45'.25"	
M.....	22.15. 3,7		323. 7.26	
π.....	308.22.26,0	Éclipt. et éq. moy. 1897,0.	309.37.59	Éclipt. et éq. moy. 1878,0.
☊.....	241.45.51,9		241.44.23	
i.....	11.44.21,1		11.21.17	
φ.....	10.15.36,5		12.15.43	
μ.....	773",230		748,83	
log a.....	0,441132		0,45041	

En calculant à l'aide de notre mouvement moyen diurne la longitude moyenne pour le 5,5 juillet 1878, nous trouvons

$$L = 268° 10'.$$

En faisant abstraction des perturbations inconnues entre 1878 et 1897, on voit que la valeur de notre μ est trop grande d'un peu plus de 2".

La correction de nos éléments provisoires, à l'aide des observations ultérieures au 1er octobre, fournira des résultats suffisamment exacts pour le calcul des perturbations en arrière et assurer les éléments de cet astre.

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

SCHEINER (J.). — Die Photographie der Gestirne. Leipzig, 1897. Engelmann. 1 vol. in-8° de 382 pages, avec figures, accompagné d'un Atlas de 11 planches in-4°.

MULLER (G.). — Die Photometrie der Gestirne. Leipzig, 1897. Engelmann. 1 vol. in-8° de 556 pages, avec figures.

La préface du Traité de Spectroscopie astronomique, publié par M. J. Scheiner il y a sept ans (1), nous apprenait que ce Volume ouvrait une série dont l'ensemble formerait un traité complet d'Astrophysique. On n'avait point en vue un ouvrage de vulgarisation, mais de véritables *manuels* pratiques, destinés à être consultés par les savants de profession. C'est dans cet esprit qu'est conçu le nouveau Volume que M. Scheiner a consacré à la *Photographie astronomique,* et il en est de même de celui de M. G. Müller, qui a pour titre *Photométrie des astres.*

L'apparition de ce traité de Photographie astronomique était attendue avec intérêt, car l'application des nouvelles méthodes a pris un essor si rapide, qu'il était urgent de fournir un guide à tous ceux qui s'apprêtent à entrer dans la voie largement ouverte depuis le Congrès astrophotographique de 1887. M. Scheiner, par ses travaux antérieurs, était familiarisé avec toutes les parties du sujet qu'il s'est chargé de traiter, et il nous en a donné un exposé qui est très complet, surtout pour les travaux faits en Amérique et en Allemagne. Le livre est divisé en trois sections :

I. Exécution et utilisation des photographies d'objets célestes.

II. Photométrie photographique; formation de l'image.

III. Histoire de l'astrophotographie; résultats scientifiques.

La première Section comprend quatre chapitres : 1° Remarques générales, concernant les procédés photographiques, les parties optiques des instruments, l'influence de l'agitation de l'air sur la production des images; 2° Instruments servant aux usages de la photographie céleste : héliographes, spectrohéliographes, coronographes, réfracteurs et réflecteurs photographiques; 3° Méthodes de mesure et de réduction,

(1) Voir *Bulletin,* t. VIII, p. 27.

Digitized by Google

employées en Photographie céleste; 4° Procédés d'enregistrement photographique.

C'est surtout par la reproduction des images d'objets célestes que la photographie a révolutionné nos méthodes d'observation, en abrégeant d'une manière inespérée les séances d'exploration du ciel, et en substituant le travail de cabinet aux opérations si pénibles, si longues et si complexes qui constituent l'observation directe. Grâce à cette transformation radicale des conditions de travail, la lunette qui restait confiée à un seul astronome, dont elle absorbait le temps, peut maintenant occuper une vingtaine d'auxiliaires.

Il est vrai que, dans l'état actuel de l'art de la Photographie, l'influence des circonstances atmosphériques, et en particulier celle de l'agitation de l'air, sur la beauté des images est encore excessive, de sorte que les soirées tout à fait favorables sont extrêmement rares sous nos climats. On l'a malheureusement constaté à Paris; mais les clichés obtenus dans de bonnes conditions, s'ils ne sont pas nombreux, sont en revanche d'une perfection qui n'a pas été surpassée; les admirables photographies lunaires qui figurent dans l'Atlas dont M. Lœwy a commencé la publication sont supérieures même à celles que l'on exécute au Mont Hamilton. De même, les photographies solaires, obtenues par M. Janssen à Meudon, sont encore sans rivales. M. Scheiner donne, dans son Atlas, des spécimens des photographies de Paris et de Meudon, pour lesquels on a eu recours à l'héliogravure. C'est encore le meilleur des procédés de reproduction directe; mais, quelle qu'en soit la beauté au point de vue artistique, les reproductions ne sauraient remplacer les clichés originaux lorsqu'il s'agit de mesures de précision. C'est dans cette direction qu'il reste beaucoup à faire, et qu'il faut beaucoup attendre de l'avenir.

La partie optique des instruments destinés à la Photographie céleste devra remplir des conditions très différentes suivant la nature des objets qu'on se proposera de reproduire : nébuleuses ou comètes, Soleil, Lune, planètes, étoiles fixes. M. Scheiner discute ces conditions, et il donne ensuite la description sommaire des principaux appareils usités dans les observatoires qui s'occupent de Photographie. Il y a, en premier lieu, les héliographes, qui servent à photographier le Soleil; on les emploie directement, ou bien combinés avec un héliostat. L'héliographe de Potsdam, que M. Scheiner décrit en détail, est parallèle à l'axe du monde et combiné avec un héliostat de Fahrenheit. Les *spectrohéliographes* ont pour but d'utiliser une image monochromatique du Soleil, suivant l'ingénieuse conception de M. Janssen, qui a permis d'observer les protubérances en tout temps. On doit à M. Hale un héliographe construit d'après ce principe, qui donne de bons résultats. M. Deslandres a organisé aussi, à l'Observatoire de Paris, des appareils qui

Digitized by Google

atteignent le même but et qui diffèrent de l'appareil américain; M. Scheiner ne les décrit qu'en partie. Les tentatives qui ont été faites, de divers côtés, pour photographier la couronne dans les mêmes conditions, notamment par MM. Huggins et Hale, ont rencontré des difficultés qui ne paraissent pas encore avoir été définitivement vaincues. M. Scheiner termine ce Chapitre par une étude très complète des réfracteurs et des réflecteurs actuellement employés pour la Photographie astronomique.

Le troisième Chapitre renferme un exposé détaillé des méthodes de mesure et de réduction qui ont été proposées pour tirer parti des clichés. On y trouve exposées successivement les méthodes de MM. Scheiner, Bakhuyzen, Jacoby, Lœwy, Prosper Henry, Donner, Turner, Gill.

Le quatrième Chapitre est consacré aux procédés d'enregistrement photographique. Il s'agit ici d'applications de la Photographie à l'observation des passages, à la détermination des latitudes par la méthode de Talcott, à la détermination des longitudes par les distances lunaires, etc. M. Scheiner décrit les *photochronographes* qui sont employés, à l'observatoire de Georgetown-College, pour les observations relatives à la latitude, et dont l'un rappelle un dispositif imaginé par M. Kapteyn. Ces méthodes ne sont pas encore sorties de la période des tâtonnements; mais on peut espérer qu'elles ne tarderont pas à entrer dans la pratique. Les astronomes trouveront des indications précieuses dans l'article récemment publié ici-même par M. G. Lippmann (Méthode directe photographique pour déterminer les coordonnées équatoriales des étoiles et du Soleil : *Bull.*, t. XIV, p. 369).

La Section II du Livre de M. Scheiner est consacrée, comme nous l'avons dit, à la Photométrie photographique et à la théorie de la formation de l'image. On y trouve donc aussi résumées les recherches concernant la relation qui existe entre les diamètres photographiques des disques stellaires, le temps d'exposition, et les grandeurs des étoiles. A l'exception d'un travail de G.-P. Bond, qui date de 1857, et d'une Note de M. Janssen, de 1881, ces recherches ne remontent guère au delà de dix ans; elles sont dues à MM. Pickering, Scheiner, M. Wolf, Charlier, Pritchard, Schaeberle, Trépied, Dunér, etc. M. Scheiner a fait une étude approfondie de toutes les conditions qui concourent à la production de l'image photographique.

La dernière Partie de son Livre est un résumé de l'histoire de la Photographie céleste et des résultats scientifiques que lui doit l'Astronomie. Cet historique est divisé en Chapitres, suivant les objets auxquels on a successivement tenté d'appliquer la nouvelle méthode d'observation : 1° la Lune; 2° le Soleil et les passages de Vénus; 3° les planètes; 4° les comètes et les étoiles filantes; 5° les étoiles fixes; 6° les nébuleuses.

Digitized by Google

L'analyse de cette Partie nous entraînerait trop loin. M. Scheiner donne encore, en appendice, une bibliographie méthodique, très riche et très complète, de toutes les publications relatives à la Photographie astronomique, et le Livre se termine par une Table alphabétique des matières et noms d'auteurs, complément indispensable de tout Ouvrage destiné, comme celui-ci, à être souvent consulté.

L'atlas qui accompagne l'Ouvrage de M. Scheiner renferme 11 héliogravures, d'une très belle exécution, choisies de manière à donner une idée exacte des progrès déjà réalisés par la Photographie astronomique. En voici la liste :

I. Photographie de la Lune, obtenue par MM. Lœwy et Puiseux avec l'équatorial coudé de l'Observatoire de Paris, le 13 février 1894.

II. Le cirque lunaire Maurolycus, d'après une photographie obtenue par MM. Lœwy et Puiseux, le 14 mars 1894, agrandie par M. Weinek.

III. Photographie du Soleil exécutée par M. O. Lohse, le 13 janvier 1892, avec l'héliographe de l'observatoire de Potsdam.

Granulation de la surface solaire, d'après une photographie faite à Meudon, le 29 août 1886, par M. Janssen.

IV. Facules solaires, d'après une épreuve obtenue par M. Hale avec le spectrohéliographe de l'observatoire Kenwood, en février 1892.

Protubérance solaire, d'après une épreuve obtenue par M. Hale.

Couronne solaire, photographiée à l'observatoire Lick pendant l'éclipse totale du 16 avril 1893.

Épreuve de la planète Jupiter, obtenue à l'observatoire Lick en 1891.

V. Photographie de la comète Brooks 1893, obtenue par M. Barnard avec un objectif à très court foyer.

Découverte photographique de la planète Svéa (21 mars 1892), par M. Max Wolf, à Heidelberg.

VI. Épreuve de l'amas stellaire ω Centaure, obtenue par M. Gill le 25 mai 1892, avec le réfracteur photographique de l'observatoire du Cap.

VII. Épreuve de la Voie lactée, obtenue par M. Barnard, le 19 juin 1892.

VIII. Autre épreuve de la Voie lactée, du 24 juin 1892.

IX. Épreuve de la nébuleuse d'Orion, obtenue par M. Scheiner, avec le réfracteur photographique de Potsdam, le 11 janvier 1893.

X. Épreuve de la nébuleuse qui entoure η Argo, obtenue par M. Gill en avril 1894.

XI. Photographie des nébuleuses des Pléiades, exécutée par M. Roberts, le 8 décembre 1888, avec son télescope à miroir, de 20 pouces d'ouverture.

L'Ouvrage que M. G. Müller a consacré à la *Photométrie des astres*, est un Traité en règle, où l'on trouve condensé tout ce qui a été fait

Digitized by Google

d'important sur cette question depuis les temps anciens, car la Photométrie n'est pas une science de création récente, comme la Photographie et la Spectroscopie, qui constituent avec elle l'Astrophysique moderne. Les trois Sections principales ont pour titres :

I. Éléments d'astrophotométrie théorique.

II. Les appareils photométriques.

III. Résultats des observations photométriques des corps célestes.

La première Section comprend les Chapitres suivants : 1° Lois fondamentales de la Photométrie; 2° Application des principes théoriques aux problèmes que soulève l'Astrophotométrie (phases des planètes et des satellites, anneaux de Saturne, éclipses des satellites de Jupiter); 3° Extinction de la lumière dans l'atmosphère terrestre.

Les problèmes de la Photométrie, étudiés d'abord par Bouguer et Lambert, ont été repris avec succès par des physiciens contemporains, parmi lesquels il convient de citer Beer, Seidel, Zœllner; la théorie a été en partie renouvelée par les recherches récentes de MM. Lommel et Seeliger, dont nous avons eu à parler plus d'une fois ici-même. On a mieux compris le rôle important de la réflexion diffuse, et l'étude de l'illumination des corps pulvérulents a permis d'aborder par une voie nouvelle la théorie des anneaux de Saturne. L'application des méthodes photométriques à l'observation des éclipses des satellites de Jupiter a singulièrement accru l'intérêt que présente l'étude de ces phénomènes, comme l'ont montré les recherches de MM. Cornu, Obrecht, Wellmann, Anding et Seeliger.

La question de l'extinction, ou de l'absorption exercée par l'atmosphère terrestre, a donné lieu, dans ces derniers temps, à beaucoup de travaux d'un grand intérêt, parmi lesquels il convient de citer en particulier ceux de MM. Müller, Abney et Langley, dont nous trouvons ici un résumé très complet.

Les appareils photométriques dont les astronomes font usage (ou qui ont été successivement proposés pour des usages astronomiques) sont extrêmement variés. Toutefois, la plupart de ces instruments font intervenir, en dernière instance, le jugement de l'œil, d'où il suit qu'il y a des limites que la précision des mesures ne pourra probablement jamais dépasser. Les plus simples et les plus connus sont ceux qui reposent sur l'appréciation de l'égalité de deux impressions lumineuses; ils diffèrent surtout par les moyens employés pour faire varier graduellement l'éclat de l'une des deux sources. Cette variation peut d'ailleurs avoir pour terme l'extinction complète; l'intensité qu'on mesure ne diffère plus, alors, de celle du fond.

M. Müller range effectivement, dans une première classe, les photomètres à extinction. L'affaiblissement de la lumière s'y obtient, en pre-

Digitized by Google

mier lieu, par des diaphragmes placés devant l'objectif (photomètres de Köhler, Reissig, Dawes, Knobel, Thury, Lamont), ou bien entre l'objectif et l'oculaire (Hirsch, Dawes, Lœwy); on peut classer dans cette catégorie le « photomètre à déflexion » de Parkhurst, à diaphragme de verre, légèrement prismatique. L'affaiblissement s'obtient, en second lieu, par un milieu absorbant (Fr. Marie, Lampadius, Horner, Quetelet, Albert); c'est à cette catégorie qu'appartiennent les photomètres à prismes ou coins de verre (X. de Maistre, Kayser, Dawes, Pritchard). On se sert, à Potsdam, d'un instrument de ce genre, dans la construction duquel ont été réalisés d'importants perfectionnements.

Les photomètres fondés sur l'appréciation directe de l'égalité d'éclat de deux objets lumineux ont, sur les photomètres à extinction, plusieurs avantages : ils fatiguent beaucoup moins les yeux, et les mesures sont susceptibles d'une plus grande précision; ils ne sont pourtant pas exempts d'inconvénients, le jugement étant toujours influencé par les différences d'aspect et de couleur des objets à comparer. Ces instruments peuvent encore être classés d'après les procédés employés pour faire varier l'intensité de l'une des deux sources. On a d'abord songé à obtenir la variation de l'éclat par la variation de la distance; c'est sur ce principe que reposent les photomètres de Bouguer, de Ritchie; le photomètre à compartiment de Foucault; les photomètres à ombres (Lambert, Rumford, Abney); le photomètre à tache, de Bunsen; l'astromètre de J. Herschel; le photomètre à prisme de Steinheil, où l'on fait varier la distance de l'objectif à l'oculaire (l'objectif est coupé en deux, comme celui de l'héliomètre, et les deux moitiés sont mobiles suivant l'axe du tube). Un autre moyen, souvent employé, consiste dans l'emploi des diaphragmes, proposé par Bouguer et W. Herschel, et qui permet aussi d'utiliser pour cet objet le sextant et l'héliomètre ordinaires. C'est sur le même principe que sont fondés les photomètres de Schwerd, Hornstein, Searle, et les dispositifs ingénieux qui ont été étudiés par M. Cornu (voir *Bull. astr.*, t. IV, p. 89). D'autres méthodes reposent sur l'emploi des disques tournants (Talbot, Secchi, Abney), ou sur celui de boules qui réfléchissent la lumière (Wollaston, Steinheil, Bond).

Les propriétés de la lumière polarisée sont utilisées pour les besoins de la Photométrie dans une série d'instruments, parmi lesquels il faut citer ceux qui ont été imaginés par Arago, Bernard, Beer, Becquerel, Babinet, Zöllner, Wild, Chacornac, Pickering (photomètre méridien).

Les spectrophotomètres forment une classe nouvelle d'instruments, qui reposent sur les principes indiqués par Fraunhofer, Vierordt, Draper, Crova, Abney, etc. On peut citer les spectrophotomètres de Govi, Vierordt, Glan et Vogel, Crova, Gouy, Glazebrook, Trannin, Violle, Wild.

Digitized by Google

Pour s'affranchir des causes d'erreur que comporte le jugement de l'œil, on a aussi tenté de mesurer les effets thermiques ou chimiques des sources de lumière à comparer. De là les appareils nombreux, connus sous des noms plus ou moins appropriés : [illegible] thermomètre, thermomètre différentiel, actinomètre, pyrhéliomètre, radiomètre, radiomicromètre, bolomètre, etc., parmi lesquels le bolomètre de M. Langley se distingue par sa sensibilité, et qui sont destinés à mesurer l'intensité calorifique d'un rayonnement; puis les méthodes de photométrie chimique expérimentées par Bunsen et Roscoe, et les autres procédés fondés sur l'emploi de la Photographie. Il en est aussi question dans le Livre de M. Scheiner, dont nous avons parlé plus haut.

La dernière Partie de l'Ouvrage de M. Müller est un résumé détaillé des résultats fournis jusqu'à présent par les observations photométriques d'objets célestes qui sont : 1° le Soleil; 2° la Lune; 3° les planètes et les satellites; 4° les comètes et les nébuleuses; 5° les étoiles fixes. Cette Partie comprend plus de 200 pages, et rien d'important n'y a été oublié. On trouve, en Appendice, une Table de réduction relative aux phases des planètes; une Table des coefficients d'extinction, calculés pour les diverses distances zénithales; enfin une Bibliographie des publications relatives à la Photométrie astronomique, et une Table alphabétique des matières et noms d'auteurs.

R. Radau.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

CAUSES D'ERREUR DANS LA RECHERCHE DES VITESSES RADIALES DES ASTRES. IMPORTANCE DE L'ERREUR DUE AUX VARIATIONS DE TEMPÉRATURE. MÉTHODES DE CORRECTION;

PAR M. H. DESLANDRES.

L'étude spectrale d'un astre, d'après le principe de Doppler-Fizeau, permet de reconnaître sa vitesse radiale, c'est-à-dire la vitesse avec laquelle il s'éloigne ou se rapproche de la Terre. Elle fournit ainsi un élément nouveau qui échappe aux observations ordinaires de position; et elle décèle des mouvements qui ont été jugés inaccessibles jusqu'à la seconde moitié de ce siècle.

La recherche des vitesses radiales a donc une importance évidente; mais elle offre des difficultés toutes particulières; aussi n'a-t-elle été abordée encore que dans un très petit nombre d'observatoires.

Difficultés de la recherche. Comparaison avec la mesure des étoiles doubles. — La vitesse radiale d'un astre est proportionnelle au déplacement que subit son spectre par rapport à un spectre terrestre juxtaposé qui offre avec lui des raies communes. Or, ce déplacement est en général très petit; et sa mesure micrométrique présente la difficulté inhérente aux pointés d'objets très voisins, très petits, de formes et d'intensités différentes; on peut la rapprocher de la mesure des distances dans les étoiles doubles serrées, mesure qui est considérée à juste titre comme très délicate.

De plus, dans la mesure des déplacements spectraux, il est difficile de placer les lumières à comparer dans des conditions identiques. Avec les étoiles doubles, qui sont données par le même objectif, cette identité des conditions, évidemment nécessaire, est toujours réalisée; mais, dans le cas des vitesses radiales, les deux images lumineuses à comparer sont fournies par des appareils différents; l'une est réduite à un point et soumise à l'agitation de l'atmosphère; l'autre est stable et offre un diamètre apparent.

Digitized by Google

Les variations de température apportent aussi une complication spéciale, qui n'intervient pas avec les étoiles doubles. Lorsque la température change, et alors que la lunette reste toujours dirigée vers le même point du ciel, les deux raies spectrales à comparer subissent par rapport à l'appareil un déplacement qui est du même ordre que le déplacement cherché; d'où une cause d'erreur importante, lorsque les observations sur les deux spectres ne sont pas simultanées.

En résumé, dans la recherche des vitesses radiales, les causes d'erreur sont nombreuses. Je me propose de relever les principales avec les deux appareils employés pour les spectres stellaires, c'est-à-dire avec le spectroscope à fente et avec le prisme objectif, disposés pour l'observation oculaire ou photographique. J'examinerai, avec un soin particulier, l'erreur due à la température, qui est très importante et n'a pas été suffisamment mise en lumière dans les écrits précédents sur la matière.

Par contre, je laisserai de côté les questions relatives aux mesures micrométriques, qui ont été déjà développées par les auteurs.

Spectroscope à fente.

Le spectroscope à fente est employé presque seul, au moins jusqu'à présent, parce qu'il permet de juxtaposer facilement les deux spectres à comparer.

Observations oculaires. Premières recherches. — Les premières observations oculaires ont été faites en 1868 par Huggins (1) qui a reconnu le déplacement du spectre de quelques étoiles et l'a rapporté à sa véritable cause. Puis Vogel en 1872 a fait avec les principales étoiles une série semblable de déterminations du déplacement spectral et de la vitesse radiale.

Plus tard, de 1875 à 1888, Maunder, à Greenwich (2), et aussi, pendant quelques mois, Seabroke à Rugby, ont poursuivi l'étude régulière des étoiles par la même méthode.

---

(1) *Philosophical Transactions*, 1868, page 529 et *Proceedings of the Royal Society*, page 386.

(2) *Mémoires de l'observatoire de Greenwich.*

Digitized by Google

Or, les vitesses d'une même étoile, mesurées le même soir dans des observatoires différents, sont parfois très différentes. Même les résultats obtenus à quelques minutes d'intervalle dans un même lieu ont des écarts analogues, d'après les relevés publiés par Maunder qui, certes, est un observateur de premier ordre.

A quelles causes attribuer ces divergences qui ont fait douter un instant de la valeur de la méthode?

Différences entre les faisceaux lumineux des deux sources. — Une première cause, importante à mon sens, est la différence entre les ouvertures des faisceaux lumineux de l'étoile et de la source terrestre.

La source terrestre était projetée souvent sur la fente par un objectif n'ayant pas l'ouverture convenable, ou était placée simplement devant la fente, mais à une grande distance.

D'autre part, le point brillant de l'étoile donne un spectre formé par une ligne lumineuse dont les raies sont difficiles à distinguer : aussi élargit-on, en général, le point brillant avec une lentille cylindrique.

Mais alors les deux lumières à comparer ne sont pas placées dans des conditions identiques, et ce défaut suffit à expliquer les écarts entre les vitesses d'une même étoile, obtenues dans des observatoires différents.

Importance de l'agitation atmosphérique. — Une autre cause d'erreur, qui, d'après Vogel, est la plus importante, tient à l'agitation de l'atmosphère qui produit des variations d'intensité du spectre et rend le pointé de la raie incertain. Vogel déclare même que, par un beau temps, il faut parfois attendre plusieurs heures pour trouver un moment favorable à l'observation. Il faut rapporter à cette cause les divergences entre les résultats d'une même soirée dans un même lieu.

Cependant, Keeler, à l'observatoire Lick, dans une station remarquable, il est vrai, par la beauté des images, a fait, par l'observation oculaire, de bonnes mesures de vitesses radiales des étoiles; il a fait de même une série complète d'observations très remarquables sur les vitesses des nébuleuses. Il faut noter, d'ailleurs, que la plupart des inconvénients signalés plus haut dispa-

Digitized by Google

raissent (¹) avec les nébuleuses qui ont un diamètre apparent.

En résumé, les observations oculaires, qui ont l'avantage de donner immédiatement le résultat cherché, doivent être réservées pour les très belles nuits. Il semble possible d'ailleurs, au moins avec les belles étoiles, d'éviter l'inconvénient de la lentille cylindrique, par l'emploi d'un oculaire à fort grossissement.

Observations photographiques. — Les premières photographies de spectres stellaires ont été faites par Huggins en 1880, qui a annoncé avoir enregistré quelques déplacements dus à la vitesse radiale.

Vogel a employé le premier, à l'observatoire de Potsdam (1888-1892), les spectres photographiques à la mesure précise des déplacements spectraux, et a indiqué leurs grands avantages. Il s'est servi d'un réfracteur de $0^m,30$ (²).

J'ai organisé la même recherche à l'Observatoire de Paris en 1890 et 1892 avec le grand réflecteur de $1^m,20$, c'est-à-dire avec un appareil d'une disposition toute différente (³).

M. Belopolski a utilisé dans le même but, à partir de 1893, et avec un grand succès, le réfracteur de $0^m,75$ de l'observatoire de Poulkova.

Ces trois observatoires sont les seuls qui aient entrepris d'une manière régulière l'étude des vitesses radiales (⁴).

Principaux avantages de la Photographie. — D'après Vogel, le principal avantage de l'observation photographique est la diminution de l'influence pernicieuse de l'agitation atmosphérique. De même que dans la photographie ordinaire des étoiles, la plaque enregistre toutes les variations et oscillations de l'image, et donne ainsi la position et l'intensité moyennes de l'étoile ou de la raie spectrale.

(¹) M. Keeler s'est attaché, de plus, à donner la même ouverture aux faisceaux lumineux des deux sources céleste et terrestre.

(²) *Publications de l'observatoire astrophysique de Postdam*, 7ᵉ volume.

(³) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1890, t. CXI, p. 562; 1891, t. CXIII, p. 30 et 1892, t. CXV, p. 783.

(⁴) Récemment M. Newall a organisé aussi, dans ce but, le grand réfracteur de $0^m,62$ de l'observatoire de Cambridge (*Monthly Notices*, June 1897).

Digitized by Google

La mesure du déplacement, toujours délicate, est faite dans le laboratoire, c'est-à-dire dans les meilleures conditions de commodité et de précision.

D'autre part, on évite la lentille cylindrique de l'observation oculaire, en faisant simplement courir l'étoile sur la fente.

Ces avantages sont notables et augmentent la précision de la mesure. Les vitesses radiales d'une même étoile, obtenues un même soir dans des observatoires différents, ont des écarts de 10^{km} au plus, alors que, par l'observation oculaire, la différence montait parfois à 30^{km}.

Remarques sur le mode d'emploi des sources terrestres. — Et encore cette différence de 10^{km}, relativement forte, peut tenir en partie à l'emploi différent des sources terrestres dans les divers observatoires.

Vogel et Sheiner prennent comme source terrestre un tube de Gessler d'hydrogène, placé à $0^{m},40$ de la fente, perpendiculairement à sa direction. Cette disposition est très simple; mais les faisceaux des deux sources à comparer sont très différents, et il peut en résulter une erreur systématique, que Vogel cependant n'a pas examinée dans son grand Mémoire.

A ce sujet, Vogel critique le dispositif employé couramment par Maunder à Greenwich, dans ses observations oculaires. Une lame de verre à faces parallèles est placée devant la fente et inclinée à 45°; elle laisse passer le faisceau de l'étoile et réfléchit le faisceau de la source terrestre envoyé par une lentille de projection.

Vogel objecte que le réglage est difficile, et que l'image de la source terrestre peut n'occuper qu'en partie la largeur de la fente, ce qui donne une grosse erreur. A notre avis, ce défaut est facile à éviter, puisque la source terrestre a un diamètre apparent que l'on peut d'ailleurs augmenter. D'autre part, cette disposition a l'avantage de permettre l'égalité des deux faisceaux à comparer (1).

Pour ma part, de même que Keeler, à l'observatoire Lick, je

(1) Lorsque l'on emploie un réflecteur ayant, comme à Paris, un rapport élevé, $\frac{1}{8}$, entre l'ouverture et la distance focale, la lame transparente inclinée à 45° a l'inconvénient de diminuer la netteté de l'image de l'étoile sur la fente du spectroscope.

Digitized by Google

projette la source terrestre sur la fente par un faisceau de même ouverture que celui de l'étoile, à l'aide d'un petit prisme à réflexion totale, placé à volonté devant la fente.

Pour la mesure absolue des vitesses radiales, cette disposition est assurément préférable.

Importance de l'erreur due aux variations de température dans l'observation photographique. — Cependant la méthode photographique offre une cause d'erreur grave, que Vogel cite assurément, mais sans faire ressortir son importance, et sans donner sa valeur pour l'appareil employé (1). Cette erreur est le déplacement du spectre, causé par les variations de température pendant la pose.

Elle est négligeable dans l'observation oculaire, car les deux mesures sur les raies stellaire et terrestre sont rapides et presque simultanées. Mais son influence est notable avec des poses photographiques qui atteignent en général quarante minutes et soixante minutes; car une variation de température de 1° seulement produit un déplacement du même ordre que le déplacement cherché. Cette action nuisible de la température sur la position des raies spectrales est difficile à corriger et à éviter complètement; de plus elle diminue la netteté du spectre et s'oppose à l'emploi de très longues poses. D'une manière générale, elle est le principal obstacle à la grande précision des mesures (2).

Méthode pour déterminer les erreurs de température et de flexion. — Dans les recherches de vitesse radiale, il importe de déterminer au début, pour le spectroscope employé, le déplace-

(1) Cette erreur n'est pas citée dans le Mémoire de M. Cornu sur la matière (*Annuaire du Bureau des Longitudes* 1891).

(2) Une explication est ici nécessaire. Lorsqu'on examine le relevé des mesures micrométriques faites à Potsdam sur les spectres stellaires, l'erreur principale apparaît due au pointé souvent difficile et incertain sur la raie stellaire. Cette raie est en général la raie Hγ de l'hydrogène indiquée pour une première étude, mais très large et diffuse surtout dans les étoiles blanches. Le spectre des étoiles blanches ou jaunes contient en général d'autres raies qui sont fines, et susceptibles d'assurer un pointé précis pour la mesure des vitesses absolues ou relatives. Or la netteté de ces raies fines est liée directement à la constance de la température. Aussi peut-on dire que la variation du spectre par la température est le principal obstacle à la précision.

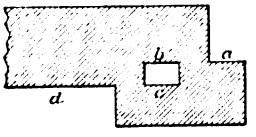
Digitized by Google

ment parasite dû à la température, et de même aussi le déplacement, en général beaucoup plus petit, dû à la flexion.

J'emploie dans ce but une méthode et un dispositif très simples, qui, à ma connaissance, n'ont pas encore été décrits et qui sont les suivants :

J'utilise la source terrestre elle-même à la détermination de ces erreurs de température et de flexion, en m'aidant d'un diaphragme spécial qui est placé devant la fente et permet de juxtaposer exactement deux ou trois spectres terrestres. Le diaphragme, qui est découpé dans une plaque de métal (*fig.* 1), est

Fig. 1.



tel que les arêtes *a* et *b*, *c* et *d* sont respectivement sur deux droites parallèles, perpendiculaires à la fente. On déplace le diaphragme perpendiculairement à la fente, et l'on fait successivement une première épreuve du spectre terrestre avec *a* sur la fente, une seconde avec *bc*, et une troisième avec *d*. Les trois spectres sont exactement juxtaposés et peuvent servir à la reconnaissance des erreurs de flexion et de température. J'emploie en général le spectre de l'étincelle d'induction entre deux pointes de fer qui donnent des raies fines et nombreuses dans toute l'étendue du spectre.

Mesure de l'erreur de flexion avec le spectroscope du grand réflecteur. — Pour l'erreur de flexion, je photographie un premier spectre du fer pour une position du spectroscope et de l'équatorial, puis immédiatement après un second spectre juxtaposé pour une autre position de l'équatorial notablement différente en ascension droite ou déclinaison. La comparaison des deux spectres fournit le déplacement dû à la flexion.

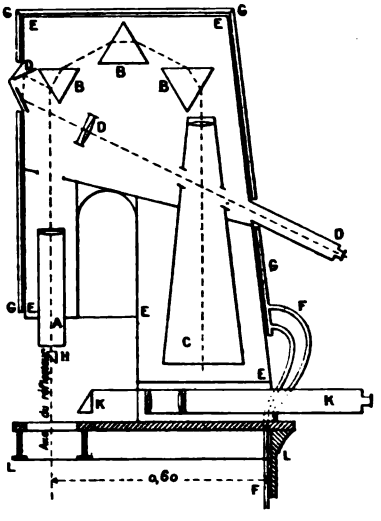
Or, avec le grand réflecteur de l'Observatoire et son spectroscope photographique à trois prismes de flint lourd de 60°,

Digitized by Google

l'erreur de flexion est absolument insensible pour des variations d'angle horaire de trois heures et plus. On peut donc faire des poses de trois heures sans être gêné par la flexion.

Il est vrai que la monture du spectroscope est particulièrement rigide. Elle est représentée en coupe dans la *fig.* 2, qui

Fig. 2. — *Spectroscope du grand réflecteur de* 1^{m},20.
Coupe montrant la disposition des pièces principales et de la boîte rigide en acier qui les renferme.



A, collimateur, ouverture 0^{m},05, distance focale 0^{m},30; BB, prismes de 60°; C, lunette photographique, distance focale 0^{m},60; DD, lunette auxiliaire qui donne l'image de la fente; EEE, boîte rigide en acier qui renferme toutes les pièces; FF, tubes en fer et caoutchouc et GGG, boîte mince en cuivre appliquée sur la boîte rigide en acier, lesquels servent à la circulation d'eau autour de l'appareil; H, prisme à réflexion totale qui peut être déplacé devant la fente et sert à la projection des sources terrestres sur la fente; KK, véhicule-microscope ancien pour l'observation oculaire ordinaire des astres; LL, partie supérieure de la monture du réflecteur.

donne la disposition générale des pièces [1]. Elle est constituée par une boîte parallélépipédique fermée, dont les parois en tôle d'acier sont renforcées par des nervures et de nombreuses traverses, et de plus elle est fixée par une large base à la partie

[1] Voir *Comptes rendus*, 1892, t. CXV, page 783.

Digitized by Google

supérieure du télescope, par-dessus le microscope oculaire ordinaire qui est conservé. Sa forme lui permet de résister parfaitement à la flexion dans tous les sens, et à ce point de vue elle paraît préférable aux montures adoptées à Potsdam et en Amérique (1).

Mesure de l'erreur due aux variations de température avec le même spectroscope. — Pour déterminer l'erreur due à la variation de température, le télescope et le spectroscope sont laissés immobiles. On fait une première épreuve du fer, puis, une heure après, une seconde épreuve juxtaposée; la pose sur les étoiles est, en effet, d'une heure environ. On note en même temps la diminution de la température et le déplacement des deux spectres fournit l'erreur qui en résulte.

Or une diminution de température de 1° (et pendant la pose d'une heure, le soir, la décroissance est souvent plus forte) produit un déplacement moyen qui, avec la raie λ404 du fer équivaut à 14^{km} par seconde et, avec la raie λ434, à 16^{km} par seconde.

Le déplacement pour une diminution de 1° varie d'ailleurs notablement avec la marche antérieure de la température, car les prismes, qui sont peu conducteurs, présentent par rapport à la température ambiante un retard qui est plus ou moins grand.

Ce déplacement, qui est lié aux dilatations et contractions des pièces du spectroscope, dépend en grande partie des variations de l'indice des prismes par la température, variations qui, comme l'on sait, sont plus grandes pour les verres en flint que pour les verres en crown, et même d'autant plus grandes que le flint est plus lourd et plus riche en oxyde de plomb.

La recherche des vitesses radiales exige une grande dispersion; aussi le flint a été seul employé jusqu'à présent.

---

(1) Une description succincte de ce spectroscope a été donnée dans les *Comptes rendus*, 1892, tome CXV, p. 783.

Une description complète, avec tous les détails des pièces et des manœuvres, sera publiée dans un Mémoire ultérieur. Je rappelle seulement que le spectroscope a une dispersion notablement plus forte que les spectroscopes de Potsdam et Poulkovo; il permet, par beau temps et avec une pose d'une heure, de photographier les spectres d'étoiles jusqu'à la grandeur 3,5.

Le spectre de l'étoile est photographié entre deux portions du spectre terrestre.

Digitized by Google

Pour les prismes de 60° du spectroscope de Paris, l'indice de réfraction de la raie $H\gamma$ de l'hydrogène est égal à 1,670, et le verre appartient à la série des flints dits lourds.

Dans le spectroscope de Potsdam, les prismes ne sont pas simples, mais composés et formés d'un gros prisme de flint de 95° que flanquent deux petits prismes inverses en crown. L'indice du flint pour la raie $H\gamma$ est 1,674. Donc, avec ces prismes, le déplacement par la température doit être au moins égal à celui constaté à Paris. A Poulkovo, d'autre part, les prismes sont identiques à ceux de Potsdam.

En résumé, avec ces appareils, le déplacement par la température est considérable et très voisin du déplacement moyen dû à la vitesse même de l'étoile, lequel est environ de 17^{km} par seconde.

Le rapprochement de ces nombres montre avec évidence combien l'erreur de température, spéciale aux observations photographiques, est importante.

Méthodes pour la correction de l'erreur de température. — Il importe donc d'éviter cette erreur ou tout au moins de la corriger.

Vogel admet que cette erreur n'influe pas sur le résultat, lorsque le milieu de la pose du spectre de comparaison coïncide avec le milieu de la pose de l'étoile. La pose pour le spectre de comparaison est en général de quelques minutes et est notablement plus courte que la pose de l'étoile. Vogel ne donne pas le temps de pose ordinaire du tube d'hydrogène employé; mais avec l'étincelle de fer la pose est de vingt-cinq secondes. Belopolski, qui a employé parfois le tube d'hydrogène disposé comme celui de Vogel, pose deux ou trois minutes. Pour ma part je projette successivement une étincelle de fer (pose une minute) et une étincelle d'hydrogène (pose deux minutes).

La pose du spectre de comparaison est faite toujours naturellement au milieu de la pose de l'étoile; mais cette précaution ne fournit qu'une première approximation pour la correction de l'erreur de température. Elle est suffisante seulement lorsque la décroissance de la température et le déplacement correspondants sont uniformes pendant la pose, et lorsque l'intensité de l'étoile

Digitized by Google

est elle-même aussi constante (¹). Or ces deux conditions ne sont presque jamais complètement réalisées. Aussi, pour les poses longues, j'ai été conduit à recommander et à employer des spectres dits *témoins* (*Comptes rendus*, 1894, t. CXIX, p. 1222), obtenus avec le diaphragme décrit ci-dessus. Ce sont trois spectres du fer juxtaposés à une certaine distance du spectre de l'étoile, photographiés au commencement, au milieu et à la fin de la pose de l'étoile. Ils permettent de corriger l'erreur due à des variations irrégulières de la température pendant la pose.

L'emploi des spectres témoins est un perfectionnement; mais la correction exacte n'est pas encore obtenue.

Recherches pour maintenir la température constante. — En réalité, avec ces spectroscopes sensibles aux variations de température, la seule solution vraiment satisfaisante est de maintenir la température de l'appareil constante pendant la pose de l'étoile. L'erreur est alors évitée complètement; d'autre part, la netteté du spectre n'est pas troublée, et la longueur des poses peut être augmentée.

Frappé par ces avantages j'ai donc cherché, dès le début de mes recherches sur la question à réaliser, la constance de la température pendant la pose du spectroscope; et j'ai employé successivement, dans ce but, deux dispositifs différents : un dispositif électrique et un dispositif à circulation d'eau.

Dispositif de chauffage électrique. — Les réflecteurs offrent, pour l'organisation du spectroscope, un inconvénient qui ne se présente pas avec les réfracteurs. Comme le collimateur prolonge l'axe optique du réflecteur, le spectroscope arrête une partie des rayons lumineux incidents de l'étoile (¹) et il convient de lui donner une largeur aussi faible que possible (²). Aussi ai-je

(¹) Si la source terrestre pose pendant longtemps, ses variations d'intensité, qui, avec la bobine d'induction, sont parfois notables, doivent aussi entrer en ligne de compte.

(²) En fait, le spectroscope a pu être disposé de manière à avoir la même largeur que la plate-forme métallique du microscope oculaire de l'observation ordinaire et la perte de lumière n'a pas été augmentée par l'adjonction du spectroscope.

Digitized by Google

essayé d'abord un mode de chauffage électrique qui pouvait être tout entier contenu dans l'intérieur de la boîte rigide du spectroscope.

La pièce principale est un thermomètre métallique, qui se contracte par l'abaissement de la température, et produit alors un contact électrique. A ce moment, un courant électrique passe dans de longs rubans métalliques disposés autour des prismes et des lentilles et produit une élévation de température qui rompt le contact. La température oscille alors entre deux limites rapprochées, dont l'intervalle est lié à la sensibilité du système.

Dispositif à circulation d'eau. Résultats. — Les premiers essais de ce dispositif ont été favorables, mais ont montré en même temps que la dépense d'installation et d'entretien serait grande. Aussi ai-je adopté définitivement un système de circulation d'eau autour du spectroscope.

On a fixé sur cinq faces du spectroscope (*fig.* 2) une boîte mince en cuivre divisée en compartiments juxtaposés, de manière que l'eau envoyée fut forcée de suivre un trajet sinueux tout autour de l'appareil. Les deux extrémités de la conduite spéciale du spectroscope sont reliées d'une part aux conduites de la Ville, d'autre part à un tuyau d'écoulement, à l'aide de gros tubes en caoutchouc disposés autour de la monture du réflecteur, de manière que la circulation ait lieu pour toutes les positions du réflecteur, et même pendant le passage d'un côté à l'autre du méridien.

La circulation d'eau a de grands avantages, l'eau arrivant à la température du sol supérieur, qui est justement la température moyenne de l'air. En faisant passer le courant liquide sans interruption, pendant les vingt-quatre heures, on maintient les prismes à une température constante très favorable à la netteté des images.

Mais les irrégularités de la pression d'eau, à certaines heures du jour, ne permettent pas de remplir exactement ce programme.

De toute façon, pendant la nuit, ce dispositif ajouté au spectroscope a permis de diminuer des deux tiers l'abaissement de température pendant la pose. Il offre donc des avantages réels et doit être recommandé.

Projet d'un appareil insensible aux variations de la température. — Les appareils précédents, qui diminuent la variation de température du spectroscope, sont réellement utiles et,

Digitized by Google

d'ailleurs, peuvent encore être perfectionnés. Mais j'ai pensé à une autre solution toute différente, qui conduirait plus simplement et plus sûrement au résultat cherché. Le spectroscope fixé au grand réflecteur est entièrement en fer ou acier, de manière que les dilatations soient faibles et égales dans toutes les parties. Mais il serait meilleur d'employer l'alliage au ferro-nickel qui a été récemment étudié par M. Guillaume, du Bureau international des Poids et Mesures, et qui a une dilatation quatre fois plus faible que le fer. D'autre part, les prismes de flint ont des variations notables d'indices de réfraction avec la température; mais les verres en crown ont des variations plus faibles; même certains crowns, étudiés par M. Fizeau, et probablement faciles à réaliser en grosses masses, ont un indice indépendant de la température. Le crown, il est vrai, est beaucoup moins dispersif que le flint; mais on remédie en partie à cet inconvénient en augmentant l'angle du prisme. Bref, il semble possible de réaliser, pour la recherche des vitesses radiales, un appareil dont le spectre soit insensible aux variations de la température.

Dans cet ordre d'idées, j'ai remplacé en 1896 deux prismes de flint lourd de 60° du spectroscope précédent par deux prismes de flint léger de 62° 30′. La dispersion est un peu moindre; mais le déplacement par la température a été diminué du tiers environ de sa valeur première.

Pour le choix d'un spectrographe pour vitesses radiales, il faut considérer non seulement la netteté et la dispersion du spectre, mais aussi la sensibilité aux variations de température.

Conclusion. — En résumé, cette longue discussion, consacrée aux erreurs principales rencontrées dans la mesure des vitesses radiales montre nettement que la précision maxima de l'observation photographique sera obtenue aux conditions suivantes :

Égalité de l'ouverture des faisceaux lumineux de la source terrestre et de l'étoile; égale netteté des deux images sur la fente du spectroscope.

Invariabilité de la position du spectre par les changements de la température extérieure.

La deuxième condition en particulier n'est encore réalisée complètement dans aucun des appareils en usage.

Digitized by Google

Prisme objectif.

Avantages et inconvénients du prisme objectif pour la mesure des vitesses radiales. — Le prisme objectif, que MM. Pickering et Lockyer ont employé avec un si grand succès, donne des spectres purs, intenses, et d'une dispersion notable avec des objectifs de moyenne et petite dimension, alors que le spectroscope à fente exige des objectifs puissants. Aussi, de nombreux projets ont été présentés, et même quelques essais ont été tentés pour appliquer le prisme objectif à la recherche des vitesses radiales. Mais une étude régulière de ces vitesses n'a été faite encore avec cet appareil dans aucun observatoire.

Le dispositif du prisme objectif est simple, puisqu'il suffit pour le réaliser, de fixer, suivant l'exemple donné par Fraunhofer, un grand prisme devant un objectif photographique ordinaire. Mais ce prisme, qui est tourné vers le ciel, subit aisément le refroidissement de l'air extérieur; et, de plus, la lunette est relativement très longue; aussi peut-on affirmer *a priori* que les erreurs de température et de flexion, si incommodes avec le spectroscope à fente, imposeront une gêne encore plus grande avec le prisme objectif.

Erreurs dans la recherche des vitesses radiales relatives. Méthodes diverses qui emploient les spectres stellaires seuls. — Le prisme objectif, au moins dans sa forme ordinaire, ne se prête pas à la juxtaposition d'un spectre terrestre de comparaison; aussi a-t-on pensé d'abord à l'utiliser seulement pour reconnaître les vitesses radiales relatives, c'est-à-dire les différences de vitesse entre deux étoiles. Il est en effet facile, avec cet appareil, de juxtaposer deux spectres d'étoiles. Mais les résultats précédents sur le spectroscope à fente indiquent aussitôt que, dans ce cas, les erreurs de température et de flexion seront très notables.

Pour éliminer l'erreur de température on peut, en imitant les procédés du spectroscope à fente, intercaler la pose d'une étoile entre deux demi-poses d'une autre étoile; mais, dans ce cas, la

Digitized by Google

manœuvre est beaucoup plus compliquée et, d'autre part, l'erreur de flexion subsiste toujours.

M. Pickering a proposé et essayé récemment (*Astrophysical Journal*, vol. IV, p. 370) une méthode différente, très ingénieuse, qui s'applique à deux étoiles voisines, dont les spectres sont non plus juxtaposés, mais placés sur le prolongement l'un de l'autre. Le prisme objectif peut être tourné de manière que cette condition soit réalisée. Puis on fait une seconde épreuve en tournant le prisme de 180°. Ensuite on applique les deux épreuves l'une sur l'autre, de manière à faire coïncider les mêmes raies, Hγ par exemple, d'un même spectre dans les deux plaques, et l'on note l'écartement des mêmes raies dans l'autre spectre. Cet écartement correspond au double de la vitesse radiale relative.

Dans cette méthode la flexion, qui agit également sur les deux spectres (1), n'intervient pas. Mais il n'en est pas de même de la température, à cause de la différence des dispersions d'une même radiation dans les deux spectres d'une même plaque (2).

MM. Orbinsky et Frost (*Astronomische Nachrichten*, n° 3289) ont proposé de rechercher la vitesse radiale en mesurant simplement l'élargissement du spectre stellaire, dû au déplacement inégal des diverses raies pour une vitesse donnée de l'astre. Mais les variations de température produisent un effet semblable; aussi l'idée très originale de MM. Orbinsky et Frost ne s'applique-t-elle qu'aux vitesses relatives d'étoiles photographiées en même temps sur une même plaque. De plus, même dans ce cas, les variations de longueur du spectre, dues aux distorsions de l'objectif et surtout aux dispersions différentes du prisme pour les diverses étoiles, exigent des corrections dont les erreurs semblent du même ordre que le déplacement cherché. Aussi cette méthode ne semble possible que pour des étoiles très voisines ayant des vitesses radiales très différentes.

D'ailleurs, la méthode ne donne pas la différence des vitesses

---

(1) A condition que la monture ne subisse aucune torsion, ou que le petit déplacement de la plaque dû à la flexion soit un mouvement de translation, sans rotation.

(2) M. Pickering, que j'ai eu l'honneur de voir récemment en Amérique, m'a d'ailleurs annoncé que les premiers essais de la méthode n'avaient pas été satisfaisants.

Digitized by Google

prises avec leurs signes, mais des vitesses en valeur absolue; en outre, elle exige des poses très longues et donne une précision relativement faible.

M. Maunder (*The Observatory*, février 1896) a proposé de mesurer avec un prisme objectif la distance des raies stellaires à l'image de l'étoile fournie par l'objectif, en dehors du prisme, et a indiqué dans ce but plusieurs dispositifs très ingénieux. Mais, dans ce cas encore, les variations de température introduisent des erreurs de l'ordre du déplacement à mesurer.

Emploi des spectres terrestres pour corriger les erreurs de température et de flexion. — Cette longue énumération fait ressortir une fois de plus la gêne due aux flexions et aux variations de température; dans le spectroscope à fente, cet obstacle est tourné grâce à l'emploi judicieux des spectres terrestres. Aussi me suis-je posé la question suivante : Ne pourrait-on pas appliquer ces spectres terrestres au prisme objectif?

J'ai présenté en 1895 et 1896 (*Bulletin de la Société astronomique, Astronomische Nachrichten, The Observatory*) une méthode et un dispositif qui assurent la recherche des vitesses radiales relatives avec le prisme objectif et les spectres terrestres. Mais, comme on le verra plus loin, on peut à la rigueur, en ajoutant quelques organes, mesurer aussi directement la vitesse absolue.

On place devant le prisme objectif un petit collimateur qui n'arrête qu'une faible partie des rayons incidents, et a la direction de ces derniers; ce collimateur forme, avec le prisme et la grande lunette un spectroscope à fente, qui fournit un spectre terrestre. En même temps que l'on photographie le spectre stellaire on photographie le spectre terrestre, situé à la même distance du centre de la plaque. Puis, ensuite, on juxtapose un second spectre stellaire au précédent, et de même aussi un second spectre terrestre à côté du premier.

Le déplacement entre les deux spectres terrestres donne les erreurs dues à la température et à la flexion; si on le retranche du déplacement des spectres stellaires on a la vitesse radiale relative.

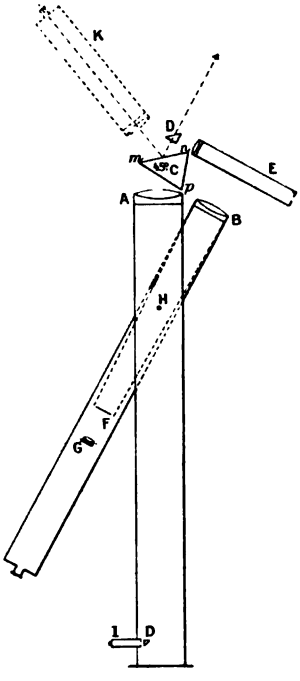
Détails du dispositif proposé pour un objectif de $0^{m},25$. —

Digitized by Google

Pour fixer les idées je donne ici un croquis du dispositif proposé qui est appliqué à un objectif ayant $0^m,25$ d'ouverture et $2^m,50$ de distance focale.

Le prisme C, dont les faces ont aussi $0^m,25$, a un angle de

Fig. 3. — Schéma du dispositif proposé pour la recherche des vitesses radiales avec le prisme-objectif.



A, objectif photographique de $0^m,25$; B, viseur de $0^m,20$; C, prisme de 45° en flint de $0^m,25$; DD, prismes à réflexion totale; E, collimateur de $0^m,06$; F, réticule du viseur; G, lentille d'agrandissement; H, axe de déclinaison de l'équatorial; I, lunette pour observer les parties rouges et jaunes du spectre; K, objectif supplémentaire destiné aux rayons réfléchis sur la première face du prisme.

40° ou 45°, de manière que le spectre ait, entre les raies F et K, une longueur de $0^m,05$ à $0^m,06$, et puisse aisément donner la vitesse radiale à $\pm 2^{km}$ par seconde, avec les étoiles jusqu'à la quatrième grandeur inclusivement (¹).

Nota. — Le viseur B est en arrière de la lunette photographique.

(¹) Les belles recherches de Pickering et Lockyer, avec le prisme objectif, per-

Digitized by Google

D'autre part, le viseur B a $0^m,20$ d'ouverture avec une faible distance focale de $1^m,20$. Aussi l'image de l'étoile et du réticule en F est reprise par une lentille d'agrandissement, ce qui permet à l'observateur d'avoir une position commode.

Le collimateur E et son petit prisme à réflexion totale D ont $0^m,06$ d'ouverture, soit le quart de l'ouverture du grand objectif, si bien que le faisceau de lumière arrêté par le petit prisme est seulement la seizième partie du faisceau total (¹).

Les objectifs A et B, le prisme objectif C, le prisme à réflexion totale D et le collimateur E doivent être invariablement liés pour toutes les positions de l'équatorial. Comme toutes ces pièces sont réunies dans un espace restreint, cette condition peut être exactement réalisée; on fixe ces pièces à un bâti de fonte d'une seule coulée et de forme appropriée, en employant le fer seul qui a une dilatation voisine de celle du verre. De plus, le réticule F, qui, avec ses vis micrométriques, peut être léger, est fixé directement au bâti des objectifs par un tube spécial indépendant de la monture du viseur, et fait aussi corps avec les pièces précédentes.

De plus, pour que l'union des pièces de fer et de verre soit plus intime, je propose les montures à métaux compensés (par exemple : fer et cuivre, fer et aluminium) que j'ai employées déjà en 1892 pour les prismes du grand spectroscope du réflecteur de $1^m,20$. Le verre est retenu par une monture de cuivre qui est fixée à son tour au fer, les dimensions étant telles que la dilatation du fer, diminuée de la dilatation du cuivre, soit exactement égale à la dilatation du verre.

Avec ces précautions, l'invariabilité des angles entre les axes optiques des objectifs et les plans des prismes peut être assurée pour toutes les positions de l'équatorial.

D'ailleurs, le bâti des pièces optiques est fixé au bâti H des axes de déclinaison, de manière à ne pas souffrir des flexions particulières que ce dernier peut avoir. Les montures du viseur et de la lunette photographiques sont reliées au seul bâti de déclinaison.

---

mettent d'affirmer que les étoiles de quatrième grandeur seront obtenues avec une pose d'une heure au moins.

(¹) Le petit prisme à réflexion totale peut être supprimé; alors le collimateur est placé et maintenu dans la direction des rayons incidents.

Digitized by Google

En avant de la plaque photographique, on a placé un petit oculaire coudé D, I, qui reçoit la partie jaune et rouge du spectre terrestre. Cet oculaire sert aux observations oculaires, même en vue de la vitesse radiale, et d'autre part permet de rectifier les erreurs de flexion dues à la monture, si la plaque photographique est rendue mobile dans son plan.

Recherche possible des vitesses absolues. — Cependant ce dispositif se prête aussi, dans une certaine mesure, à la recherche des vitesses absolues, si l'on ajoute un objectif K, qui reçoit les rayons du collimateur et de l'étoile réfléchis sur la première face du prisme. La fente du collimateur, que je suppose mobile dans son plan, porte un petit diaphragme qui cache son milieu. On déplace alors la fente de manière que le milieu noir de la fente éclairée et l'étoile soient en coïncidence dans la lunette K. Cette dernière lunette n'intervient que pour ce réglage; elle n'est pas fixée au bâti des grands objectifs; elle peut être déplacée ou coudée pour la commodité de l'observation.

Dans ces conditions, le spectre de l'étoile se trouve photographié entre deux moitiés du spectre de comparaison, ainsi que dans la disposition adoptée à Paris, avec le spectroscope à fente. De plus, le déplacement des raies de même origine des deux spectres correspond à la vitesse radiale absolue. Mais, comme la coïncidence des deux images de l'étoile et de la fente est donnée par de petits objectifs, dans des conditions peu favorables, la précision de la mesure peut en souffrir.

De toute façon cette disposition des spectres terrestres et stellaires ([1]), imaginée pour les vitesses absolues, convient très bien pour les vitesses relatives et est préférable à la disposition préconisée plus haut, qui comporte deux spectres terrestres et célestes juxtaposés séparément.

Les flexions de la monture sont en effet moins gênantes, et la vitesse relative est égale au déplacement des premiers spectres stellaire et terrestre, diminué du déplacement des seconds.

([1]) La fente du collimateur est supposée réglée de façon que les raies terrestres soient perpendiculaires au spectre stellaire, considéré dans sa longueur.

Digitized by Google

Objections. Dispositifs de Hale et Wadsworth. — Cependant Keeler (*Astrophysical Journal,* vol. III, p. 111; 1896) a fait à ce dispositif le reproche suivant, qui est juste d'ailleurs : les spectres terrestres sont donnés par un petit objectif et ont *théoriquement* une définition moindre que les spectres stellaires.

Mais, pratiquement, cette différence ne gêne pas, lorsque l'on prend, comme spectre terrestre, le spectre du fer ou du platine. Les raies de ces métaux sont très fines et nettes; obtenues avec un collimateur de $0^m,50$, un prisme de 45° et une chambre de $0^m,60$, et ensuite agrandies quatre fois, elles fournissent un pointé encore plus précis que les raies stellaires, en général un peu diffuses (¹).

Hale et Wadsworth (*Astrophysical Journal,* vol. IV, p. 71; 1896) ont proposé ensuite un autre dispositif, basé aussi sur l'emploi des spectres terrestres, et qui évite l'inconvénient signalé par Keeler.

Le petit collimateur est supprimé; le côté *mn* du prisme objectif est perpendiculaire au rayon incident de l'étoile. De plus, l'oculaire ID est remplacé par une fente collimatrice qui forme, avec le grand objectif, un collimateur de spectroscope à fente. Les rayons issus de cette fente, réfléchis sur le plan *mn*, forment alors sur la plaque, comme dans la disposition dite de *Littrow* un spectre plus dispersé que celui de l'étoile.

Mais la fixité de l'axe du collimateur, qui était un avantage du dispositif précédent, n'est alors plus certaine à cause de la grande longueur de la lunette. De plus, les corrections de la température et de la flexion, qui incombent au spectre terrestre, ne peuvent être connues exactement; car, si dans le spectre terrestre l'erreur de flexion est exactement le double de l'erreur dans le spectre stellaire, la dispersion du spectre terrestre, et par suite l'erreur de température, n'est pas le double de la dispersion du spectre céleste.

Dans un autre dispositif, proposé par Hale et Wadsworth, le

(¹) On suppose toujours que les pièces optiques sont invariablemont liées, ou que la flexion du petit collimateur, agrandie quatre fois, est encore négligeable par rapport au déplacement cherché.

Digitized by Google

prisme est doublé d'un second prisme identique, symétrique du premier par rapport à la face *mn*.

La dispersion des deux spectres est alors la même; mais l'erreur de flexion est toujours dans un cas deux fois plus grande que dans l'autre. La correction exacte est impossible.

Dispositif proposé pour corriger l'erreur de flexion. — En réalité les dispositifs de Hale et Wadsworth, avantageux à certains égards, sont applicables seulement s'il n'y a pas de flexion. Or, avec les longues lunettes, la flexion est presque inévitable et est une cause de trouble dans un grand nombre de recherches; mais on peut chercher à la corriger par de petits mouvements lents et incessants, comme dans l'opération qui consiste à maintenir une étoile sur l'axe optique d'un viseur.

Il suffit de fixer à la grande lunette deux collimateurs, assez distants l'un de l'autre, et organisés comme les lunettes méridiennes qui visent le nadir. Le bain de mercure est remplacé par un miroir plan argenté qui est fixé à la monture du grand objectif en même temps que le petit objectif du collimateur. D'autre part le réticule du collimateur est fixé au châssis photographique ou au micromètre de la grande lunette, lequel est mobile dans son plan, par un double mouvement de translation et un mouvement de rotation. Si, dans les deux collimateurs, on maintient la coïncidence du réticule et de son image, la flexion de la lunette se trouve corrigée; mais la complication qui en résulte est grande, et l'observateur qui aurait en mains un appareil de ce genre devrait simultanément suivre avec trois lunettes, et aurait une fatigue triple.

Résumé. — En résumé, par les méthodes et dispositifs ci-dessus décrits, la recherche des vitesses radiales relatives ou même absolues est abordable avec le prisme objectif et les lunettes de petite et moyenne ouverture; mais la complication des appareils est notable; et l'observateur a l'obligation stricte de maintenir l'étoile exactement sur un réticule pendant la pose; ce qui impose une grande fatigue.

De plus, avec le prisme objectif, l'influence des perturbations atmosphériques et des variations de température est grande,

Digitized by Google

plus grande qu'avec le spectroscope à fente qui donne seul d'ailleurs avec précision la vitesse absolue.

Aussi les observateurs qui disposent de grands objectifs donneront la préférence au spectroscope à fente, malgré toutes les incommodités qui sont propres aux grands instruments.

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE;

PAR M. H. POINCARÉ.

Dans le numéro de décembre 1897 je me suis occupé du développement de la fonction perturbatrice et j'ai étudié les coefficients de ce développement dans le cas où les excentricités sont nulles et les inclinaisons notables.

J'ai montré que ces coefficients peuvent, à l'aide de certaines relations de récurrence, se déduire de quelques-uns d'entre eux dont le nombre est *au plus* égal à 5.

J'ai montré, en outre, qu'ils satisfont à des équations différentielles linéaires dont l'ordre est *au plus* égal à 5.

Mais on peut aller plus loin.

Nous emploierons les mêmes notations que dans le travail auquel je renvoie.

Nous observerons que F ne contient que des termes d'ordre pair en x et y de telle sorte que

$$F(x, y) = F(-x, -y).$$

Il résulte de là que les coefficients $A(\alpha, \beta, s)$ sont nuls si $\alpha + \beta$ est impair.

Il suffira donc d'envisager les intégrales de la forme

$$\iint HF^s \frac{dx\,dy}{xy}, \tag{1}$$

où H est un polynome de degré m satisfaisant non seulement aux conditions

$$H(x, y) = H(y, x) = H\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

mais, en outre, à la condition

$$H(x, y) = H(-x, -y).$$

Digitized by Google

Le polynome H contient alors

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

coefficients arbitraires.

Nous sommes conduits de même à supposer que les polynomes P et Q satisfont non seulement aux conditions

$$P(x, y) = -P\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = Q(y, x),$$

mais à la condition

$$P(x, y) = P(-x, -y).$$

Il est clair, en effet, que, si P satisfait à cette condition, il en est de même de Q et de H.

Un polynome P, assujetti à ces conditions et de degré $m-1$, contient alors

$$m^2 - m$$

coefficients arbitraires.

Enfin l'identité

$$QF^{s+1}\frac{dx}{x} - PF^{s+1}\frac{dy}{y} = d(SF^{s+2})$$

nous montre que

$$S(x, y) = S(-x, -y).$$

Un polynome S, de degré $m-2$, satisfaisant aux conditions

$$S(x, y) = -S(y, x) = S\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = S(-x, -y),$$

contient

$$\frac{(m-2)(m-3)}{2}$$

coefficients arbitraires.

Le nombre des expressions de la forme (1) qui restent indépendantes est donc

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} - (m^2 - m) = 4.$$

Donc tous les coefficients du développement peuvent se déduire de quatre d'entre eux seulement.

Chacun d'eux satisfait à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE PLANÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE D'ALGER (équatorial coudé de $0^m,318$ d'ouverture),

PAR MM. RAMBAUD ET SY.

Dates.	T. m. d'Alger.	ΔÆ.	Δ(Ω).	N. de c.	Æ app.	log f. p.	(Ω) app.	log f. p.	✱	Obs.
					(162) Laurentia.					
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″			
MAI 8.	10. 4.37	+0.12,26	— 5.53,7	12:12	14. 5.50,60	$\bar{1}$,049n	—12.55.44,5	0,825	1	R
8.	10.23. 1	+0.11,68	— 5.54,4	12:12	14. 5.50,02	$\bar{2}$,866n	—12.55.45,2	0,827	1	S
10.	9.47.23	—1.18,91	— 2.19,7	15:10	14. 4.19,43	$\bar{1}$,107n	—12.52.10,5	0,824	1	R
10.	10. 3.12	—1.19,40	— 2.17,8	15:10	14. 4.18,94	$\bar{2}$,979n	—12.52. 8,6	0,825	1	S
					(113) Amalthea.					
MAI 20.	9.48.33	+2.44,28	+12.27,7	11:8	15.51. 3,69	1,406n	—11.36. 2,0	0,805	2	R
20.	10.18. 7	+2.42,88	+12.29,9	12:8	15.51. 2,29	$\bar{1}$,300n	—11.35.59,8	0,811	2	S
22.	11.19. 7	+1.38,29	— 1. 5,9	14:10	15.49. 2,43	$\bar{1}$,747n	—11.32.52,3	0,818	3	R
22.	11.57.43	+1.36,86	— 1. 4,7	15:10	15.49. 1,00	$\bar{2}$,407n	—11.32.51,1	0,819	3	S
24.	9.15. 8	—1.12,23	+ 1.22,6	14:10	15.47.11,93	$\bar{1}$,443n	—11.30.23,7	0,801	3	R
26.	9. 5.49	—2. 5,71	+ 3.30,1	14:10	15.45.18,47	$\bar{1}$,444n	—11.28.16,1	0,801	3	R
					(33) Polyhymnia.					
MAI 20.	11.22.59	+1.10,75	— 0.43,7	12:8	16.48. 4,64	$\bar{1}$,299n	—25. 6.39,1	0,878	4	S
20.	11.55.13	+1. 9,65	— 0.45,4	12:8	16.48. 3,54	$\bar{1}$,112n	—25. 6.40,8	0,886	4	R
21.	9.56.26	+0.20,43	— 0. 6,1	10:10	16.47.14,34	$\bar{1}$,551n	—25. 6. 1,6	0,844	4	S
21.	10.19.16	+0.19,50	— 0. 3,8	12:10	16.47.13,41	$\bar{1}$,499n	—25. 5.59,3	0,856	4	R
26.	10.35.54	—0.50,69	— 7.52,0	14:14	16.42.30,56	$\bar{1}$,373n	—25. 1.31,8	0,872	5	R
28.	11.24.26	—2.51,23	— 5.34,5	10:10	16.40.30,06	$\bar{1}$,045n	—24.59.14,4	0,887	5	R
29.	10.17.41	—3.48,34	— 4.22,5	10:6	16.39.32,96	$\bar{1}$,386n	—24.58. 2,4	0,871	5	R
					(130) Elektra.					
JUIN 5.	8.55.12	+0.23,83	— 1.41,6	16:12	17.16.34,92	$\bar{1}$,568n	+ 7.22.17,2	0,668	7	S
5.	9.18.41	+0.23,16	— 1.42,8	16:10	17.16.34,25	$\bar{1}$,527n	+ 7.22.16,0	0,661	7	R
2.	9.49.31	+0.10,83	+ 9.43,1	16:12	17.18.51,45	$\bar{1}$,493n	+ 7.20.56,1	0,657	6	R
2.	10. 5.47	+0.10,17	+ 9.43,5	18:10	17.18.50,79	$\bar{1}$,454n	+ 7.20.56,5	0,653	6	S
3.	10.28.20	—0.35,96	+10.27,1	16:10	17.18. 4,68	$\bar{1}$,375n	+ 7.21.40,3	0,647	6	R
					(37) Fidès.					
JUIN 9.	11.32.41	—1.19,67	— 3.39,4	15:10	18. 9.50,54	$\bar{1}$,277n	—27.57.46,2	0,890	8	S
9.	11.48.37	—1.20,28	— 3.39,7	14:10	18. 9.49,93	$\bar{1}$,187n	—27.57.46,5	0,895	8	R
10.	9.44.37	—1. 4,23	— 0.46,7	15:10	18. 8.58,22	$\bar{1}$,584n	—27.58.30,7	0,844	9	S
10.	10. 0.55	—1. 5,14	— 0.47,6	15:10	18. 8.57,31	$\bar{1}$,559n	—27.58.31,6	0,851	9	R

Digitized by Google

Dates.	T. m. d'Alger.	ΔR.	ΔD.	N. de c.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★	Obs.
				(416)						
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″			
Sept. 25.	9.44.47	—0.59,26	+ 3. 5,5	18:12	0.33.58,30	$\bar{1}$,472 n	—14.23.25,3	0,814	10	S
28.	9.34.09	—3.46,17	— 4.46,4	14:10	0.31.11,41	$\bar{1}$,462 n	—14.31.17,4	0,815	10	S
				(11) Parthénope.						
Sept. 25.	10.44.11	—1.40,09	+ 8.54,1	21:12	1.12.49,46	$\bar{1}$,401 n	— 0.16.46,9	0,724	11	S
(a) 28.	10.26.25	+0.43,95	+ 8. 1,5	6:6	1.10.23,17	$\bar{1}$,412 n	— 0.37.14,2	0,727	12	S
30.	9.55.19	—0.56,04	— 5.18,6	18:14	1. 8.43,21	$\bar{1}$,469 n	— 0.50.34,2	0,729	12	S

(a) Des nuages viennent interrompre l'observation.

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1897,0.	Réd. au j.	D moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	10,0	14. 5.35,28	+3,06	—12.49.30,9	—19,9	½ (Lamont, n° 1492 + Seeliger B. I., n° 9910).
1.	»	»	+3,06	»	—19,9	Id.
2.	9,5	15.48.16,03	+3,38	—11.48.13,8	—15,9	Schjellerup., n° 5622.
3.	9,0	15.47.20,74	+3,40	—11.31.30,5	—15,9	Weisse I, n° 861.
3.	»	»	+3,42	»	—15,8	Id.
3.	»	»	+3,44	»	—15,7	Id.
4.	9,0	16.46.50,20	+3,69	—25. 5.43,9	—11,5	½ (Cordoba, n° 22825 + W suppl. n° 12894).
4.	»	»	+3,71	»	—11,6	Id.
5.	7,9	16.43.17,47	+3,78	—24.53.27,8	—12,0	½ (Cordoba, n° 22727 + W suppl., n° 12847).
5.	»	»	+3,82	»	—12,1	Id.
5.	»	»	+3,83	»	—12,1	Id.
6.	9,3	17.18.37,31	+3,31	+ 7.11.23,4	—10,4	B. B., t. VI, n° 3355.
6.	»	»	+3,33	»	—10,2	Id.
7.	9,5	17.16. 7,74	+3,35	+ 7.24. 8,8	—10,0	B. B., t. VI, n° 3343.
8.	8,0	18.11. 6,07	+4,14	—27.54. 2,9	— 3,9	½ (Cordoba, n° 24903 + O. A., n° 17964).
9.	8,8	18. 9.58,29	+4,16	—27.57.40,0	— 4,0	½ (Cordoba, n° 24875 + O. A., n° 17933).
10.	8,5	0.34.53,11	+4,45	—14.27. 0,1	+29,3	½ (B. B., t. VI, n° 51 + Seeliger B. I., n° 367.
10.	»	»	+4,47	»	+29,1	Id.
11.	9,0	1.14.25,23	+4,32	— 0.26.10,2	+29,2	½ (Weisse I, n° 185 + Seeliger B. I., n° 649).
12.	10,0	1. 9.34,86	+4,36	— 0.45.45,0	+29,3	⅓ (B. B., t. VI, n° 190 + Seel. B. I., n° 628 + Seel. B. II., n° 367).
12.	»	»	+4,39	»	+29,4	Id.

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

LEBEUF (A.). — I. Sur une nouvelle démonstration des polynomes Hansen-Tisserand. Applications. — II. Tables pour le calcul des perturbations de Jupiter sur les petites planètes. (Thèse soutenue à la Sorbonne le 22 juin 1897).

I. Le développement de la fonction perturbatrice, suivant les puissances du rapport $\frac{r}{r'}$ et l'anomalie excentrique u comme argument des séries trigonométriques, permet d'éviter les séries infinies par rapport aux puissances de l'excentricité et du sinus de l'inclinaison mutuelle des orbites.

Il a été indiqué et appliqué d'abord par Hansen à l'étude de la comète de Encke. Soit

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho^k} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\sigma)^k} = \sum \frac{r^n}{r'^{n+2k}} P^{n,k}_{(\sigma)},$$

où

$$P^{n,k}_{(\sigma)} = \Sigma A^{n,k}_{i,j}(\mu, \nu) \cos ix \cos jy.$$

La détermination des fonctions $A^{n,k}_{i,j}(\mu, \nu)$ constitue un problème intéressant sur lequel M. Tisserand avait particulièrement appelé l'attention après l'avoir lui-même résolu dans les hypothèses $k = 1$ et $k = \frac{1}{2}$. Étudié successivement par MM. Callandreau, Radau, Appell, Stieltjes, il a été résolu dans le cas général par MM. Appell et Radau.

Le Mémoire de M. Lebeuf débute par deux nouvelles solutions de ce problème. L'une dérive des propriétés des fonctions hypergéométriques à deux variables de M. Appell. Substituons

$$(5)\qquad \begin{cases} (2\sigma)^n = 4 \sum \dfrac{(1, n)\mu^{2f}}{(1, i)(1, j)(1, f)(i+1, f)} \\ \qquad \times F\left(-f, -(i+f), j+1, \dfrac{\nu^2}{\mu^2}\right) \mu^i \nu^j \cos ix \cos jy \end{cases}$$

dans

$$(2)\qquad P^{n,k}_{(\sigma)} = \frac{(k, n)}{(1, n)} \Sigma (-1)^{\varpi} \frac{(n, -2\varpi)}{(1, \varpi)(k+n-1, -\varpi)} (2\sigma)^{n-2\varpi};$$

nous posons

$$(\alpha, m) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1);$$

on reconnaît la notation de M. Appell et il vient après de légères transformations

$$(8)\qquad P^{n,k}_{(\sigma)} = 4 \Sigma A^{n,k}_{i,j} \mu^i \nu^j \cos ix \cos jy$$

Digitized by Google

avec

$$(7)\quad \begin{cases} A_{i,j}^{n,k} = (-1)^f \dfrac{(k,\, i+j+f)}{(1,\, i)(1,\, j)(1,\, f)} \\ \qquad\qquad \times F_4(-f,\, k+n-f,\, i+1,\, j+1.\, \mu^2,\, \nu^2). \end{cases}$$

La fonction F_4 est la fonction de M. Appell.

$$F_4(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \gamma',\, x,\, y) = \sum \frac{(\alpha,\, m+n)(\beta,\, m+n)}{(\gamma,\, m)(\gamma',\, n)(1,\, m)(1,\, n)}\, x^m y^n.$$

L'introduction de la fonction

$$F_2(\alpha,\, \beta,\, \beta',\, \gamma,\, \gamma',\, x,\, y) = \sum \frac{(\alpha,\, m+n)(\beta,\, m)(\beta',\, n)}{(\gamma,\, m)(\gamma',\, n)(1,\, m)(1,\, n)}\, x^m y^n$$

permet ensuite d'obtenir simplement une expression due à M. Tisserand

$$(12)\quad A_{i,i}^{n,k} = \frac{(k,\, 2i'+f)(k+i',\, f)}{(1,\, i)(1,\, f)(1,\, i+f)}\, F\left(-f,\, i+\frac{1}{2},\, k+n-f;\; 2i+1,\, k+i,\, 4\mu\nu\right).$$

Dans cette formule

$$F(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \alpha',\, \beta',\, y) = \sum \frac{(\alpha,\, m)(\beta,\, m)(\gamma,\, m)}{(\alpha',\, m)(\beta',\, m)(1,\, m)}\, y^m.$$

La notation de M. Appell se prête également avec une grande facilité au développement des polynomes $A_{i,j}^{n,k}$ en fonction d'une seule des variables μ ou ν. Soit à conserver la variable $\nu = \sin^2\frac{I}{2}$.

On a

$$\begin{aligned} &F_4(-\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \gamma',\, \mu^2,\, \nu^2) \\ &\quad = \sum \frac{(-\alpha,\, m)(\beta,\, m)}{(1,\, m)(\gamma',\, m)}\, \nu^{2m} F(-\alpha+m,\, \beta+m,\, \gamma,\, \mu^2). \end{aligned}$$

Le polynome $F(-\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \mu^2) = F(-\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, 1-2\nu+\nu^2)$ se transforme par l'application de la formule d'Euler et l'emploi des identités provenant de la formule générale

$$(a)\qquad 2^p(a,\, p) = \sum \frac{(p,\, -2q)}{(1,\, q)}\, (a,\, q)(2a+2q,\, p-2q);$$

on trouve finalement en revenant aux paramètres de la question

$$(20)\quad \begin{cases} A_{i,j}^{n,k} = \dfrac{(k,\, i+j+f)(k+j,\, f)}{(1,\, j)(1,\, f)(1,\, i+f)} \\ \quad \times \Big[F(-2f,\, k+n-f,\, k+j,\, \nu) \\ \qquad + \dfrac{f(k+n-f)(i+f)(k+f-1)}{1,(k+j,\, 2)(j+1)}\, \nu^2 F(-2f+2,\, k+n-f+1,\, k+j+2,\, \nu) \Big] \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Digitized by Google

En substituant μ à ν, i à j et réciproquement, on a $A_{i,j}^{n,k}$ en fonction de μ.

Grâce aux identités

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - 2\frac{\nu}{\nu-1} + \left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^2, \qquad \frac{\nu^2}{\mu^2} = 1 - 2\frac{1}{1-\nu} + \frac{1}{(1-\nu)^2},$$

$$\frac{1}{\nu^2} = 1 - 2\frac{\nu-1}{\nu} + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2, \qquad \frac{\mu^2}{\nu^2} = 1 - 2\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2},$$

on déduit ensuite de ce qui précède $A_{i,j}^{n,k}$ en fonction de $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{1-\nu}$, $\frac{1-\nu}{\nu}$, $\frac{\nu-1}{\nu}$.

On trouve en particulier

$$(29)\quad A_{i,j}^{n,\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}, i+j+f\right)\left(j+\frac{1}{2}, f\right)}{(1,j)(1,f)(1,i+f)} F(-2f, n-2f+1, 2j+1, \nu).$$

$$(30)\quad A_{i,j}^{n,1} = \frac{1, i+j+f)(j+1, f)}{(1,j)(1,f)(1,i+f)} F^2(-f, n-f+1, j+1, \nu).$$

Il faudrait compléter cette solution par des relations récurrentes entre $A_{i,j}^{n,k}$. Le Mémoire donne celles-ci en partant des équations différentielles auxquelles satisfait $P_{(\sigma)}^{n,k}$. Voici les plus utiles :

$$(A)\quad (n+1)A_{i,j}^{n,k} = (n+k)\left\{\begin{matrix} \mu[A_{i-1,j}^{n,k} + A_{i+1,j}^{n,k}] \\ + \nu[A_{i,j-1}^{n,k} + A_{i,j+1}^{n,k}] \end{matrix}\right\} - (n-1+2k)A_{i,j}^{n-1,k},$$

$$(B)\quad \left\{\begin{matrix} A_{i,j}^{n+1,k} = A_{i,j}^{n-1,k} + \frac{n+k}{i}\mu\{A_{i-1,j}^{n,k} - A_{i+1,j}^{n,k}\}, \\ A_{i,j}^{n+1,k} = A_{i,j}^{n-1,k} + \frac{n+k}{j}\nu\{A_{i,j-1}^{n,k} - A_{i,j+1}^{n,k}\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right.$$

La formation des équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont $P^{n,k}$ et $A_{i,j}^{n,k}$ est basée tout entière sur la méthode déjà appliquée par M. Tisserand avec $k = \frac{1}{2}$. Il suffit, en effet, de laisser k arbitraire et de chercher les conditions de possibilité pour l'élimination des fonctions choisies par M. Tisserand entre les équations correspondantes, pour démontrer très simplement :

1° *Que la fonction* $P^{n,k}$ *ne satisfait à une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre par rapport à* ν, x, y, *que pour* $k = \frac{1}{2}$.

2° *Que pour* $k \neq \frac{1}{2}$, $P^{n,k}$ *satisfait toujours à une équation du troisième ordre.*

Digitized by Google

Les équations différentielles du deuxième et du troisième ordre, auxquelles on aboutit ensuite, sont linéaires avec les points singuliers o, 1, ∞. En appliquant les théories connues, on retrouve très facilement les résultats de la première méthode.

Signalons, pour terminer, l'application des recherches de M. Goursat sur les séries hypergéométriques d'ordre supérieur. Elles conduisent presque sans calculs à la formule (12) donnant $A_{i,j}^{n,k}$ et, à ce résultat remarquable :

Les fonctions $A_{i,j}^{n,1}$ *sont les seules qui puissent se mettre sous forme d'un produit de polynomes hypergéométriques du premier ordre.*

Le développement, tel qu'il vient d'être exécuté, ne renferme pas de séries infinies par rapport aux puissances du sinus de l'inclinaison mutuelle des orbites. Le Chapitre II donne les formules nécessaires pour obtenir le même résultat avec l'excentricité e, l'anomalie excentrique, u étant l'argument des séries trigonométriques. Notons, en outre, que les équations (A) (*Mécanique céleste*, T. I), auxquelles on arrive généralement par d'autres considérations, résultent naturellement de ce mode de développement.

Avec l'équation

$$\frac{1}{\rho^k} = \frac{1}{r'^{2k}} 4 \sum\sum \left(\frac{r}{r'}\right)^n A_{i,j}^{n,k} \cos ix \cos jy$$

se pose maintenant ce problème :

Développer les fonctions $\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} mw$ *suivant les puissances de l'excentricité et les cosinus et sinus des multiples de l'anomalie excentrique u, m et n étant deux nombres entiers, le premier positif, le deuxième positif ou négatif.*

La solution, imitée des procédés de la *Mécanique céleste*, T. I, donne facilement les coefficients cherchés à l'aide des fonctions $Y_i^{n,m}$ qui sont définies par l'identité

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n E^{mw\sqrt{-1}} = \Sigma Y_i^{n,m} E^{iu\sqrt{-1}}$$

et qui s'expriment dans tous les cas, au moyen de polynomes hypergéométriques et jouissent par conséquent de la propriété d'être reliées les unes aux autres par des relations récurrentes.

Le problème analogue, avec l'anomalie moyenne ζ pour argument, nous conduit à une relation

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n E^{mw\sqrt{-1}} = \Sigma X_i^{n,m} E^{i\zeta\sqrt{-1}}$$

et à l'expression des coefficients $X_i^{n,m}$ à l'aide de $Y_i^{n,m}$ et des fonctions J

Digitized by Google

de Bessel. Ce sont les résultats du Chap. XV, T. I de la *Mécanique céleste*. Ils ont l'avantage, pour les applications numériques, d'être composés de termes $Y_i^{n,m}$, calculables par voie récurrente et de fonctions J, que l'on tire des Tables de Bessel ou de Hansen.

Citons les relations entre les fonctions hypergéométriques $X_0^{n,m}$, à cause de leur importance pour le calcul des inégalités séculaires.

$$(V)\qquad X_0^{n,m+2} - X_0^{n,m} = \frac{m+1}{n+1}\,\frac{2(1-e^2)}{e}\,X_0^{n-1,m+1},$$

$$(VI)\qquad \left\{\begin{aligned} X_0^{n+2,m+2} = {} & \frac{m+1-\left(m+n+\frac{7}{2}\right)e^2}{n+3}\,\frac{2}{e}\,X_0^{n+1,m+1} \\ & + \frac{(n+m+2,\,2)}{(n+2,\,2)}\,(1-e^2)X_0^{n,m}. \end{aligned}\right.$$

$$(VII)\qquad \left\{\begin{aligned} X_0^{n,m} = {} & -\frac{m+1-\left(m-n+\frac{1}{2}\right)e^2}{n+1}\,\frac{2}{e}\,X_0^{n-1,m+1} \\ & + \frac{(m-n+1,\,2)}{(n,\,2)}\,(1-e^2)X_0^{n-2,m+2}. \end{aligned}\right.$$

$$(VIII)\qquad (n+3)X_0^{n+2,0} - (2n+5)X_0^{n+1,0} + (n+2)(1-e^2)X^{n,0} = 0.$$

$$(IX)\qquad \frac{m-n}{n+1}\,\frac{1-e^2}{e}\,X_0^{n-1,m+1} + \frac{1}{e}\,X_0^{n,m+1} + X_0^{n,m} = 0.$$

On peut conserver les séries infinies relatives à l'excentricité de la planète perturbatrice en raison de sa petitesse. On intégrera les équations différentielles avec un seul argument dans les séries trigonométriques, d'où l'élimination de l'anomalie moyenne ζ' en fonction de l'anomalie excentrique u avec l'équation de Képler et les fonctions de Bessel, ce qui amène le terme général du développement

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} & 2\,\frac{a^n}{a'^{n'}}\,A_{i,j}^{n,k}\,\Sigma\Sigma\Sigma\,Y_l^{n,i\mp j}\,\mathfrak{X}_p^{n',i\pm j} \\ & \quad \Big\{ J_{2q}(x_p)\cos[lu - \Upsilon_p + 2qu - \alpha_{i,\pm j}] \\ & \qquad + J_{2q+1}(x_p)\cos[lu - \Upsilon_p + (2q+1)u - \alpha_{i,\pm j}]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Les fonctions $\mathfrak{X}_i^{n,m}$ sont analogues aux fonctions $X_i^{n,m}$ mais sont relatives à la planète troublante; on a d'ailleurs posé

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{n'}{n}, \\ \Upsilon_p &= p\left\{\eta[u-(\varepsilon-\varpi)] + \varepsilon' - \varpi'\right\}, \\ x_p &= p\eta e, \\ \alpha_{i,\pm j} &= (i\pm j)(\varpi'-\tau') - (i\mp j)(\varpi-\tau). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Faisons bien remarquer ici que J_{2q}, J_{2q+1}, sont des séries infinies par rapport à e; ce sont d'ailleurs les seules, et elles ne présentent pas un réel inconvénient puisque les fonctions de Bessel peuvent se calculer aisément à l'aide de Tables, comme nous l'avons déjà dit.

L'intégration des termes $M\int \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \{ Au + B \} dt$ s'effectue ensuite sans difficulté avec la seule variable indépendante u.

L'application proposée de ce travail étant plutôt le calcul des inégalités séculaires, les termes qui les composent sont groupés à part et forment la série

$$(37) \qquad \left[\frac{1}{\rho^k}\right] = \frac{2}{a'^2 k} \sum\sum \left(\frac{a}{a'}\right)^n A_{i,j}^{n,k} X_0^{n,i\pm j} X_0^{-n',i\pm j} \cos x_{i,\pm j}.$$

Remarquons en passant le théorème de Laplace sur l'invariabilité des grands axes, établi aussi facilement avec u qu'avec l'anomalie moyenne ζ, et l'application de la formule (VIII) qui donne, pour la convergence de la série (37), la condition $\frac{a(1+e)}{a'(1-e')} < 1$, supposée réalisée implicitement.

Du développement général (37) se déduisent ensuite toutes les séries des inégalités séculaires, mises pour abréger sous la forme

$$(\mathcal{G}) \left\{ \begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \left[\frac{rr'\cos x - r^2}{\Delta^3}\right],\\
(\mathrm{II}) &= \left[\frac{rr'(\cos x - \cos y)}{\Delta^3}\right],\\
(\mathrm{III}) &= \left[\frac{(r'\cos x - r)\cos w}{\Delta^3}\right],\\
(\mathrm{IV}) &= \left[\frac{r'(\cos x - \cos y)\cos w}{\Delta^3}\right],\\
(\mathrm{V}) &= \left[\frac{rr'\sin x}{\Delta^3}\right],\\
(\mathrm{VI}) &= \left[\frac{rr'(\sin x + \sin y)}{\Delta^3}\right],\\
(\mathrm{VII}) &= \left[\frac{r'(\sin x \sin w}{\Delta^3} + \frac{1}{a(1-e^2)}\,\frac{rr'\sin x \sin w}{\Delta^3}\right],\\
(\mathrm{VIII}) &= \left[\frac{r'(\sin x + \sin y)\sin w}{\Delta^3} + \frac{1}{a(1-e^2)}\,\frac{rr'(\sin x + \sin y)\sin w}{\Delta^3}\right],
\end{aligned} \right.$$

et où le signe [ ] indique que les développements portent exclusivement sur les termes indépendants du temps t. Le coefficient (V), regardé comme une petite quantité du premier ordre, est mis en facteur et l'on

Digitized by Google

a les équations différentielles limitées aux termes séculaires

$$
(G)\quad \left\{
\begin{aligned}
\left[\frac{de}{dt}\right] &= -m'\frac{na\sqrt{1-e^2}}{e}[(V)-v(VI)],\\
\left[\frac{di}{dt}\right] &= -m'\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\mu v}[\cos(\tau-\Omega)(VI)-\sin(\tau-\Omega)(II)],\\
\sin i\left[\frac{d\Omega}{dt}\right] &= -m'\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\mu v}[\sin(\tau-\Omega)(VI)+\cos(\tau-\Omega)(II)],\\
\left[\frac{d\varpi}{dt}\right] &= 2\sin^2\frac{i}{2}\left[\frac{d\Omega}{dt}\right]\\
&\quad -m'\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{e}\left\{[(III)-v(IV)]-[(VII)-v(VIII)]\right\},\\
\left[\frac{d\varepsilon}{dt}\right] &= \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{d\varpi}{dt}\right]\\
&\quad +2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{i}{2}\left[\frac{d\Omega}{dt}\right]-2m'na[(I)-v(II)].
\end{aligned}
\right.
$$

La première partie du Mémoire se termine par le développement des fonctions (I), ... (VIII) à l'aide de $A_{i,j}^{n,k}\,X_0^{n,m}$.

Les formules générales sont assez complexes, mais dans la pratique elles se simplifient très rapidement selon l'ordre de grandeur des termes que l'on veut conserver. L'application faite à la comète de Encke, *Bull. astr.*, septembre 1897, semble bien choisie dans le cas de Saturne, mais pour Jupiter la méthode laisse évidemment à désirer, autant à cause de la grande valeur de e que de celle du rapport $\frac{a}{a'}$.

II. La seconde Partie du Mémoire contient la mise en nombres des formules du Chapitre XXII de la *Mécanique céleste*, Tome I, et fournit une valeur approchée des inégalités de degré 0 et 1 des coordonnées v, r et s.

Le Verrier s'était déjà préoccupé de la formation de Tables donnant rapidement une valeur approchée des perturbations des coordonnées des petites planètes. Son travail a été complété par Runkle, mais il est limité aux transcendantes de Laplace.

Afin de justifier l'importance qu'il attachait à cette tentative, M. Tisserand avait consacré un Chapitre du Tome I à l'arrangement des principaux termes troublés de v, r et s; les Tables ont été construites selon son désir. Leur plus grand intérêt consistera peut-être à mettre plus clairement en évidence le besoin de méthodes nouvelles. Dans cette voie, les Tables de M. Masal, d'après Gyldén, serviront sans nul doute à témoigner des progrès accomplis récemment en Mécanique céleste en attendant qu'une solution plus complète encore découle des beaux travaux de M. Poincaré.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES PREMIÈRES DU PROBLÈME DES n CORPS;

PAR M. PAUL PAINLEVÉ.

1. M. Bruns a démontré (*Acta mathematica*, t. XI, p. 25-97) que le problème des trois corps (ou des n corps) ne saurait comporter, en dehors des intégrales classiques, d'*intégrales premières, algébriques à la fois par rapport aux coordonnées cartésiennes des n corps et à leurs vitesses*. Mais, au lieu de ces intégrales, il est naturel de considérer la classe beaucoup plus étendue des intégrales premières *algébriques par rapport aux vitesses et renfermant les coordonnées d'une façon entièrement quelconque*. Cette classe est évidemment *invariante* quand on substitue aux $3n$ coordonnées (x_i, y_i, z_i) n'importe quels paramètres $q_1, \ldots, q_{3n}$; autrement dit, toute intégrale première

$$F(x'_1, y'_1, \ldots, z'_n, x_1, y_1, \ldots, z_n)$$

algébrique en $x'_1, y'_1, \ldots, z'_n$ se transforme en une intégrale $F_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}, q'_1, q'_2, \ldots, q'_{3n})$ algébrique en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_{3n}$, et réciproquement.

Dans un Mémoire encore inédit [1] que l'Académie des Sciences a bien voulu couronner (prix Bordin, décembre 1894), j'ai développé certaines propriétés générales des intégrales premières des équations de la Dynamique et j'en ai déduit une méthode de recherche des *intégrales algébriques par rapport aux vitesses*. Cette méthode peut être employée pour un système quelconque, par exemple pour le corps pesant fixé par un point. Appliquée au problème des n corps, elle permet d'établir qu'*il n'existe (en dehors des intégrales classiques) aucune intégrale première algébrique par rapport aux vitesses*. C'est ce résultat dont je voudrais indiquer ici la démonstration sous sa forme la plus rapide et la plus simple.

---

[1] Ce Mémoire paraîtra prochainement dans les *Acta mathematica*.

Digitized by Google

2. J'adopterai, dans ce qui suit, la terminologie de M. Poincaré : j'appellerai *solution* des équations du mouvement toute intégrale particulière $x_1(t), \ldots, z_n(t), x'_1(t), \ldots, z'_n(t)$ de ces équations; j'appellerai *intégrale* toute intégrale première de ces équations (en me limitant aux intégrales où t ne figure pas explicitement) et *équation intégrale* toute intégrale première *particularisée*, c'est-à-dire toute relation

$$F(x'_1, \ldots, z'_n, x_1, \ldots, z_n) = 0$$

qui ne peut être vérifiée pour $t = 0$ par une solution particulière $x_1(t), \ldots, z'_n(t)$ sans l'être quel que soit t.

La proposition précise que j'établirai pour le problème des n corps ($n > 2$) s'énonce ainsi :

Quelles que soient les valeurs données aux masses [1], *toute intégrale algébrique par rapport aux vitesses est une combinaison algébrique des intégrales classiques.*

La même proposition s'applique *au mouvement plan et au mouvement rectiligne des n corps*. Elle subsiste d'ailleurs quand on suppose que *t figure explicitement dans l'intégrale*.

§ I. — Rappel de quelques propriétés des équations de la Dynamique.

3. Je rappellerai d'abord quelques propriétés bien simples des intégrales de la Dynamique en me limitant aux systèmes de la forme

$$(S) \qquad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{dx'_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où les X sont des fonctions *algébriques* de $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Il m'est loisible de supposer ces fonctions X exprimées rationnelle-

[1] On sait que M. Poincaré a généralisé dans une autre direction le théorème de M. Bruns, en montrant que le problème des n corps ne comporte pas, en dehors des intégrales classiques, d'*intégrale qui soit uniforme par rapport à toutes les variables* $x_1, \ldots, z_n, x'_1, \ldots, z'_n$. Toutefois, comme l'observe M. Poincaré, sa méthode établit que de telles intégrales n'existent pas pour des valeurs *arbitraires* des masses, mais ne prouve pas qu'il n'en puisse exister pour certaines valeurs numériques données aux masses.

Digitized by Google

ment en $x_1, x_2, \ldots, x_k, s$, en désignant par s une irrationnelle $s(x_1, \ldots, x_k)$ définie par une relation algébrique irréductible

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k, s) = 0.$$

Je représenterai enfin par (S_0) le système (S) où les X sont *identiquement nuls*.

Théorème I. — *Toute intégrale de* (S) *algébrique en* $x'_1, \ldots, x'_k$ *est une combinaison algébrique d'intégrales de* (S) *rationnelles en* $x'_1, \ldots, x'_k$.

Ce théorème est bien connu. Je ne considérerai donc dans ce qui suit que des intégrales rationnelles en $x'_1, \ldots, x'_k$, que j'appellerai simplement *intégrales rationnelles*. Si une telle intégrale $f(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k)$ est mise sous la forme $f = \frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynomes en $x'_1, \ldots, x'_k$, premiers entre eux, je dirai que l'intégrale f est *irréductible*, et enfin qu'elle *est de degré* ν si ν est le degré maximum de P, Q en $x'_1, \ldots, x'_k$.

Je représenterai par P_j (ou Q_j) l'ensemble des termes de P (ou de Q) *de degré* j *en* $x'_1, \ldots, x'_k$. Si les termes de P et de Q sont tous de degré pair (ou tous de degré impair) en $x'_1, \ldots, x'_k$, je dirai que f ne renferme que des *termes de même parité*. Si P et Q sont de degré différent, j'admettrai que P a le degré maximum ν.

J'appellerai *intégrale entière de degré* ν toute intégrale f qui est un polynome en $x'_1, \ldots, x'_k$, de degré ν.

Théorème II. — *Toute intégrale rationnelle de* (S) *est une combinaison algébrique d'intégrales rationnelles qui ne renferment que des termes de même parité.*

Ce théorème résulte aussitôt de ce fait que les équations (S) ne changent pas quand on change $t, x'_1, \ldots, x'_k$, en $-t - x'_1, \ldots, -x'_k$. Mettons f sous la forme

$$f = \frac{\Pi_2 + \Pi_1}{K_2 + K_1},$$

Π_2, K_2 représentant l'ensemble des termes de degré pair de P, Q et Π_1, K_1 l'ensemble des termes de degré impair : f se transforme

Digitized by Google

en $f' = \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{K_2 - K_1}$ quand on change le signe de tous les x', et f' est encore une intégrale de (S); par suite, les combinaisons $\varphi = f + f'$, $\psi = ff'$ à l'aide desquelles f s'exprime algébriquement; or φ et ψ ne renferment que des termes de degré pair en $x'_1, \ldots, x'_k$. C. Q. F. D.

En particulier, si f est une intégrale entière, l'ensemble des termes de degré pair de f et l'ensemble des termes de degré impair constituent deux intégrales entières de S.

Théorème III. — *Admettons que, dans un certain domaine* D (*à k dimensions*) *de l'espace* $(x_1, \ldots, x_k)$, *les fonctions* X_j *soient réelles : toute intégrale rationnelle de* (S) *est une combinaison algébrique d'intégrales rationnelles réelles dans* D.

Soit, en effet,

$$f = \frac{\Pi_1 + i\Pi_2}{K_1 + iK_2},$$

où Π_1, Π_2, K_1, K_2 sont réels dans D. L'expression $f' = \frac{\Pi_1 - i\Pi_2}{K_1 - iK_2}$ est encore une intégrale de (S); par suite, les combinaisons $\varphi = f + f'$, $\psi = ff'$, qui sont réelles dans D. C. Q. F. D.

Nous pourrons donc nous limiter dans ce qui suit *aux intégrales rationnelles de* S *qui ne renferment que des termes de même parité et qui sont réelles en même temps que les* X.

4. Théorème IV. — *Pour qu'une équation*

$$0 = P(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k) = \Pi(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k, s),$$

où P *est un polynome en* $x'_1, \ldots, x'_k$, *soit une équation intégrale de* (S), *il faut et il suffit qu'on ait identiquement*

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial P}{\partial x'_i} X_i \right) = \Omega(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k) P,$$

Ω *désignant un polynome en* $x'_1, \ldots, x'_k$, *qui est nécessairement du premier degré.* (Je donnerai à ce polynome le nom de *facteur linéaire attaché à l'équation intégrale.*)

Je dis d'abord que la condition (a) est nécessaire. Soit, en

Digitized by Google

effet, $x_1^0, \ldots, x_k^0$ des valeurs arbitraires des x, pour lesquelles la branche considérée de s, soit $s = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$, est holomorphe ainsi que les branches correspondantes des X_i. Soit

$$P \equiv \Pi[\ldots, x'_i, \ldots, x_l, \ldots, \varphi(x_1, \ldots, x_k)],$$

et $x_1'^0, \ldots, x_k'^0, x_1^0, \ldots, x_k^0$, une solution *arbitraire* de la relation $P = 0$. Dire que $\Pi = 0$ est une équation intégrale de (S), c'est dire que la solution $x_i(t)$, $x'_i(t)$ de (S), définie par les conditions initiales t_0, $x_i'^0$, x_i^0, $s_0 = \varphi(x_1^0, \ldots, x_k^0)$, vérifie identiquement la relation $P = 0$. En particulier, pour $t = t_0$, la valeur de $\frac{dP}{dt}$, c'est-à-dire $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i'^0} X_i^0 + \frac{\partial P}{\partial x_i^0} x_i'^0\right)$, est nulle. La relation $P(\ldots, x_i'^0, \ldots, x_i^0, \ldots) = 0$ doit donc entraîner la relation

$$(b) \quad 0 = \sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{\partial P}{\partial x'_i}(\ldots, x_j'^0, \ldots, x_j^0, \ldots)X_i^0 + \frac{\partial P}{\partial x_i}(\ldots, x_j'^0, \ldots, x_j^0, \ldots)x_i'^0\right].$$

Si le polynome P en $x'_1, \ldots, x'_k$ est *irréductible,* il suit de là que le second membre de (b) doit renfermer P_0 en facteur, d'où l'égalité (a), laquelle peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\log P = \Omega.$$

Si P est un réductible, on a $P = P_1 P_2 \ldots P_l$, les polynomes $P_1, \ldots, P_l$ en $x'_1, \ldots, x'_k$ étant indécomposables, mais n'étant pas nécessairement distincts; chacun de ces polynomes P_j vérifie une relation (a)

$$\frac{d}{dt}\log P_j = \Omega_j;$$

on a donc

$$\frac{d}{dt}\log P = \frac{d}{dt}\log(P_1 \ldots P_l) = \Omega_1 + \ldots + \Omega_l \equiv \Omega,$$

ou bien

$$\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_l} x'_l + \frac{\partial P}{\partial x'_l} X_l\right) = \Omega P.$$

La condition énoncée est *nécessaire.*

Elle est suffisante : car si elle est remplie, toute solution $x_i(t)$, $x'_i(t)$ de (S) vérifie la relation

$$\frac{dP}{dt} = \Omega P,$$

Digitized by Google

d'où l'on déduit par dérivation

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \Omega \frac{dP}{dt} + P \frac{d\Omega}{dt} = \left(\Omega^2 + \frac{d\Omega}{dt}\right) P, \qquad \ldots.$$

Si, pour $t = t_0$, on a $P(\ldots, x_i'^0, \ldots, x_i^0, \ldots) = 0$, les quantités $\frac{dP}{dt}, \frac{d^2 P}{dt^2}, \cdots$ sont nulles pour $t = t_0$; la solution considérée annule P identiquement.

5. *Corollaires.* — Soit P_ν l'ensemble des termes de degré le plus élevé du polynome P; posons $\Omega = \Omega_1 + \Omega_0$, Ω_0 désignant le terme de Ω indépendant des x_i'; on a nécessairement

$$\sum \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} x_i' = \Omega_1 P_\nu;$$

autrement dit, $P_\nu = 0$ est une équation intégrale du système (S_0) [système obtenu en annulant tous les X dans (S)].

Si P ne renferme que des termes de même parité, Ω ne peut renfermer de terme Ω_0 : il est linéaire et homogène en $x_1', \ldots, x_k'$.

Si Ω est de la forme $\Omega = \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} x_1' + \ldots + \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} x_k'$, λ désignant une certaine fonction de $x_1, \ldots, x_k$, l'expression $Pe^{-\lambda}$ est une intégrale entière de (S).

Soit enfin $\frac{P}{Q}$ *une intégrale rationnelle de* (S), P_ν et Q_μ l'ensemble des termes de P et Q de degré le plus élevé ν et μ. Les égalités $P = 0$, $Q = 0$ sont des équations intégrales de (S), et l'on a

$$\frac{d}{dt} \log P = \Omega, \qquad \frac{d}{dt} \log Q = \Omega',$$

mais comme $\frac{d}{dt} \log \frac{P}{Q} \equiv 0$, Ω coïncide avec Ω'. Inversement, si P et Q vérifient *la même équation* (a), le rapport $\frac{P}{Q}$ est une intégrale de (S).

Puisqu'on a, dans ce cas,

$$\sum \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} x_i' = \Omega_1 P_\nu, \qquad \sum \frac{\partial Q_\mu}{\partial x_i} x_i' = \Omega_1 Q_\mu,$$

on voit que *les égalités* $P_\nu = 0$, $Q_\mu = 0$ *sont deux équations*

Digitized by Google

intégrales du système (S_0), *et que le rapport* $\frac{P_\nu}{Q_\mu}$ *est une intégrale de* (S_0).

Si l'intégrale $\frac{P}{Q}$ ne renferme que des termes de même parité, Ω et Ω_1^* coïncident. Lors donc que P_ν est une intégrale *entière* de S_0, Ω_1 est nul, et P, Q sont respectivement *deux intégrales entières* de S.

J'insiste sur ce résultat qui jouera plus loin un rôle essentiel :

Soit $f = \frac{P}{Q}$ *une intégrale rationnelle de* S, *de degré* ν, *ne renfermant que des termes de même parité. Si* P_ν *est une intégrale de* (S_0), P *et* Q *sont deux intégrales entières de* (S).

6. Ces théorèmes préliminaires admis, j'indique en deux mots l'esprit de la démonstration qui va suivre. La plus grosse difficulté consiste à établir que, $\frac{P}{Q}$ désignant une intégrale rationnelle de degré ν du problème des n corps, P_ν *est algébrique non seulement par rapport aux vitesses mais par rapport aux coordonnées.* Je m'appuie pour cela sur une propriété générale des systèmes (S) : « Une intégrale rationnelle et de degré ν de (S) ne peut dépendre que d'un nombre fini de constantes, et renferme algébriquement ces constantes (convenablement choisies). » Cette proposition est démontrée d'abord pour le système (S_0), et étendue ensuite à un système (S) quelconque. On en déduit aisément que P_ν est algébrique en $x_1, \ldots, x_k$ et peut toujours être supposé rationnel en $x_1, \ldots, x_k, s$, et réel en même temps que les x, x' et les X. Appliqué au problème des n corps, ce résultat entraîne cette conséquence que P_ν est nécessairement une intégrale de (S_0) [à un facteur $\lambda(x_1, \ldots, x_k)$ près, qu'on ramène à l'unité] : cette partie de la démonstration repose sur certaines propriétés des équations intégrales (algébriques) de (S_0).

Les véritables difficultés sont dès lors surmontées; P et Q sont deux intégrales entières du problème des n corps. Autrement dit, toute intégrale du problème, algébrique par rapport aux vitesses, est une combinaison algébrique d'intégrales entières

$$P = P_\nu + P_{\nu-2} + \ldots.$$

Digitized by Google

La condition

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial P_\nu}{\partial x'_i} X_i + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial P_{\nu-2}}{\partial x_i} x'_i \equiv 0$$

(où les X_i sont remplacées par les composantes des attractions) montre aussitôt que $P_{\nu-2}$ est algébrique en $x_1, \ldots, x_k$, et peut par suite être supposé rationnel en $x_1, \ldots, x_k, s$. A partir de ce point, la démonstration de M. Bruns, qui n'emploie que les deux premiers termes P_ν, $P_{\nu-2}$ de P, s'applique sans modification.

§ II. — Démonstration d'une propriété fondamentale des intégrales de (S) algébriques par rapport aux vitesses.

7. Proposons-nous de déterminer toutes les intégrales de (S) rationnelles et de degré donné ν.

Soit $f = \frac{P}{Q}$ une telle intégrale, P et Q désignant deux polynomes en $x'_1, \ldots, x'_k$ premiers entre eux. Il nous faut écrire un certain nombre de relations algébriques entre les coefficients

$$\alpha(x_1, \ldots, x_k), \quad \beta(x_1, \ldots, x_k), \quad \ldots, \quad \lambda(x_1, \ldots, x_k)$$

des polynomes P, Q, leurs dérivées premières $\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}$, et les fonctions données $X_1, \ldots, X_k$. Quand ces relations sont compatibles (un des coefficients $\alpha, \ldots, \lambda$ étant pris identiquement égal à 1), leur solution générale peut, *a priori*, dépendre soit de fonctions, soit de constantes arbitraires. Le théorème fondamental que j'ai en vue s'énonce ainsi :

Théorème. — *La fonction* $f = \frac{P}{Q}$ *est holomorphe ou méromorphe* (¹) *pour* $x'_1 = x'^0_1, \ldots, x'_k = x'^0_k, x_1 = x^0_1, \ldots, x_k = x^0_k$,

(¹) Une fonction analytique f de plusieurs variables x, y, z est *holomorphe* pour $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, si elle est représentable par une série de Taylor procédant suivant les puissances croissantes de $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, et qui converge tant que $|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|$, restent inférieurs à une certaine limite positive. La fonction f est dite *méromorphe* pour $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, si elle est représentable par le quotient de deux fonctions, holomorphes pour $x = x_0$, $y = y_0, z = z_0$. Une fonction holomorphe pour $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ est, *a for-*

Digitized by Google

si toutes les fonctions X *sont holomorphes pour* $x_1 = x_1^0, \ldots, x_k = x_k^0$.

Corollaire. — *L'intégrale f ne saurait dépendre que d'un nombre fini de constantes arbitraires.*

Démonstration. — Soit $x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k$ des valeurs pour lesquelles la branche considérée de chaque fonction X_i est holomorphe; admettons qu'une branche correspondante de l'intégrale f ne soit ni holomorphe ni méromorphe pour $x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k$, et montrons que l'hypothèse est absurde.

Je suppose [ce qui est légitime (¹)] qu'il existe des valeurs $(x_1, \ldots, x_k)$ aussi voisines de $(a_1, \ldots, a_k)$ qu'on le veut, soit $(b_1, \ldots, b_k)$, pour lesquelles les $\alpha, \beta, \ldots$ sont holomorphes. Pour $x'_1 = b'_1, \ldots, x'_k = b'_k, x_1 = b_1, \ldots, x_k = b_k$, la fonction $f(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k)$ est holomorphe ou méromorphe (quels que soient $b'_1, \ldots, b'_k$).

Ceci posé, considérons la solution de (S) définie par les conditions initiales

$$x_i = a_i, \qquad x'_i = x'^0_i \qquad \text{pour} \qquad t = 0,$$

---

tiori, méromorphe pour ces valeurs. Quand f a plusieurs déterminations, elle est dite méromorphe pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, si chacune de ses branches est méromorphe pour ces valeurs. Quand f n'est ni holomorphe, ni méromorphe pour $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, on dit que (x_0, y_0, z_0) est une *singularité non polaire* de f. Dans le cas qui nous occupe, quand $f = \frac{P}{Q}$ est méromorphe pour

$$x'_1 = x'^0_1, \quad \ldots, \quad x'_k = x'^0_k, \quad x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_k = x_k^0,$$

les coefficients $\alpha, \ldots, \lambda$ de P, Q (dont un est égal à l'unité) sont méromorphes pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_k = x_k^0$; réciproquement, si $\alpha, \ldots, \lambda$ sont meromorphes pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_k = x_k^0$, $f = \frac{P}{Q}$ est méromorphe pour $x'_1 = x'^0_1, \ldots, x'_k = x'^0_k$, $x_1 = x_1^0, \ldots, x_k = x_k^0$.

(¹) *A priori*, il n'est pas impossible que les fonctions $\alpha, \beta, \ldots$ présentent dans le plan d'une des variables x_i (les autres ayant reçu des valeurs numériques) des espaces lacunaires. Les *lignes limites* de ces espaces définissent alors des singularités $(a_1, \ldots, a_k)$ dans le domaine desquelles il existe des valeurs $(x_1, \ldots, x_k)$ pour lesquelles les fonctions $\alpha, \beta, \ldots$ sont holomorphes.

Digitized by Google

et soit

$$(3)\quad \begin{cases} x_i = a_i + \dfrac{x_i'^0}{1}\,t + \dfrac{X_i(a_1, \ldots, a_k)}{1.2}\,t^2 + \ldots \equiv \psi_i(t, x_1'^0, \ldots, x_k'^0), & \varphi_i \\ x_i' = x_i'^0 + X_i(a_1, \ldots, a_k)\,t + \ldots \equiv \chi_i(t, x_1'^0, \ldots, x_k'^0) & \psi_i \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \end{cases}$$

cette solution. D'après les théorèmes fondamentaux du calcul des limites, les fonctions φ_i, ψ_i sont des fonctions holomorphes des variables t, $x_i'^0$ dans le domaine

$$(D)\qquad |t| < R, \quad |x_i'^0| < R,$$

R étant un certain nombre positif.

Quand t et les $x_i'^0$ varient dans le domaine (D), les variables

$$x_1 = \psi_1, \qquad \ldots, \qquad x_k = \psi_k$$

coïncident avec *tous* (¹) les systèmes de valeurs voisins de

$$(a_1, \ldots, a_k);$$

en particulier, pour des valeurs convenablement choisies t_1, a_1', ..., a_k' de t, $x_1'^0$, ..., $x_k'^0$, les valeurs $x_1 = \psi_1$, ..., $x_k = \psi_k$ coïncident avec un des systèmes $(b_1, \ldots, b_k)$ pour lesquels les α, β, ..., sont holomorphes. Posons enfin

$$b_i' = \chi_i(t_1, a_1', \ldots, a_k') \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Pour $x_1 = b_1$, ..., $x_k = b_k$, $x_1' = b_1'$, ..., $x_k' = b_k'$, la fonction

$$f(x_1', \ldots, x_k', x_1, \ldots, x_k)$$

sera holomorphe ou méromorphe.

Considérons maintenant la solution générale de (S) définie par les conditions initiales

$$x_i = x_i^0, \qquad x_i' = x_i'^0, \qquad \text{pour } t = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

(¹) Il n'en serait autrement que si les k fonctions $\psi_i(t, x_1'^0, \ldots, x_k'^0)$ étaient liées par une relation identique; mais, dans ce cas, le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(\psi_1, \ldots, \psi_k)}{D(x_1'^0, \ldots, x_k'^0)}$ serait identiquement nul; ce qui est impossible, car ce déterminant est de la forme

$$t^k[1 + t\Delta],$$

Δ étant une fonction de t et des $x_i'^0$ holomorphe dans le domaine (D).

Digitized by Google

et soit

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_i = \Psi_i(t, x_1^0, \ldots, x_k^0, x_1'^0, \ldots, x_k'^0) \\ x_i' = \Xi_i(t, x_1^0, \ldots, x_k^0, x_1'^0, \ldots, x_k'^0) \end{array}\right\} (i = 1, 2, \ldots, k)$$

cette solution. Pour les valeurs $t = t_1$, $x_1^0 = a_1$, ..., $x_k^0 = a_k$, $x_1'^0 = a_1'$, ..., $x_k'^0 = a_k'$, les fonctions Ψ_i, Ξ_i sont holomorphes et égales à b_i, b_i'. Si donc nous remplaçons, dans $f(x_1', \ldots, x_k', x_1, \ldots, x_k)$, les x_i par les Ψ_i, les x_i' par les Ξ_i, f devient une fonction $F(t, x_1'^0, \ldots, x_k'^0, x_1^0, \ldots, x_k^0)$ qui, pour $t = t_1$, $x_1^0 = a_1$, ..., $x_k^0 = a_k$, $x_1'^0 = a_1'$, ..., $x_k'^0 = a_k'$, est soit holomorphe, soit quotient de deux fonctions holomorphes.

D'autre part, f étant une intégrale, on doit avoir identiquement d'après la substitution (4)

$$f(x_1', \ldots, x_k', x_1, \ldots, x_k) \equiv f(x_1'^0, \ldots, x_k'^0, x_1^0, \ldots, x_k^0).$$

Il suit de là que F coïncide avec $f(x_1'^0, \ldots, x_k'^0, x_1^0, \ldots, x_k^0)$; F est donc indépendant de t, et d'autre part la fonction

$$f(x_1'^0, \ldots, x_k'^0, x_1^0, \ldots, x_k^0)$$

est *holomorphe* ou *méromorphe* pour $x_1^0 = a_1$, ..., $x_k^0 = a_k$, $x_1'^0 = a_1'$, ..., $x_k'^0 = a_k'$, ce qui est contre l'hypothèse. Il y a donc contradiction; *le théorème est démontré.*

8. *Démonstration du corollaire.* — Il est bien facile de voir maintenant que les fonctions $\alpha(x_1, \ldots, x_k)$, $\beta(x_1, \ldots, x_k)$, ... ne sauraient dépendre de fonctions arbitraires. Considérons, en effet, le système de relations différentielles qui assujettissent les α, β, ... (un des α, β, ... ayant toujours été pris égal à 1) : ou bien la solution générale de ce système dépend d'un nombre fini de constantes; ou bien, pour des valeurs numériques données à certaines des variables, — soit les valeurs x_1^0, ..., x_j^0 données aux j premières variables ($j < k$), — on peut choisir arbitrairement au moins une des fonctions inconnues, par exemple

$$\alpha(x_1^0, \ldots, x_j^0, x_{j+1}, \ldots, x_k) \equiv \alpha_0(x_{j+1}, \ldots, x_k).$$

Il est loisible, dans ce dernier cas, de prendre pour α_0 une fonction qui admette comme singularité *non polaire* le système $x_{j+1} = x_{j+1}^0$, ..., $x_k = x_k^0$, les valeurs x_1^0, ..., x_{j+1}^0, ..., x_k^0 ne coïncidant avec aucune des singularités des X. Dans ces condi-

Digitized by Google

tions, l'intégrale f admettrait une singularité non polaire x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0, qui ne serait pas une singularité des X_i; ce qui est absurde. Les α, β, ..., ne peuvent donc dépendre que d'un nombre fini de constantes.

Les résultats précédents se résument ainsi :

L'intégrale première de (S), $f(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k)$, *rationnelle en* x'_1, ..., x'_k *et la plus générale de son degré* ν, *ne saurait renfermer qu'un nombre fini de constantes arbitraires et ses singularités non polaires coïncident nécessairement avec des singularités des* X_i.

Remarque sur les intégrales entières. — Au lieu des intégrales rationnelles de degré ν, considérons les intégrales *entières* de degré ν, soit $f = P$. Le raisonnement précédent montre que *les singularités (polaires ou non) de f coïncident nécessairement avec des singularités des* X. Les coefficients α, β, ..., λ de P vérifient un système de relations linéaires et homogènes par rapport aux α, β, ..., λ et à leurs dérivées. La solution générale de ce système, ne dépendant que d'un nombre fini de constantes arbitraires, est de la forme

$$C_1 f_1 + C_2 f_2 + \ldots + C_j f_j,$$

C_1, ..., C_j étant j constantes et f_1, ..., f_j, j solutions particulières.

Quant aux intégrales rationnelles, pour pousser plus loin leur étude, je devrai m'attacher d'abord au cas où les forces X_i sont nulles dans (S).

§ III. — Application du théorème précédent aux intégrales du système :

$$(S_0) \qquad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{dx'_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

9. Soit $f(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k)$ une intégrale rationnelle du système (S_0). D'après le théorème précédent, f ne peut admettre, à distance finie, que des singularités *polaires*. Mais les valeurs $x_1 = \infty$, ..., $x_k = \infty$ peuvent être respectivement des singularités essentielles de f. Nous allons voir qu'il n'en est rien et que, par suite, *f est nécessairement algébrique et rationnel en* x_1, ..., x_k.

Digitized by Google

Il suffit d'établir que $x_1 = \infty$, par exemple, ne saurait être un point essentiel de f, autrement dit, que la fonction

$$f\left(x'_1, \ldots, x'_k, \frac{1}{\xi_1}, x_2, \ldots, x_k\right)$$

considérée comme fonction de ξ_1, est holomorphe ou méromorphe pour $\xi_1 = 0$.

J'introduis, à cet effet, la transformation homographique de M. Appell,

$$(\mathrm{T})\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\xi_1}, & x_2 = \dfrac{\xi_2}{\xi_1}, & \ldots, & x_k = \dfrac{\xi_k}{\xi_1}, \\ x'_1 = -\xi'_1, & x'_2 = \xi'_2\xi_1 - \xi'_1\xi_2, & \ldots, & x'_k = \xi'_k\xi_1 - \xi'_1\xi_k, \quad \dfrac{dt}{dt_1} = \dfrac{1}{\xi_1^2}, \end{cases}$$

qui transforme le système (S_0) dans le système analogue

$$(\mathrm{S}'_0)\qquad \frac{d\xi_i}{dt_1} = \xi'_i, \qquad \frac{d\xi'_i}{dt_1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

A l'intégrale f de (S_0) correspond une intégrale de (S'_0)

$$\varphi(\xi'_1, \ldots, \xi'_k, \xi_1, \ldots, \xi_k),$$

rationnelle en $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_k$.

D'après le théorème fondamental du § II, la fonction φ, dans le voisinage de $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, ..., $\xi_k = 0$, est nécessairement de la forme $\frac{A}{B}$, où A, B sont deux polynomes en $\xi'_1, \ldots, \xi'_k$ dont les coefficients sont développables suivant les puissances croissantes et positives de $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Substituons, dans φ, aux variables $\xi_2, \ldots, \xi_k, \xi'_1, \ldots, \xi'_k$ les variables $x_2, \ldots, x_k, x'_1, \ldots, x'_k$, d'après les égalités (T), c'est-à-dire d'après les formules

$$\xi_2 = \xi_1 x_2, \qquad \ldots, \qquad \xi_k = \xi_1 x_k,$$

$$\xi'_1 = -x'_1, \qquad \xi'_2 = \frac{x'_2}{\xi_1} - x'_1 x_2, \qquad \ldots, \qquad \xi'_k = \frac{x'_k}{\xi_1} - x'_1 x_k;$$

l'expression $\frac{A}{B}$ prend la forme $\frac{A_1}{B_1}$, où A_1, B_1 sont deux polynomes en $x'_1, \ldots, x'_k$, dont les coefficients sont développables suivant les puissances croissantes et positives de $\xi_1, x_2, \ldots, x_k$. L'expression $\frac{A_1}{B_1}(x'_1, \ldots, x'_k, \xi_1, x_2, \ldots, x_k)$, regardée comme fonction

Digitized by Google

de ξ_1, admet donc $\xi_1 = 0$ *comme point régulier ou comme pôle;* puisqu'elle coïncide avec $f\left(x'_1, \ldots, x'_k, \frac{1}{\xi_1}, x_2, \ldots, x_k\right)$, la proposition est démontrée.

10. Toute intégrale de (S_0), rationnelle en $x'_1, \ldots, x'_k$, est donc aussi rationnelle en $x_1, \ldots, x_k$ et, par suite, représentable par le quotient $\frac{P}{Q}$ de deux polynomes P, Q en $x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k$, *premiers entre eux*. Je vais montrer que P *et* Q *sont respectivement deux intégrales de* (S_0).

Je m'appuierai sur ce lemme :

Lemme. — Soit $\Pi(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k)$ *une équation intégrale* de (S_0), où Π est un polynome irréductible en $x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k$; je dis que Π est nécessairement *une intégrale de* (S_0).

Démonstration. — Le système (S_0) admet les intégrales

$$x'_1 = x'^0_1, \qquad x'_2 = x'^0_2, \qquad \ldots, \qquad x'_k = x'^0_k,$$

$$x_i x'_1 - x_1 x'_i = x^0_i x'^0_1 - x^0_1 x'^0_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

d'où l'on peut tirer $x_2, \ldots, x_k, x'_1, \ldots, x'_k$ en fonction de $x_1, x'^0_1, \ldots, x'^0_k, x^0_1, \ldots, x^0_k$. Si on porte ces expressions dans Π, on obtient une fonction de la forme $\frac{\Pi_1(x_1, x'^0_1, \ldots, x'^0_k, x^0_1, \ldots, x^0_k)}{(x'^0_1)^r}$, où Π_1 est un polynome qui doit renfermer en facteur

$$\Pi(x'^0_1, \ldots, x'^0_k, x^0_1, \ldots, x^0_k) \equiv \Pi_0.$$

On a donc

$$\Pi_1 \equiv \Pi_0 \times L(x_1, x'^0_1, \ldots, x'^0_k, x^0_1, \ldots, x^0_k);$$

je dis que le polynome L est indépendant de x_1.

Autrement, en effet, soient $x'^0_1, \ldots, x'^0_k, x^0_1, \ldots, x^0_k$ des valeurs quelconques, telles seulement que ni x'^0_1, ni Π_0 ne soient nuls, et soit $\overline{x_1}$ une valeur correspondante de x_1 qui annule L; la solution $(x_1, \ldots, x_k, x'_1, \ldots, x'_k)$ de (S_0), définie par les conditions initiales $(x^0_1, \ldots, x^0_k, x'^0_1, \ldots, x'^0_k)$ annule Π pour $x_1 = \overline{x_1}$ et, par suite, l'annule identiquement; en particulier, Π_0 devrait être nul

Digitized by Google

pour les conditions initiales, ce qui est contre l'hypothèse. Donc L, et par suite Π_1, est indépendant de x_1.

Il suit de là que $L \equiv 1$ et que Π *est une intégrale de* (S_0) [1].

C. Q. F. D.

Ce lemme établi, revenons à l'intégrale $f \equiv \frac{P}{Q}$ dont les deux termes sont des polynomes en $x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k$, premiers entre eux. On pourra toujours mettre P et Q sous la forme

$$P \equiv P_1^{l_1} \ldots, P_i^{l_i}, \qquad Q \equiv Q_1^{m_1} \ldots, Q_j^{m_j},$$

les $P_1, \ldots, P_i, Q_1, \ldots, Q_j$ désignant des polynomes en $x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k$ *irréductibles,* et les $l_1, \ldots, l_i, m_1, \ldots, m_j$ des entiers positifs. La relation $P_1 = 0$ est une relation intégrale; d'après le lemme précédent, P_1 est donc une intégrale. Il en va de même pour $P_2, \ldots, P_i, Q_1, \ldots, Q_j$. *Les polynomes* P *et* Q *sont donc deux intégrales de* (S_0).

Nous avons bien établi ce théorème : C. Q. F. D.

Théorème. — *Toute intégrale de* (S_0) *rationnelle en* $x'_1, \ldots, x'_k$ *est le quotient de deux polynomes en* $x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k$, *premiers entre eux et qui sont deux intégrales entières de* (S_0).

Observons que toute intégrale *entière* de (S_0) est aussi, d'après cela, *un polynome en* $x_1, \ldots, x_k$: autrement, l'intégrale serait de la forme $\frac{P}{Q}$, Q désignant un polynome en $x_1, \ldots, x_k$ qui serait une intégrale de (S_0).

Enfin, toute intégrale de (S_0), algébrique en $x'_1, \ldots, x'_k$, est aussi algébrique en $x_1, \ldots, x_k$.

---

[1] On peut remarquer que Π dépend nécessairement des x'; autrement, le système (S_0) admettrait une intégrale de la forme : $\Pi(x_1, \ldots, x_k) = \text{const.}$, ce qui entraînerait la condition

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} x'_1 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} x'_k = 0,$$

condition absurde, puisque $x_1^0, \ldots, x_k^0, x_1'^0, \ldots, x_k'^0$ peuvent être choisis arbitrairement.

Digitized by Google

§ IV. — Propriétés des équations intégrales de (S_0), algébriques en $x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k$.

11. Nous venons de voir que si une équation intégrale de (S_0), soit $\Pi = 0$, a, comme premier membre, un polynome en $x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k$, Π est nécessairement une intégrale de (S_0). Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Soit $\Phi(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k) = 0$ une équation intégrale de (S_0), où Φ est un polynome en $x'_1, \ldots, x'_k$, à coefficients rationnels en $x_1, \ldots, x_k$: il existe une fonction $\lambda(x_1, \ldots, x_k)$ telle que $\lambda\Phi$ soit une intégrale de (S_0).

Il faut bien se garder de croire que cette proposition subsiste quand on n'assujettit plus les coefficients de Φ à être rationnels. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer le cas de deux variables, $x_1 = x$, $x_2 = y$. Si, de l'équation de Clairaut,

$$y - x\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

où φ est rationnel en $\frac{dy}{dx}$ et de degré supérieur à l'unité, nous tirons $\frac{dy}{dx}$, soit

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, y),$$

la relation

$$0 = y' - x'\psi(x, y) \equiv \Phi(x, y, x', y')$$

est une équation intégrale de (S_0), linéaire en x', y', algébrique, mais non rationnelle, en x, y, et il n'existe pas de fonction $\lambda(x, y)$ telle que $\lambda[y' - x'\psi]$ soit une intégrale; car λ et $\lambda\psi$, donc ψ, devraient être rationnels.

Insistons sur certaines propriétés *des équations intégrales de* (S_0)

$$(E) \qquad \Phi(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k) = 0,$$

entières et homogènes en $x'_1, \ldots, x'_k$, et algébriques en $x_1, \ldots, x_k$. Un des coefficients du polynome Φ en $x'_1, \ldots, x'_k$

Digitized by Google

étant pris égal à *l'unité*, je suppose que les autres coefficients sont *algébriques*, mais *irrationnels*, en $x_1, \ldots, x_k$.

12. J'emploierai le langage géométrique : je regarderai $x_1, \ldots, x_k$ comme les coordonnées cartésiennes d'un point (imaginaire ou réel) de l'espace à k dimensions; les équations

$$(\mathrm{D}) \qquad x_1 = x_1'^0 t + x_1^0, \quad \ldots, \quad x_k = x_k'^0 t + x_k^0$$

définiront une droite passant par le point $(x_1^0, \ldots, x_k^0)$ et de direction $x_1'^0, \ldots, x_k'^0$. Si les $x_i'^0$, x_i^0 vérifient la relation $\Phi = 0$, cette relation est vérifiée tout le long de la droite (D). L'équation (E) définit donc *un complexe de droites;* pour des valeurs fixes données à $x_1, \ldots, x_k$, elle définit un *cône* de sommet $(x_1, \ldots, x_k)$.

Cette terminologie admise, soit

$$\Sigma(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

l'équation de la surface algébrique, lieu des points $(x_1, \ldots, x_k)$ dans le domaine desquels plusieurs branches de Φ se permutent. Je vais démontrer ce théorème :

Les tangentes à la surface Σ *font partie du complexe* (E).

I. *Cas où le nombre des dimensions est égal à deux.* — Tout d'abord, pour $k = 2$, la proposition est presque évidente. La relation $\Phi = 0$ n'est autre chose qu'une équation de Clairaut. Posons $x_1 = x$, $x_2 = y$, et soit (x_0, y_0) ou P un point de la courbe $\Sigma(x, y) = 0$ dans le domaine duquel les branches Φ_j, Φ_l, ... de Φ se permutent. Considérons un point (x, y), voisin de P, et soit y' une valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui vérifie la relation $\Phi_j = 0$, sans annuler aucune autre branche de Φ. Quand (x, y) reprennent les mêmes valeurs, après avoir varié dans le domaine de P de façon que Φ_j se permute avec Φ_l, y' ne reprend pas sa valeur primitive; autrement, cette valeur vérifierait les deux relations $\Phi_j = 0$, $\Phi_l = 0$. La courbe $\Sigma(x, y) = 0$ est donc un lieu de points critiques de certaines branches de la fonction $y' = \varphi(x, y)$ définie par (E); c'est une intégrale singulière de l'équation de Clairaut (E), et les tangentes à Σ vérifient cette équation.

C. Q. F. D.

Digitized by Google

La courbe Σ peut être décomposable en plusieurs courbes irréductibles et, notamment, renfermer des droites Δ_1, Δ_2, ... *Mais peut-elle être formée uniquement de droites?* Admettons qu'il en soit ainsi, et montrons que *l'hypothèse est absurde.*

Débarrassons, s'il est nécessaire, $\Phi\left(1, \frac{dy}{dx}, x, y\right)$ des polynomes en $\frac{dy}{dx}$, rationnels en x, y, qu'il renferme en facteur. Dans ces conditions, chaque branche, soit Φ_1, de Φ se permute au moins avec une autre branche le long d'une certaine des droites Δ, soit Δ_1. Si P est un point quelconque de Δ_1 (exception étant faite peut-être pour un nombre fini de points P′), toute droite passant par P et vérifiant l'équation $\Phi_1 = 0$ est tangente à Δ_1, c'est-à-dire se confond avec Δ_1. Toutes les droites du complexe (E) devraient donc être parallèles à une des droites fixes Δ ou passer par un des points fixes P′. Mais, l'équation d'un faisceau de droites passant par un point fixe ou parallèles à une droite fixe est de la forme

$$\alpha\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) + \beta y' + \gamma = 0;$$

Φ devrait donc être divisible au moins par une expression linéaire en $\frac{dy}{dx}$ et rationnelle en x, y, ce qui est absurde.

II. *Cas général.* — Je choisis les axes $Ox_1, \ldots, Ox_k$ d'une façon entièrement quelconque. Il me suffit alors de prouver que les tangentes à Σ, parallèles aux $(k-2)$ plans $x_3 = 0, \ldots, x_k = 0$, font partie du complexe (E).

Les axes étant *quelconques,* aucun d'eux ne fait partie du complexe; si p est le degré de Φ en $x'_1, \ldots, x'_k$, les termes en $x'^p_1, \ldots, x'^p_k$ existent tous : je prends le coefficient de x'^p_1 égal à l'unité. L'origine O est un point ordinaire des diverses branches de Φ. De plus, soient Φ_j, Φ_l deux branches de Φ; pour $(x_1, \ldots, x_k)$ donnés, la relation $\Phi_j - \Phi_l = 0$ définit un cône Γ de sommet $(x_1, \ldots, x_k)$; le cône Γ qui correspond à $(x_1 = 0, \ldots, x_k = 0)$ renferme l'axe Ox_1, mais ne renferme aucun des autres axes [1].

---

[1] Autrement, on changerait les axes en gardant la même direction pour Ox_1, ce qui laisserait au coefficient de x'^p_1 la valeur 1.

Digitized by Google

D'après cela, désignons par $\alpha(x_1, \ldots, x_k)$, le coefficient de $x_2'^p$ dans Φ, par α_j et α_l les déterminations de α qui correspondent aux branches Φ_j, Φ_l de Φ : α_j et α_l ne peuvent coïncider identiquement; autrement, ils coïncideraient à l'origine, et la différence $\Phi_j - \Phi_l$, s'annulant pour $x_1' = x_3' = x_4' = \ldots = x_k' = 0$, s'annulerait tout le long de l'axe Ox_2.

Ceci posé, soit P ou $(x_1^0, \ldots, x_k^0)$ un point arbitraire de Σ, où le plan tangent ne soit pas parallèle à Ox_1, et soit

$$x_1 = g(x_2, \ldots, x_k)$$

l'équation de Σ dans le voisinage de P, g désignant une fonction de $x_2, \ldots, x_k$, holomorphe et égale à x_1^0 pour $x_2 = x_2^0, \ldots, x_k = x_k^0$. Dans le domaine de P, j branches de Φ se permutent, soit les branches $\Phi_1, \ldots, \Phi_j$, et, si l'on pose $y = (x_1 - g)^{\frac{1}{j}}$, Φ_1 se laisse développer suivant les puissances croissantes de y, les coefficients étant des polynomes en $x_1', \ldots, x_k'$, holomorphes en $x_2, \ldots, x_k$ pour $x_2 = x_2^0, \ldots, x_k = x_k^0$. Laissons à $x_2, \ldots, x_k$ les valeurs $x_2^0, \ldots, x_k^0$, et faisons pivoter x_1 (dans son plan complexe) autour de x_1^0; Φ_1 se change en Φ_2, et la détermination α_1 de α se change en α_2. D'après cela, donnons dans Φ des valeurs numériques $x_3^0, \ldots, x_k^0$ à $x_3, \ldots, x_k$, et annulons $x_3', \ldots, x_k'$: dans l'équation de Clairaut ainsi obtenue

$$(e) \qquad 0 = 1 + \alpha(x_1, x_2, x_3^0, \ldots, x_k^0)\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^p + \ldots,$$

le coefficient α admet la courbe $\Sigma(x_1, x_2, x_3^0, \ldots, x_k^0) = 0$ du plan (x_1, x_2) comme lieu de points critiques. Les tangentes à cette courbe vérifient donc l'équation (e) : autrement dit, les tangentes à Σ, parallèles aux plans $x_3 = 0, \ldots, x_k = 0$, font partie du complexe (E). C. Q. F. D.

Corollaire. — La surface Σ peut être décomposable en plusieurs surfaces distinctes, dont certaines soient des plans. Mais elle ne saurait être formée uniquement de plans. Autrement, le lieu des points critiques du premier membre de l'équation de Clairaut (e) serait formé de droites, ce qui est absurde.

En définitive, toutes les tangentes à Σ feront partie de (E); Σ renferme au moins une surface non plane Σ'; les tangentes à Σ forment un complexe contenu dans (E).

Digitized by Google

13. *Conséquences du théorème précédent.* — Posons-nous maintenant la question suivante :

Soit s une fonction algébrique *donnée* de $x_1, \ldots, x_k$, définie par une relation

$$G(x_1, \ldots, x_k, s) = 0,$$

où G est un polynome irréductible en $x_1, \ldots, x_k, s$.

Existe-t-il des équations intégrales de (S_0),

$$\Phi(x'_1, \ldots, x'_k, x_2, \ldots, x_k) = 0$$

où Φ *est un polynome en* $x'_1, \ldots, x'_k$, *dont les coefficients sont rationnels en* $x_2, \ldots x_k, s$, *mais irrationnels en* $x_2, \ldots, x_k$ (un de ces coefficients étant pris égal à l'unité)?

Soit $\Sigma(x_1, \ldots, x_k) = 0$ la surface critique de l'irrationnelle $s(x_1, \ldots, x_k)$. Si Σ est composée de plans, il n'existe pas d'équations intégrales telles que $\Phi = 0$. Soient donc $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ les surfaces irréductibles non planes contenues dans Σ. Les tangentes à $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ forment des complexes

$$\psi_1(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k) = 0, \quad \psi_2(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k) = 0, \quad \ldots,$$

les ψ désignant des polynomes irréductibles en $x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k$. *Pour qu'il existe des équations intégrales telles que* $\Phi = 0$, *il faut et il suffit qu'un au moins des polynomes* ψ *se décompose en un produit de polynomes en* $x'_1, \ldots, x'_k$, *rationnels en* $x_1, \ldots, x_k, s$: soit $\varphi(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k)$ un de ces facteurs.

La condition est évidemment *suffisante* : car, si elle est remplie, $\varphi = 0$ est une équation intégrale de la forme $\Phi = 0$. Je dis que la condition est *nécessaire*.

Je suppose Φ débarrassé des polynomes en $x'_1, \ldots, x'_k$, rationnels en $x_1, \ldots, x_k$, qu'il peut renfermer en facteurs. Le complexe $\Phi = 0$ comprend au moins un des complexes $\psi = 0$, soit $\psi_1 = 0$. Le point $(x_1, \ldots, x_k)$ étant choisi arbitrairement (pour une valeur au moins de s) le cône $\Phi = 0$ et le cône $\psi_1 = 0$ ont une partie commune; autrement dit, les polynomes Φ et ψ_1 en $x'_1, \ldots, x'_k$, ont un plus grand commun diviseur $\chi(x'_1, \ldots, x'_k)$: les coefficients de χ s'expriment rationnellement à l'aide de ceux de Φ, ψ_1, donc en fonction de $x_1, \ldots, x_k, s$. De plus, χ, divisant Φ, n'est pas

Digitized by Google

rationnel en $x_1, \ldots, x_k$; ψ_1 est donc de la forme $\psi = \chi\chi_1$, les polynomes χ, χ_1 en $x'_1, \ldots, x'_k$ étant rationnels en $x_1, \ldots, x_k, s$.

C. Q. F. D.

14. Si s est réel quand $x_1, \ldots, x_k$ varient dans un certain domaine à k dimensions D de l'espace réel $x_1, \ldots, x_k$, et si Φ est réel dans le même domaine, les coefficients de G sont réels, ainsi que ceux des polynomes ψ : χ est réel en même temps que Φ et ψ_1, c'est-à-dire dans le domaine (D). D'où ce théorème :

L'irrationnelle s étant réelle dans un certain domaine réel (à k dimensions) de l'espace $(x_1, \ldots, x_k)$, *pour qu'il existe une équation intégrale telle que* $\Phi = 0$, *réelle dans* (D), *il faut et il suffit qu'un au moins des polynomes* ψ *soit décomposable en un produit de polynomes en* $x'_1, \ldots, x'_k$, *rationnels et réels en* $x_1, \ldots, x_k, s$.

Lorsque aucun des polynomes ψ ne comporte une telle décomposition, toute équation intégrale $\Phi = 0$, entière en $x'_1, \ldots, x'_k$, rationnelle et réelle en $x_1, \ldots, x_k, s$, est de la forme

$$\Phi = \lambda(x_1, \ldots, x_k, s)\,\mathrm{P},$$

P désignant une intégrale entière de (S_0) et λ une certaine fonction rationnelle de $x_1, \ldots, x_k, s$.

J'insiste sur ce dernier résultat, qui jouera dans l'étude du problème des n corps un rôle très important [1].

---

[1] Dans son beau Mémoire sur les intégrales algébriques du problème des n corps, M. Bruns (*loc. cit.*, p. 34-40) énonce ce théorème : *Toute équation intégrale de* (S_0), *entière en* $x'_1, \ldots, x'_k$, *algébrique en* $x_1, \ldots, x_k$ *est de la forme* $\lambda(x_1, \ldots, x_k)\mathrm{P}$, P *désignant une intégrale entière de* (S_0). D'après ce qui précède ce théorème est inexact. Cette erreur, qui semblait fausser la méthode de M. Bruns, a été rectifiée par M. Poincaré (*Comptes rendus*, janvier 1897) : M. Poincaré a substitué à l'énoncé de M. Bruns le théorème auquel nous venons de parvenir et qui entraîne les mêmes conséquences pour le problème des n corps. Ce théorème, comme les précédents, est un cas particulier de propositions plus générales concernant les intégrales et les équations intégrales d'un système (S), propositions que j'ai développées dans le Mémoire auquel j'ai déjà fait allusion. Ces propositions s'appliquent aussi bien à *tous les systèmes d'équations de la Dynamique dont les géodésiques sont algébriques* (*voir* les *Comptes rendus*, janvier 1897). La démonstration que j'ai indiquée ici n'est d'ailleurs que la traduction géométrique de la démonstration générale, un peu simplifiée dans ce cas particulier.

Digitized by Google

§ V. — Nouvelles propriétés des intégrales du système

$$(S) \qquad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{dx'_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

15. Soit $f = \frac{P}{Q}$ l'intégrale rationnelle en $x'_1, \ldots, x'_k$, la plus générale de son degré ν, du système (S). Nous savons (§ II) que f ne saurait dépendre que d'un nombre fini de constantes : je vais montrer qu'on peut choisir ces constantes de façon qu'*elles figurent algébriquement dans f.*

Posons $x'_1 = \frac{1}{r}$, $\frac{x'_2}{x'_1} = x'_{(2)}, \ldots, \frac{x'_k}{x'_1} = x'_{(k)}$; $\frac{P}{Q}$ devient une fonction rationnelle f_1 de r, $x'_{(2)}, \ldots, x'_{(k)}$, qui se laisse développer suivant les puissances croissantes de r

$$f_1 = r^l R_0 + r^{l+1} R_1 + \ldots + r^{l+i} R_i + \ldots,$$

le premier exposant l pouvant être négatif. L'expression $r^l R_0$ représente le quotient des termes de P et Q de degré le plus élevé en $x'_1, \ldots, x'_k$; c'est donc une intégrale première $\frac{P'}{Q'}$ du système (S_0) (*voir* § I, n° 5), intégrale où P', Q' sont deux formes en $x'_1, \ldots, x'_k$, premières entre elles, et d'un certain degré ν'.

La fonction f_1 dépend d'un nombre fini h de constantes distinctes, et l'on peut toujours prendre l'entier j assez grand pour que la somme des j premiers termes du développement de f_1, à savoir

$$F_1 = r^l R_0 + r^{l+1} R_1 + \ldots + r^{l+j} R_j,$$

dépende de h constantes distinctes.

J'établirai d'abord qu'*on peut choisir ces constantes de façon qu'elles figurent algébriquement dans* F_1.

L'expression $r^l R_0 \equiv \frac{P_1}{Q_1}$ est définie par un système différentiel (D_1) où les coefficients des P_1, Q_1 figurent algébriquement ainsi que leurs dérivées. D'autre part, soit $\frac{P'}{Q'}$ l'intégrale rationnelle de degré ν' de (S_0), la plus générale de son degré; P' et Q' dépendent linéairement d'un nombre fini de constantes $a_1, a_2, \ldots$. Si je substitue P' et Q' à P_1 et Q_1 dans le système (D_1), j'établis

Digitized by Google

entre ces constantes $a_1, a_2, \ldots$ un certain nombre de relations algébriques qui laissent, par exemple, les p premières indépendantes, d'où il suit que $\frac{P_1}{Q_1}$ ou $r^l R_0$ dépend algébriquement d'un certain nombre de constantes distinctes $a_1, \ldots, a_p$.

Si le terme suivant $r^{l+1} R_1$ de F_1 ne renferme pas de nouvelles constantes, il se calcule algébriquement en fonction des x_i, r, $x'_{(2)}, \ldots, x'_k$ de R_0 et de ses dérivées, c'est-à-dire en fonction des $x_i, x'_i, a_1, \ldots, a_p$. Soit donc $r^{l+m} R_m$ le premier terme de F_1 qui renferme d'autres constantes que $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Les m premiers termes de F_1 dépendent algébriquement de $a_1, \ldots, a_p$. Quant à l'expression

$$r^{l+m} R_m \equiv \rho(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q),$$

elle est définie par un système différentiel (D_m) où figurent algébriquement ρ, ses dérivées, les x'_i, les x_i, R_0 et ses dérivées; (D_m) est donc algébrique par rapport à ρ, à ses dérivées, et aux constantes $a_1, \ldots, a_p$. Donnons, d'autre part, à $b_1, \ldots, b_q$ des valeurs numériques $b_1^0, \ldots, b_q^0$, et soit f' la fonction f correspondante, et $\rho' \equiv r^{l+m} R'$ la fonction ρ correspondante : la différence $f - f'$ est encore une intégrale de (S), et si l'on développe $f - f'$ suivant les puissances croissantes de r, le premier terme du développement est $r^{l+m}(R_m - R'_m) \equiv \rho - \rho'$, qui définit par suite *une intégrale de* (S_0) *rationnelle en* $x'_1, \ldots, x'_k$. Comme la fonction $\sigma = \rho - \rho'$ est définie par un système différentiel (D'_m) [1] algébrique par rapport à σ, à ses dérivées et à $a_1, \ldots, a_p$, il suffit de remplacer, comme plus haut, σ par l'intégrale rationnelle de (S_0), la plus générale du même degré, pour voir que σ dépend algébriquement de $a_1, \ldots, a_p$ et des nouvelles constantes [convenablement choisies], soit $a_{p+1}, \ldots, a_{p+q}$.

Il est clair que le raisonnement peut se poursuivre jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les termes de F_1. Soit $r^{l+m+n} R_{m+n}$ le premier terme de F_1 qui dépende d'autres constantes que $a_1, \ldots, a_{p+q}$; tous les termes antérieurs dépendent algébriquement de $a_1, \ldots, a_{p+q}$. Quant au terme $r^{l+m+n} R_{m+n} \equiv \rho_1$, il est défini par un système différentiel (D_{m+n}) où ρ_1 figure algébriquement ainsi

[1] Ce système est un transformé immédiat de (D_m).

Digitized by Google

que ses dérivées et $a_1, \ldots, a_{p+q}$. Soit ρ'_1 une solution particulière déterminée de (D_{m+n}); la différence $\sigma_1 = \rho_1 - \rho'_1$ est définie par un système différentiel (D'_{m+n}), algébrique encore par rapport à σ_1, ses dérivées et $a_1, \ldots, a_{p+q}$. D'autre part, σ_1 est une intégrale de (S_0) : d'où il suit, comme plus haut, que σ_1, donc ρ_1, renferme algébriquement $a_1, \ldots, a_{p+q}$ et les nouvelles constantes convenablement choisies. Etc.

On voit donc que les h constantes distinctes $a_1, \ldots, a_h$, dont dépend F_1, y figurent algébriquement si on les choisit d'une façon convenable.

16. Je dis maintenant que f_1 *dépend algébriquement de* $a_1, \ldots, a_h$.

Donnons, en effet, à $a_1, \ldots, a_h$ des valeurs numériques $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_h}$, et soit $\overline{F_1}$ la fonction F_1 correspondante. Considérons toutes les intégrales f_1 dont le développement est de la forme

$$f_1 = \overline{F_1} + r^{l+j} A,$$

$A(r, x'_{(2)}, \ldots, x'_{(k)}, x_1, \ldots, x_k)$ étant une fonction de r, holomorphe pour $r = 0$. Ces fonctions f_1 ne sauraient dépendre d'une constante : autrement f_1 dépendrait au moins de $(h+1)$ constantes. Cela étant, soit (Δ) le système différentiel qui définit f_1; ce système est algébrique par rapport aux coefficients α_1, $\beta_1, \ldots$ de la fonction f_1 (rationnelle en $r, x'_{(2)}, \ldots, x'_{(k)}$), et par rapport aux dérivées de ces cofficients. Si j'exprime que la différence $f_1 - \overline{F_1}$ est divisible par r^{l+j}, j'établis entre les coefficients $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ certaines conditions algébriques (où figurent algébriquement $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_h}$), conditions que j'ajoute au système (Δ) : soit (Δ') le système total ainsi obtenu. La solution la plus générale $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ de (Δ') ne saurait dépendre de constantes : les $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ dépendent donc algébriquement de $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_h}$. Comme la chose est vraie quels que soient $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_h}$, la fonction f_1 est une fonction algébrique de ses h constantes distinctes $a_1, \ldots, a_h$.

C. Q. F. D.

17. Ce théorème entraîne aussitôt une importante conséquence.

Digitized by Google

L'intégrale f étant mise sous la forme $f = \frac{P}{Q}$, où P, Q sont deux polynomes en $x'_1, \ldots, x'_k$, premiers entre eux, soient P_ν et Q_μ l'ensemble des termes de degré le plus élevé en $x'_1, \ldots, x'_k$ dans P et Q. Je dis que *les coefficients de* P_ν, Q_μ (*dont un est supposé égal à l'unité*) *sont des fonctions algébriques de* $x_1, \ldots, x_k$.

Les polynomes P_ν, Q_μ ne sont pas nécessairement premiers entre eux; soit D leur plus grand commun diviseur. Mettons la fraction $\frac{P_\nu}{Q_\mu}$ sous sa forme irréductible $\frac{P'}{Q'}$: la fraction $\frac{P'}{Q'}$ est une intégrale de (S_0) et, par suite, est rationnelle aussi en $x_1, \ldots x_k$; on peut donc écrire

$$P_\nu = DP', \qquad Q_\mu = DQ',$$

P', Q' désignant deux polynomes en $x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k$.

D'autre part, décomposons le polynome $D(x'_1, \ldots, x'_k)$, en polynomes irréductibles; soit

$$D = D_1^\lambda D_2^\mu \ldots.$$

Si l'égalité $D_1 = 0$ dépend au moins d'une des constantes $a_1, \ldots, a_k$, soit a_1, elle est algébrique en $x_1, \ldots, x_k$. En effet, a_1 figure algébriquement dans D_1 et l'on peut mettre l'équation $D_1 = 0$ sous forme entière et irréductible par rapport à a_1 et aux x', soit $d_1(x'_1, \ldots, x'_k, x_1, \ldots, x_k, a_1) = 0$. L'équation $d_1 = 0$ étant (quel que soit a_1) une équation intégrale de (S_0), les rapports des coefficients des puissances de a_1 dans d_1 sont des intégrales de (S_0), et sont par suite algébriques et rationnels en $x_1, \ldots, x_k$. La relation $D_1 = 0$ est donc algébrique en $x_1, \ldots, x_k$. Il suit de là qu'on peut écrire

$$P_\nu = C(x_1, \ldots, x_k)\Pi(\ldots x'_i, \ldots, x_i, \ldots)\Delta(\ldots x'_i, \ldots, x_i, \ldots),$$
$$Q_\mu = C(x_1, \ldots, x_k)K(\ldots x'_i, \ldots, x_i, \ldots)\Delta(\ldots x'_i, \ldots, x_i, \ldots),$$

les polynomes Π, K en $x'_1, \ldots, x'_k$ étant algébriques en $x_1, \ldots, x_k$, et le polynome Δ en $x'_1, \ldots, x'_k$ ayant un de ses coefficients égal à l'unité et ne dépendant d'aucune constante.

Ce polynome Δ est défini par un système différentiel où figurent algébriquement ses coefficients $\alpha_j(x_1, \ldots, x_k)$, leurs dérivées et les x_i. La solution générale de ce système ne dépen-

Digitized by Google

dant d'aucune constante, Δ est défini algébriquement en fonction des x_i. D'où ce théorème :

Les polynomes P_ν, Q_μ *en* $x'_1, \ldots, x'_k$ [*divisés par une même fonction convenablement choisie* $C(x_1, \ldots, x_k)$] *sont algébriques en* $x_1, \ldots, x_k$.

18. Je dis, de plus, qu'*on peut supposer* P_ν *et* Q_μ *rationnels en* $x_1, \ldots, x_k, s$, [$s(x_1, \ldots, x_k)$ désignant, comme on l'a vu, l'irrationnelle en fonction de laquelle les X_i sont exprimés rationnellement].

Considérons en effet les variables $(x_1, \ldots, x_k, s)$, liées par la relation algébrique $G = 0$; quand ces quantités varient pour reprendre les mêmes valeurs, admettons que P_ν et Q_μ puissent acquérir j déterminations distinctes, $[P_\nu^{(1)}, Q_\mu^{(1)}], \ldots, [P_\nu^{(j)}, Q_\mu^{(j)}]$. Soient $f_1, \ldots, f_j$, j branches de f correspondant à ces j branches $[P_\nu, Q_\mu]$. Pour une détermination quelconque de s, ces j fonctions $f_1, \ldots, f_j$ sont autant d'intégrales de S; il en est de même de leurs fonctions symétriques $F_1 = \Sigma f_1$, $F_2 = \Sigma f_1 f_2$, ..., $F_j = \Sigma f_1 f_2 \ldots f_j$: dans ces j nouvelles intégrales, les termes analogues à P_ν, Q_μ sont rationnels en $x_1, \ldots, x_k, s$. On voit donc que *toute intégrale rationnelle de* (S) *est une combinaison algébrique d'intégrales rationnelles où les termes* P_ν, Q_μ *sont rationnels en* $x_1, \ldots, x_k, s$.

Parmi ces dernières intégrales, il nous est loisible (*voir* § I, n° 3) de considérer seulement celles qui ne renferment que *des termes de même parité* et qui sont *réelles* dans le même domaine réel D à k dimensions que les X (à supposer qu'un tel domaine existe). Nous arrivons ainsi à cette conclusion :

Les fonctions X_i *étant réelles dans un domaine réel* D *à* k *dimensions, toute intégrale rationnelle de* (S) *est une combinaison algébrique d'intégrales rationnelles, réelles dans* (D), *ne renfermant que des termes de même parité et où les termes* P_ν, Q_μ *sont algébriques et rationnels en* $x_1, \ldots, x_k, s$.

Bornons-nous donc à considérer ces dernières intégrales. Soit $\Sigma = 0$ la surface critique de l'irrationnelle $s(x_1, \ldots, x_k)$, $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = 0$, ..., les surfaces irréductibles, non planes, qu'elle renferme, $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, ... les équations (mises sous forme

Digitized by Google

entière par rapport aux x'_i, x_i) des complexes des tangentes à Σ_1, Σ_2, ... Supposons qu'aucun des polynomes ψ_1, ψ_2, ... ne soit décomposable en un produit de polynomes en x'_1, ... x'_k, rationnels en x_1, ..., x_k, s et réels dans D. Dans les intégrales rationnelles $f = \frac{P}{Q}$ que nous considérons, le terme P_v, égalé à zéro, définit une équation intégrale de (S_0), entière en x'_1, ..., x'_k, rationnelle en x_1, ..., x_k, s, réelle dans D : l'expression $\lambda(x_1, \ldots, x_k)P_v$ (où λ est une fonction convenablement choisie) est donc (*voir* § IV, n° 14) une intégrale de (S_0); les expressions λP, λQ sont donc (*voir* § I, n° 5) des intégrales entières de (S). D'où ce théorème :

Théorème. — *Les fonctions algébriques* X_i (*réelles dans un certain domaine réel* D *à* k *dimensions*) *étant exprimées rationnellement à l'aide d'une irrationnelle* $s(x_1, \ldots, x_k)$, *soient* Σ_1, Σ_2, ... *les surfaces critiques, non planes, de* s, *et* $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, ... *les équations, mises sous forme entière, des complexes des tangentes à* Σ_1, Σ_2, ... *Si aucun des polynomes* ψ_1, ψ_2, ... *n'est décomposable en un produit de polynomes en* x'_1, ..., x'_k, *rationnels en* x_1, ..., x_k, s *et réels dans* D, *toute intégrale rationnelle de* S *est une combinaison algébrique d'intégrales entières* (¹).

§ VI. — Application au problème des trois corps et des n corps.

19. Appliquons le théorème précédent au problème des n corps. Soient f le coefficient d'attraction, (x_i, y_i, z_i) les coordonnées

(¹) Dans le cas où l'on se limite aux intégrales rationnelles en x'_1, ..., x'_k et *algébriques en* x_1, ..., x_k, le théorème précédent est une conséquence immédiate de la proposition du § IV (n° 14), relative aux équations intégrales de (S_0). M. Poincaré (*Comptes rendus*, janvier 1897) s'est servi, dans ce cas particulier, dudit théorème pour rectifier l'erreur qui entachait la remarquable méthode de M. Bruns. Dans son Mémoire déjà cité (p. 40-43), M. Bruns énonce ce théorème : « Si les X_i sont des fonctions algébriques de x_1, ..., x_k, homogènes et de degré » pair, toute intégrale rationnelle en x'_1, ..., x'_k et algébrique en x_1, ..., x_k, est » une combinaison algébrique d'intégrales entières. » Ce théorème [corollaire d'une proposition inexacte déjà signalée (*voir* p. 101) sur les équations intégrales de (S_0)] n'est pas vrai en général : s'il se trouve vrai pour le problème des n corps, c'est parce que l'irrationnelle s, qui intervient dans ce problème, répond aux conditions énoncées ci-dessus.

Digitized by Google

du point M_i, de masse m_i, et soit r_{ik} la distance des points M_i, M_k

$$r_{ik} = +\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}.$$

Les équations du mouvement sont ici

$$(S_1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = x'_i, & \dfrac{dx'_i}{dt} = \dfrac{fm_1(x_1 - x_i)}{r_{1i}^3} + \ldots + \dfrac{fm_n(x_n - x_i)}{r_{ni}^3}, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = y'_i, & \dfrac{dy'_i}{dt} = \dfrac{fm_1(y_1 - y_i)}{r_{1i}^3} + \ldots + \dfrac{fm_n(y_n - y_i)}{r_{ni}^3}, \\ \dfrac{dz_i}{dt} = z'_i, & \dfrac{dz'_i}{dt} = \dfrac{fm_1(z_1 - z_i)}{r_{1i}^3} + \ldots + \dfrac{fm_n(z_n - z_i)}{r_{ni}^3} \\ & (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Les fonctions X sont des fonctions rationnelles des x_i et des r_{ik}; pour exprimer les r_{ik} à l'aide d'une irrationnelle unique, il suffit de poser

$$s = \Sigma r_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

l'irrationnelle s a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ déterminations, et à chacune de ces déterminations correspond un système de valeurs r_{ik} et un seul; s vérifie une relation algébrique irréductible de degré $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ en s, soit la relation $G = 0$.

Les surfaces critiques de la fonction s sont les surfaces de l'espace à $3n$ dimensions (x_i, y_i, z_i), définies par les égalités

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = 0.$$

Les droites $x_i = x_i^0 t + x_i^0$, $y_i = y'_0 t + y_0$, $z_i = z'_0 t + z_0$, tangentes à cette dernière surface, vérifient une relation qu'on forme immédiatement, à savoir la relation

$$0 = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = \varphi_{ik},$$

en posant

$$\xi = x_i - x_k, \qquad \eta = y_i - y_k, \qquad \zeta = z_i - z_k,$$
$$\xi' = x'_i - x'_k, \qquad \eta' = y'_i - y'_k, \qquad \zeta' = z'_i - z'_k.$$

Cette relation peut s'écrire encore

$$(\xi\eta' - \eta\xi')^2 + (\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \zeta'\xi)^2 = 0$$

et il est clair que son premier membre ψ_{ik} est indécomposable en

Digitized by Google

un produit de facteurs linéaires en ξ', η', ζ' et *réels* en même temps que ξ, η, ζ (¹).

TOUTE INTÉGRALE DU PROBLÈME DES n CORPS, ALGÉBRIQUE PAR RAPPORT AUX VITESSES, EST DONC UNE COMBINAISON ALGÉBRIQUE D'INTÉGRALES ENTIÈRES PAR RAPPORT AUX VITESSES.

20. Soit maintenant

$$f \equiv P_\nu + P_{\nu-2} + P_{\nu-4} + \ldots = \text{const.},$$

une telle intégrale, les P_ν, $P_{\nu-2}$, ... désignant des polynomes en $x'_1, \ldots, z'_n$, homogènes et de degré ν, $\nu - 2$, ... L'intégrale, comme il est loisible de le supposer, ne renferme que des termes de même parité en $x'_1, \ldots, z'_n$.

Le terme P_ν est une intégrale de (S_0); c'est donc un polynome en $x_1, \ldots, z_n$. Je vais montrer que $P_{\nu-2}$ *est aussi algébrique en* $x_1, \ldots, z_n$.

Tout d'abord, soient $P'_{\nu-2}$ et $P''_{\nu-2}$ deux déterminations de la fonction $P_{\nu-2}$ des variables $x_1, \ldots, z_n, s$ (liées par la relation $G = 0$), déterminations qui se permutent quand les $x_1, \ldots, z_n, s$ reprennent les mêmes valeurs. Je dis que la *différence* $P''_{\nu-2} - P'_{\nu-2}$ *est un polynome en* $x_1, \ldots, z_n$.

Soient, en effet, f' et f'' deux branches de f correspondant aux branches $P'_{\nu-2}$, $P''_{\nu-2}$ de $P_{\nu-2}$. Chacune de ces branches f', f'' (et par suite leur différence $f'' - f'$) est une intégrale de (S_1); la différence $P''_{\nu-2} - P'_{\nu-2}$ est donc une intégrale de (S_0), et, comme elle est entière en $x'_1, \ldots, z'_n$, *elle est aussi entière en* $x_1, \ldots, z_n$.

Ce point établi, simplifions la notation en posant

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{n+1}, & \ldots, \quad y_n &= x_{2n}, \\ z_1 &= x_{2n+1}, & \ldots, \quad z_n &= x_{3n}. \end{aligned}$$

(¹) L'expression ψ_{ik} est décomposable en un produit de facteurs linéaires en ξ', η', ζ' et rationnels en ξ, η, ζ, r_{ik}, par suite en ξ, η, ζ, s. On a, en effet,

$$\begin{aligned} [\xi^2 + \eta^2]\psi_{ik} = \; & [\xi'(\xi\zeta + \sqrt{-1}\,\eta r_{ik}) + \eta'(\eta\zeta - \sqrt{-1}\,\xi r_{ik}) - \zeta'(\xi^2 + \eta^2)] \\ & \times [\xi'(\xi\zeta - \sqrt{-1}\,\eta r_{ik}) + \eta'(\eta\zeta + \sqrt{-1}\,\xi r_{ik}) - \zeta'(\xi^2 + \eta^2)]; \end{aligned}$$

mais les coefficients de ces facteurs sont *imaginaires*.

Digitized by Google

Le système (S_1) devient

$$(S_2) \qquad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{dx'_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n),$$

où les X_i sont de la forme $\sum \frac{A_{jl}}{r_{jl}^3}$, les A_{jl} étant des fonctions linéaires des x_i.

Les polynomes P_ν, $P_{\nu-2}$ en $x'_1, \ldots, x'_{3n}$ vérifient identiquement la relation

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial P_{\nu-2}}{\partial x'_i} x'_i = -\sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial P_\nu}{\partial x'_i} X_i.$$

Substituons maintenant aux variables $x_2, \ldots, x_{3n}$ les variables $\xi_2, \ldots, \xi_{3n}$ définies par les relations

$$x_i x'_1 - x_1 x'_i = \xi_i \qquad (i = 2, \ldots, 3n),$$

et soit Π_ν, $\Pi_{\nu-2}$ ce que deviennent P_ν, $P_{\nu-2}$ après cette substitution. Tout d'abord, Π_ν est une fraction rationnelle de $\xi_2, \ldots, \xi_{3n}, x'_1, \ldots, x'_{3n}$, *indépendante de* x_1, fraction de la forme $\frac{M(x'_1, \ldots, x'_n, \xi_2, \ldots, \xi_{3n})}{x'^l_1}$, où M désigne un polynome. De plus, on a

$$\frac{\partial P_\nu}{\partial x'_i} = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x'_i} = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial x'_i} - x_1 \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \xi_i} \qquad (i = 2, \ldots, 3n),$$

$$\frac{\partial P_\nu}{\partial x'_1} = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial x'_1} + \sum \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial x'_1} = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial x'_1} + \frac{1}{x'_1}\sum \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \xi_j}(\xi_j + x_1 x'_j).$$

Il suit de là que l'expression $\sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial P_\nu}{\partial x'_i} X_i$ est de la forme

$$(j, l)\sum \frac{U_{jl}x_1^2 + V_{jl}x_1 + W_{jl}}{r_{jl}^3}, \qquad \text{avec} \qquad r_{jl}^2 = \frac{1}{x'^2_1}(u_{jl}x_1^2 + v_{jl}x_1 + w_{jl}),$$

où les U, V, W sont des fractions rationnelles en $x'_1, \ldots, x'_{3n}$, $\xi_2, \ldots, \xi_{3n}$ et les u, v, w des polynomes par rapport aux mêmes variables; en particulier, on a

$$\begin{aligned} u_{jl} &= (x'_j - x'_l)^2 + (y'_j - y'_l)^2 + (z'_j - z'_l)^2 \\ &\equiv (x'_j - x'_l)^2 + (x'_{j+n} - x'_{l+n})^2 + (x'_{j+2n} - x'_{l+2n})^2. \end{aligned}$$

Enfin, si l'on observe que les ξ_i sont des intégrales premières du système sans forces (S_0), on trouve aussitôt, en appliquant

Digitized by Google

la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{\partial \Pi_{\nu-2}}{\partial x_1} x'_1 = \frac{\partial P_{\nu-2}}{\partial x_1} x'_1 + \ldots + \frac{\partial P_{\nu-2}}{\partial x_{3n}} x'_{3n},$$

et l'équation (a) devient

$$(b) \qquad \frac{\partial \Pi_{\nu-2}}{\partial x_1} = \frac{1}{x'_1} \sum \frac{U_{jl} x_1^2 + V_{jl} x_1 + W_{jl}}{r_{jl}^3} \equiv B(x_1).$$

J'ajoute que, si $\Pi'_{\nu-2}$, $\Pi''_{\nu-2}$ sont deux déterminations de $\Pi_{\nu-2}$ correspondant aux mêmes valeurs des x', x, s, la différence $\Pi''_{\nu-2} - \Pi'_{\nu-2}$ est nécessairement *rationnelle en* $x'_1, \ldots, x'_{3n}, \xi_2, \ldots, \xi_{3n}$.

21. Ceci posé, je dis que l'*intégrale abélienne*

$$I = \int B(x_1)\, dx_1$$

n'a pas de période.

Tout d'abord, si cette intégrale admet une période

$$\omega(x'_1, \ldots, x'_{3n}, \xi_2, \ldots, \xi_{3n}),$$

cette période, d'après la remarque précédente, est nécessairement une fonction *rationnelle* des x', ξ.

Donnons maintenant aux x', ξ des valeurs numériques $\overline{x'}$, $\overline{\xi}$; les points critiques des radicaux

$$r_{jl} = \frac{1}{x'_1} \sqrt{u_{jl} x_1^2 + v_{jl} x_1 + w_{jl}}$$

sont tous distincts, si les valeurs numériques $\overline{x}$, $\overline{\xi}$ n'ont pas été choisies d'une façon particulière, et les périodes de I sont les périodes des diverses intégrales

$$I_{jl} = x_1'^2 \int \frac{U_{jl} x_1^2 + V_{jl} x_1 + W_{jl}}{(u_{jl} x_1^2 + v_{jl} x_1 + w_{jl})^{\frac{3}{2}}}\, dx_1.$$

Une telle intégrale I_{jl} admet, comme unique période, la quantité $\frac{2i\pi x_1'^2 U_{jl}}{(u_{jl})^{\frac{3}{2}}}$. Mais U_{jl} et u_{jl} étant des fonctions rationnelles des x', ξ, et u_{jl} n'étant pas carré parfait, cette période ne peut être rationnelle par rapport aux x', ξ que si U_{jl} est identiquement nul. L'intégrale I ne saurait donc avoir de période.

Digitized by Google

Appelons I $(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_{3n}, x'_1, \ldots, x'_{3n})$ une fonction primitive de $B(x_1)$, fonction algébrique de x_1 qu'on peut toujours choisir algébrique en $\xi_2, \ldots, \xi_{3n}, x'_1, \ldots, x_{3n}$. La différence

$$\Pi_{\nu-2} - I = P_{\nu-2} - J(x'_1, \ldots, x'_{3n}, x_1, \ldots, x_{3n})$$

est une simple fonction de $\xi_2, \ldots, \xi_{3n}, x'_1, \ldots, x'_{3n}$, c'est-à-dire une intégrale du système sans forces (S_0). Comme cette différence $N(x'_1, \ldots, x'_{3n}, x_1, \ldots, x_{3n})$ est algébrique en $x'_1, \ldots, x'_{3n}$, elle est nécessairement algébrique en $x_1, \ldots, x_{3n}$ (*voir* § III, n° 10). *La fonction* $P_{\nu-2}$ *est donc algébrique en* $x_1, \ldots, x_{3n}$.

C. Q. F. D.

22. Si $P_{\nu-2}$ n'est pas rationnel en $x_1, \ldots, x_{3n}, s$, le raisonnement déjà employé (*voir* § V, n° 18) montre que f est une combinaison algébrique d'intégrales analogues où P_ν et $P_{\nu-2}$ sont rationnels en $x_1, \ldots, x_{3n}, s$. Il est donc loisible de supposer $P_{\nu-2}$ rationnel en $x_1, \ldots, x_{3n}, s$; $P_{\nu-2}$ ne devient infini que pour les valeurs des x_i qui annulent une des quantités r_{ik}.

Observons de plus que le système (S_2) ne change pas quand on change t en $\alpha^3 t$, les x_i en $\alpha^2 x_i$, les x'_i en $\frac{x'_i}{\alpha}$. En faisant ce changement de variables dans f, on voit aussitôt que f se décompose en une somme d'intégrales dont chacune se reproduit (à un facteur α^p près) quand on change les x_i en $\alpha^2 x_i$, les x'_i en $\frac{x'_i}{\alpha}$. Nous arrivons à cette conclusion :

Si le problème des n corps admet (en dehors des intégrales classiques) une intégrale algébrique par rapport aux vitesses, il existe au moins une intégrale entière en $x'_1, \ldots, x'_{3n}$ *(distincte des intégrales classiques), soit*

$$P = P_\nu + P_{\nu-2} + P_{\nu-4} + \ldots,$$

où les P_j *sont des polynomes homogènes en* $x'_1, \ldots, x'_{3n}$ *de degré* j, *où les coefficients de* P_ν *sont des polynomes homogènes en* $x_1, \ldots, x_k$ *de même degré* λ, *et où les coefficients de* $P_{\nu-2}$ *sont algébriques, homogènes de degré* $(\lambda - 1)$ *en* $x_1, \ldots, x_{3n}$ *et rationnels en* $x_1, \ldots, x_{3n}, s$.

Qu'une telle intégrale ne puisse exister, c'est ce qui résulte dès

Digitized by Google

lors de la méthode de M. Bruns. Cette méthode n'emploie en effet (*loc. cit.*, p. 43-58) que les deux premiers termes P_ν, $P_{\nu-2}$ de l'intégrale entière P supposée algébrique en $x_1, \ldots, x_{3n}$. En exprimant, d'une part, que les U_{jl} sont nuls (*voir* le n° 20) et, d'autre part, que l'on a

$$\frac{\partial \Pi_{\nu-2}}{\partial x_1} = \sum \frac{V_{jl} x_1 + W_{jl}}{(u_{jl} x_1^2 + v_{jl} x_1 + w_{jl})^{\frac{3}{2}}},$$

M. Bruns établit que P_ν est nécessairement une combinaison entière de la force vive T et des premiers membres des neuf intégrales linéaires classiques (¹). D'où ce théorème :

QUELLES QUE SOIENT LES VALEURS DONNÉES AUX MASSES, LE PROBLÈME DES TROIS CORPS (OU DES *n* CORPS) NE COMPORTE, EN DEHORS DES INTÉGRALES CLASSIQUES, AUCUNE INTÉGRALE ALGÉBRIQUE PAR RAPPORT AUX VITESSES.

Le même théorème et la même démonstration s'appliquent *au mouvement des n points dans un même plan* (*ou sur une même droite*).

Le théorème subsiste quand on suppose que *t figure dans l'intégrale :* mais sa démonstration exige alors quelques compléments que je ne développerai pas ici.

SUR LA FORMULE DE RÉDUCTION DES OBSERVATIONS DE PASSAGES;

PAR M. MAURICE HAMY.

1. La correction τ à apporter à l'observation du passage au méridien d'un astre de déclinaison $\mathfrak{D}$, effectuée avec une lunette dont les constantes sont m, n, c, vérifie la relation

$$(1) \qquad \sin(\tau - m) = \operatorname{tang} n \operatorname{tang} \mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc} \mathfrak{D} \operatorname{séc} n,$$

(¹) Le raisonnement de M. Bruns suppose implicitement $n > 2$ et trois des masses au moins différentes de zéro. Les neuf intégrales linéaires classiques sont les trois intégrales des aires et les six intégrales $\xi' = \text{const.}, \ldots, (\eta\zeta' - \zeta\eta') = \text{const.}$ où ξ, η, ζ désignent les coordonnées du centre de gravité du système. Ces six intégrales se réduisent à cinq *distinctes*.

Digitized by Google

à laquelle on substitue pratiquement l'équation

$$(2) \qquad \tau - m = n \operatorname{tang} \mathfrak{D} + c \operatorname{séc} \mathfrak{D}.$$

M. Lœwy a démontré, en évaluant les termes négligés dans le développement en série des deux membres de l'équation (1) [1], qu'il ne résulte aucune erreur sensible de cette simplification. Je me propose, dans la présente Note, de revenir sur ce point important par une méthode qui fournit un exemple d'une fonction très complexe pouvant se discuter avec une entière rigueur.

La valeur exacte de τ déduite de l'équation (1) est

$$\tau - m = \operatorname{arc\,sin}(\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc} \mathfrak{D} \operatorname{séc} n),$$

le symbole arc sin désignant un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ parce que les constantes n et c sont pratiquement comprises entre des limites très petites et que $\tau - m$ est toujours peu considérable. L'erreur commise η en déterminant τ par la formule (2) a pour valeur

$$\eta = \operatorname{arc\,sin}(\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc} \mathfrak{D} \operatorname{séc} n) - n \operatorname{tang} \mathfrak{D} - c \operatorname{séc} \mathfrak{D}.$$

Étudions la valeur absolue de cette différence.

Dans le cas des passages inférieurs, il faut changer $\mathfrak{D}$ en $180 - \mathfrak{D}$ dans l'expression de η, ce qui ne modifie pas sa valeur absolue. On peut donc se borner à étudier η dans le cas des passages supérieurs. On peut de même supposer $\mathfrak{D} > 0$, car on passe au cas où $\mathfrak{D} < 0$ en changeant le signe de n. Enfin la valeur absolue de η étant la même pour des systèmes de valeurs de n et de c égales et de signes contraires, on peut supposer $c > 0$.

En définitive, n, c étant supposés positifs, $\mathfrak{D}$ positif et inférieur à $\frac{\pi}{2}$, et $\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc} n \operatorname{séc} \mathfrak{D} < 1$, il suffit, pour embrasser tous les cas possibles, dans l'évaluation de la grandeur de l'erreur commise sur τ, d'étudier la valeur absolue des différences

$$(3) \quad \begin{cases} \eta = \operatorname{arc\,sin}(\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \mathfrak{D} \quad + \sin c \operatorname{séc} \mathfrak{D} \operatorname{séc} n) - n \operatorname{tang} \mathfrak{D} - c \operatorname{séc} \mathfrak{D}. \\ \eta' = \operatorname{arc\,sin}(-\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc} \mathfrak{D} \operatorname{séc} n) + n \operatorname{tang} \mathfrak{D} - c \operatorname{séc} \mathfrak{D}. \end{cases}$$

Je dis que la valeur absolue de η surpasse la valeur absolue

---

[1] *Comptes rendus*, 1er semestre 1885.

Digitized by Google

de η'. Cette propriété résulte de ce que l'on a, comme nous allons le montrer, les inégalités

$$(4) \qquad \eta + \eta' > 0, \quad \eta - \eta' > 0.$$

En effet on a

$$(5) \begin{cases} \eta + \eta' = \operatorname{arc\,sin}(\operatorname{tang} n \operatorname{tang}\mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc}\mathfrak{D} \operatorname{séc} n) \\ \qquad + \operatorname{arc\,sin}(-\operatorname{tang} n \operatorname{tang}\mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc}\mathfrak{D} \operatorname{séc} n) - 2c \operatorname{séc}\mathfrak{D}. \end{cases}$$

On en déduit

$$\text{pour } n = 0 \begin{cases} (\eta + \eta')_0 = 2[\operatorname{arc\,sin}(\sin c \operatorname{séc}\mathfrak{D}) - c \operatorname{séc}\mathfrak{D}] \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\eta + \eta')_0}{\partial c} = \left(\frac{\cos c}{\sqrt{1 - \sin^2 c \operatorname{séc}^2\mathfrak{D}}} - 1\right) \operatorname{séc}\mathfrak{D} > 0. \end{cases}$$

Il résulte de là que $(\eta + \eta')_0$ est une fonction croissante de c, et, comme cette fonction particulière est nulle pour $c = 0$, elle est positive pour les valeurs positives de c.

On déduit d'autre part de l'équation (5)

$$\frac{\partial(\eta + \eta')}{\partial n} = \frac{1}{\cos^2 n}\left[\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc}\mathfrak{D} \sin n}{\sqrt{1 - (\operatorname{tang} n \operatorname{tang}\mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc}\mathfrak{D} \operatorname{séc} n)^2}} + \frac{-\operatorname{tang}\mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc}\mathfrak{D} \sin n}{\sqrt{1 - (-\operatorname{tang} n \operatorname{tang}\mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc}\mathfrak{D} \operatorname{séc} n)^2}}\right].$$

Le second membre de cette égalité est positif car 1° la première fraction a son numérateur essentiellement positif et supérieur à la valeur absolue du numérateur de la seconde; 2° le dénominateur de la première fraction est manifestement plus petit que celui de la seconde : $\eta + \eta'$ est donc une fonction croissante de n et comme cette fonction est positive pour $n = 0$, elle est essentiellement positive pour $n > 0$, ce qui démontre l'inégalité

$$\eta + \eta' > 0.$$

Des formules (3) on tire

$$(6) \begin{cases} \eta - \eta' = \operatorname{arc\,sin}(\operatorname{tang} n \operatorname{tang}\mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc}\mathfrak{D} \operatorname{séc} n) \\ \qquad - \operatorname{arc\,sin}(-\operatorname{tang} n \operatorname{tang}\mathfrak{D} + \sin c \operatorname{séc}\mathfrak{D} \operatorname{séc} n) - 2n \operatorname{tang}\mathfrak{D}. \end{cases}$$

On en déduit

$$\text{pour } c = 0 \begin{cases} (\eta - \eta')_0 = 2[\operatorname{arc\,sin}(\operatorname{tang} n \operatorname{tang}\mathfrak{D}) - n \operatorname{tang}\mathfrak{D}], \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\eta - \eta')_0}{\partial n} = \frac{\operatorname{séc}^2 n \operatorname{tang}\mathfrak{D}}{\sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 n \operatorname{tang}^2\mathfrak{D}}} - \operatorname{tang}\mathfrak{D} > 0. \end{cases}$$

Il résulte de là que $(\eta - \eta')_0$ est une fonction croissante de n

Digitized by Google

et, comme cette fonction particulière est nulle pour $n = 0$, elle est positive pour les valeurs positives de n.

On déduit d'autre part de l'équation (6)

$$\frac{\partial(\eta_1 - \eta_1')}{\partial c} = \cos c \operatorname{séc} \Theta \operatorname{séc} n \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \Theta + \sin c \operatorname{séc} \Theta \operatorname{séc} n)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (-\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \Theta + \sin c \operatorname{séc} \Theta \operatorname{séc} n)^2}} \right].$$

Le dénominateur de la seconde fraction étant supérieur à celui de la première, on a $\frac{\partial(\eta_1 - \eta_1')}{\partial c} > 0$. $\eta_1 - \eta_1'$ est donc une fonction croissante de c et, comme cette fonction est positive pour $c = 0$, elle est essentiellement positive pour $c > 0$, ce qui démontre la seconde inégalité (4).

On déduit des inégalités (4)

Par addition ..... $\eta_1 > 0$,
Par multiplication ..... $\eta_1^2 - \eta_1'^2 > 0$;

par conséquent η_1 est positif et surpasse la valeur absolue de η_1'. Pour démontrer que l'équation (2) fournit une valeur de τ suffisamment exacte, il suffit donc d'établir que la plus grande valeur de η_1, dans les applications, ne donne lieu à aucune erreur appréciable sur la position de l'astre observé; n et c étant supposés positifs, Θ positif et inférieur à $\frac{\pi}{2}$ et

$$\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \Theta + \sin c \operatorname{séc} \Theta \operatorname{séc} n < 1,$$

on a

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial c} = \operatorname{séc} \Theta \left[\frac{\cos c \operatorname{séc} n}{\sqrt{1 - (\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \Theta + \sin c \operatorname{séc} \Theta \operatorname{séc} n)^2}} - 1 \right],$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial n} = \frac{\operatorname{séc}^2 n \operatorname{tang} \Theta + \sin c \operatorname{séc} \Theta \operatorname{tang} n \operatorname{séc} n}{\sqrt{1 - (\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \Theta + \sin c \operatorname{séc} \Theta \operatorname{séc} n)^2}} - \operatorname{tang} \Theta.$$

Je dis que

$$(7) \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial n} > 0.$$

Pour démontrer que $\frac{\partial \eta_1}{\partial c} > 0$ il suffit d'établir l'inégalité

$$\cos^2 c \operatorname{séc}^2 n > 1 - (\operatorname{tang} n \operatorname{tang} \Theta + \sin c \operatorname{séc} \Theta \operatorname{séc} n)^2.$$

Digitized by Google

Or, en multipliant ses deux membres par $\cos^2 \mathfrak{D} \cos^2 n$, il vient

$$\cos^2 c \cos^2 \mathfrak{D} > \cos^2 \mathfrak{D} \cos^2 n - (\sin n \sin \mathfrak{D} + \sin c)^2,$$

qui, en remplaçant les cosinus par des sinus, se réduit à

$$(\sin n + \sin c \sin \mathfrak{D})^2 > 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

L'inégalité $\frac{\partial \eta}{\partial n} > 0$ a évidemment lieu pour $c = 0$. Or le second membre de $\frac{\partial \eta}{\partial n}$ est une fonction croissante de c, puisque le numérateur de la fraction qui y figure croît avec c et qu'en même temps son dénominateur décroît $\left(c < \frac{\pi}{2}\right)$. Cette fonction, positive pour $c = 0$, est *a fortiori* positive pour $c > 0$. C. Q. F. D.

D'après les inégalités (7), η est une fonction croissante de n et de c.

Si n et c demeurent au-dessous d'une limite commune λ, on a, en remplaçant n et c par λ dans l'expression de η,

$$(8) \qquad \eta < \arcsin[\operatorname{tang}\lambda(\operatorname{tang}\mathfrak{D} + \operatorname{séc}\mathfrak{D})] - \lambda(\operatorname{tang}\mathfrak{D} + \operatorname{séc}\mathfrak{D}).$$

Le second membre de cette inégalité est donc une limite supérieure de l'erreur commise sur τ, lorsque l'on détermine cette inconnue au moyen de l'équation approchée (2).

2. On sait que l'erreur commise sur la direction d'un astre, rapportée à des axes fixes, est inférieure en valeur absolue au quotient par $\operatorname{séc}\mathfrak{D}$ de l'erreur commise sur τ. Pour établir que l'équation (2) peut toujours être employée dans la réduction des observations de passages, il suffit d'établir que dans la pratique l'inégalité

$$\frac{\arcsin[(\operatorname{tang}\mathfrak{D} + \operatorname{séc}\mathfrak{D})\operatorname{tang}\lambda] - \lambda(\operatorname{tang}\mathfrak{D} + \operatorname{séc}\mathfrak{D})}{\operatorname{séc}\mathfrak{D}} < 0'',1 \sin 1''$$

est toujours vérifiée. C'est ce qui aura lieu si la suivante, dont le premier membre est plus grand, est satisfaite

$$(9) \quad 2\,\frac{\arcsin[(\operatorname{tang}\mathfrak{D} + \operatorname{séc}\mathfrak{D})\operatorname{tang}\lambda] - \lambda(\operatorname{tang}\mathfrak{D} + \operatorname{séc}\mathfrak{D})}{\operatorname{tang}\mathfrak{D} + \operatorname{séc}\mathfrak{D}} < 0'',1 \sin 1''.$$

Il est aisé de voir que le premier membre de l'inégalité (9) est

Digitized by Google

une fonction croissante de Φ. Pour l'établir posons

$$u = \operatorname{tang}\Phi + \operatorname{séc}\Phi;$$

u est une fonction croissante de Φ pour $0 < \Phi < \frac{\pi}{2}$. Il suffit donc d'établir que la fonction

$$y = \frac{\arcsin(u \operatorname{tang}\lambda)}{u} - \lambda$$

croît avec u, le produit $u \operatorname{tang}\lambda$ restant plus petit que 1. On a

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{u^2}\left[\frac{u \operatorname{tang}\lambda}{\sqrt{1 - u^2 \operatorname{tang}^2\lambda}} - \arcsin(u \operatorname{tang}\lambda)\right],$$

ou, en observant que l'on a, dans le premier quadrant,

$$\arcsin(u \operatorname{tang}\lambda) = \operatorname{arc\,tang} \frac{u \operatorname{tang}\lambda}{\sqrt{1 - u^2 \operatorname{tang}^2\lambda}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{u^2}\left(\frac{u \operatorname{tang}\lambda}{\sqrt{1 - u^2 \operatorname{tang}^2\lambda}} - \operatorname{arc\,tang} \frac{u \operatorname{tang}\lambda}{\sqrt{1 - u^2 \operatorname{tang}^2\lambda}}\right).$$

De là résulte

$$\frac{\partial y}{\partial u} > 0,$$

puisque, dans le premier quadrant, l'arc est inférieur à la tangente.

Le premier membre de l'inégalité (9) croissant avec Φ, sa plus grande valeur correspond à la plus grande valeur de Φ qui se présente dans la pratique.

Or l'étoile la plus voisine du pôle a $5'$ pour distance polaire; d'autre part les constantes d'un instrument bien installé ne dépassent pas 1^s en valeur absolue. La formule simple (2), employée dans la réduction des observations méridiennes, convient donc dans tous les cas si l'inégalité (9) est vérifiée pour

$$\Phi = 90^\circ - 5' \qquad \text{et} \qquad \lambda = 15''.$$

Or c'est ce que l'on constate numériquement.

Remarque. — Les observations courantes se font toujours à plus de 1° du pôle. On peut se demander quelle valeur λ pourrait atteindre sans que l'inégalité (9) cesse d'avoir lieu, lorsque Φ demeure au-dessous de 89°.

En développant en série le premier membre de l'inégalité (9)

Digitized by Google

et conservant le terme le plus important seulement, l'inégalité se réduit à

$$\frac{\lambda^3(\tang\Theta + \sec\Theta)^2}{3} < \frac{1}{10}\sin 1'';$$

d'où, en posant $\lambda' = \frac{\lambda}{\sin 1''}$, pour exprimer λ en secondes d'arc,

$$\lambda' < \sqrt[3]{\frac{3}{10(\tang\Theta + \sec\Theta)^2 \sin^2 1''}},$$

ce qui donne pour $\Theta = 89°$,

$$\lambda' < 157'',$$

ou

$$\lambda' < 10^s,5.$$

Ce résultat n'est pas modifié lorsque l'on effectue le calcul rigoureusement.

Les constantes n et c de la lunette pourraient donc atteindre plus de dix secondes de temps, sans que la formule de réduction

$$\tau = m + n\tang\Theta + c\sec\Theta$$

cesse d'être applicable, du moment où les observations se font à plus de 1° du pôle.

La valeur de la constante m n'est d'ailleurs aucunement limitée.

OBSERVATIONS DE JUNON ET DE VESTA,

FAITES AU CERCLE MÉRIDIEN DE L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE;

PAR MM. MAITRE ET LUBRANO.

Dates.	T. m. Marseille.	⅄.	♀ géoc.	Parall.	O.—C. (*Naut. Alm.*) ⅄.	O.—C. (*Naut. Alm.*) ♀.
			(3) Junon.			
1897.	h m s	h m s	° ′ ″	″	s	″
Févr. 16....	7.46.53,1	5.35. 3,24	82.48.20,8	—3,3	—0,45	+0,2
17....	7.43.38,8	5.35.44,64	82.38.27,0	—3,3	—0,25	—0,6
18....	7.40.25,4	5.36.27,25	82.28.38,4	—3,3	—0,41	+0,1
22....	7.27.17,4	5.39.33,42	81.50. 2,0	—3,1	—0,42	—0,4
23....	7.24.41,7	5.40.23,74	81.40.34,4	—3,1	—0,30	—0,1
24....	7.21.37,3	5.41.15,38	81.31.11,6	—3,0	—0,29	+0,3
25....	7.18.34,2	5.42. 8,35	81.21.52,2	—3,0	—0,34	—0,9

Digitized by Google

Dates.	T. m. Marseille.	☊.	☋ géoc.	Parall.	O.-C. (*Naut. Alm.*). ☊.	☋.
			(3) Junon.			
1897.	h m s	h m s	° ′ ″	″	s	″
Févr. 26....	7.15.32,6	5.43. 2,82	81.12.39,5	—2,9	—0,29	—0,5
27....	7.12.32,2	5.43.58,47	81. 3.30,7	—2,9	—0.43	—1,6
Mars 2....	7. 3.39,3	5.46.53,76	80.36.40,4	—2,8	—0,49	—1,1
4....	6.57.50,5	5.48.57,15	80.19.15,9	—2,8	—0,43	—0,6
5....	6.54.58,0	5.50. 0,73	80.10.42,2	—2,7	—0,37	—0,8
6....	6.52. 6,6	5.51. 5,45	80. 2.15,1	—2,7	—0,39	—0,7
8....	6.46.27,4	5.53.18,42	79.45.39,1	—2,7	—0,41	—0,9
9....	6.43.39,5	5.54.26,61	79.37.30,9	—2,6	—0,45	—0,9
11....	6.38. 7,2	5.56.46,43	79.21.34,3	—2,6	—0,40	—0,9
			(4) Vesta.			
1897.						
Févr. 16....	7.41.15,6	5.29.24,50	66.41.47,5	—1,5	+1,25	—4,8
17....	7.37.35,5	5.29.40,41	66.39.22,3	—1,5	+1,38	—4,4
18....	7.33.57,1	5.29.57,90	66.36.57,6	—1,5	+1,32	—3,9
22....	7.19.40,7	5.31.25,41	66.27.22,8	—1,5	+1,25	—3,1
23....	7.16.10,9	5.31.51,55	66.24.59,9	—1,5	+1,25	—3,6
24....	7.12.42,8	5.32.19,45	66.22.37,8	—1,4	+1,35	—4,0
25....	7. 9.16,2	5.32.48,87	66.20.16,7	—1,4	+1,32	—4,1
26....	7. 5.51,2	5.33.19,87	66.17.57,1	—1,4	+1,26	—3,5
27....	7. 2.27,8	5.33.52,41	66.15.37,8	—1,4	+1,12	—3,5
Mars 2....	6.52.27,3	5.35.39,97	66. 8.45,6	—1,4	+1,17	—3,4
4....	6.45.54,7	5.36.59,39	66. 4.15,2	—1,4	+1,23	—4,2
5....	6.42.40,6	5.37.41,35	66. 2. 3,0	—1,4	+1,26	—3,5
6....	6.39.27,9	5.38.24,63	65.59.51,3	—1,3	+1,15	—3,5
8....	6.33. 6,9	5.39.55,67	65.55.32,3	—1,3	+1,10	—3,2
9....	6.29.58,6	5.40.43,39	65.53.24,4	—1,3	+1,15	—3,7

OBSERVATIONS DE PETITES PLANÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE PARIS (équatorial de la Tour de l'Ouest de $0^m,305$ d'ouverture);

PAR M. G. FAYET.

Dates.	T. m. de Paris.	Δ☊.	Δ☋.	N. de c.	☊ app.	log f p.	☋ app.	log f. p.	★
				(153) Hilda.					
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Aout 4.	10.51.25	—0.25,67	— 7. 6,2	8.8	20.45. 4,54	$\bar{1},003n$	— 6.29.46,7	0,858	1
6.	10.18.58	+0.10,32	— 0.38,7	8.8	20.43.47,58	$\bar{1},157n$	— 6.35. 9,5	0,858	»

Digitized by Google

Dates.	T. m. de Paris.	ΔÆ.	ΔD.	N. de c.	Æ app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★
					(194) Prokné.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Sept. 1.	10. 4. 6	—0.20,92	+ 3.47,2	8.8	22.24.43,47	$\bar{1}$,201 *n*	— 8.28.10,4	0,866	3
4.	10.20.47	+0.35,42	— 7.25,1	8.8	22.23. 8,51	$\bar{1}$,044 *n*	— 9.24.47,1	0,873	4
11.	9.26.23	+1.19,70	— 6. 3,5	15.10	22.19.52,43	$\bar{1}$,294 *n*	—11.30. 0,4	0,876	5
13.	8.53. 5	—0.20,17	— 9.25,9	8.8	22.19. 5,26	$\bar{1}$,277 *n*	—12. 3.36,6	0,878	6
15.	10.55.50	—1.38,26	— 2.19,2	15.10	22.18.20,09	$\bar{2}$,498	—12.37.55,5	0,889	7
19.	9. 6.21	—2. 6,98	—10.29,7	12.8	22.17.11,02	$\bar{1}$,108 *n*	—13.38.47,1	0,889	8
					(233) Astérope.				
1897.									
Aout 2.	12.55. 1	—0.24,45	+ 0.54,3	8.8	22.41. 6,61	2,995 *n*	+ 4.23. 8,6	0,791	9
4.	11.52.36	—0.29,21	+ 1. 4,3	8.8	22.40. 8,23	$\bar{1}$,264 *n*	+ 4.21. 1,4	0,794	10
6.	11.36. 1	—0.17,95	— 2.16,9	8 8	22.39. 3,99	$\bar{1}$,290 *n*	+ 4.18. 1,4	0,795	11
Sept. 1.	11. 7.34	—2.12,74	— 2.37,6	12.8	22.20.19,49	$\bar{2}$,665 *n*	+ 2.20.59,5	0,805	12
4.	9.30.24	—2.39,81	+ 2.35,1	15.10	22.18. 5,07	$\bar{1}$,257 *n*	+ 2. 0.45,8	0,809	13
					(308) Polyxo.				
1897.									
Sept. 4.	11.17.44	—0.32,19	+ 0.29,0	8.8	22.55.58,90	$\bar{2}$,841 *n*	— 4.22.25,2	0,848	14

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	Æ moy. 1897,0.	Réd. au j.	D moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	11	20.45.26,02	+4,19	— 6.22.53,8	+13,3	Anon. rapportée à (15).
2.	9,5	20.43.33,05	+4,21	— 6.34.44,1	+13,3	5591 B. D. — 6° rapp. à (16).
3.	9,2	22.25. 0,02	+4,37	— 8.32.20,5	+22,9	5887 B. D. — 8° rapp. à (17).
4.	9	22.22.28,69	+4,40	— 9.17.44,7	+22,7	W_1, XXII^h, n° 427.
5.	9	22.18.28,28	+4,45	—11.24.19,3	+22,4	W_1, XXII^h, n° 325.
6.	8,5	22.19.20,97	+4,46	—11.54.33,1	+22,4	W_1, XXII^h, n° 357.
7.	9	22.19.53,88	+4,47	—12.35.58,6	+22,3	W_1, XXII^h, n° 369.
8.	8	22.19.13,51	+4,49	—13.28.39,5	+22,1	Lalande 43719.
9.	7,8	22.41.27,27	+3,79	+ 4.21.54,9	+19,4	A. G. Albany 7874.
10.	11	22.40.33,61	+3,83	+ 4.19.37,4	+19,7	Anon. rapportée à (9).
11.	8,9	22.39.18,08	+3,86	+ 4.19.58,2	+20,1	A. G. Albany 7864.
12.	9,3	22.22.28,04	+4,19	+ 2.23.14,2	+22,9	4507 B. B. VI + 2°.
13.	8,8	22.20.40,67	+4,21	+ 1.57.47,6	+23,1	A. G. Albany 7768.
14.	8	22.56.26,79	+4,30	— 4.23.19,2	+25,0	Lalande 45028.
15.	9	20.45. 9,32	»	— 6.15.46,6	»	W_1, XX^h, n° 1098.
16.	9	20.42.41,00	»	— 6.35. 8,0	»	W_1, XX^h, n° 1030.
17.	8	22.25. 7,75	»	— 8.38.37,4	»	W_1, XXII^h, n° 477.

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

FÉRAUD (A.). — SUR LA VALEUR APPROCHÉE DES COEFFICIENTS D'ORDRE ÉLEVÉ DANS LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES (Thèse soutenue le 23 mars 1897 devant la Faculté des Sciences de Paris). *Annales de l'observatoire de Bordeaux*, t. VII.

Les recherches de M. Poincaré sur la non-existence des intégrales uniformes ont donné un intérêt nouveau à l'évaluation approchée des coefficients d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice suivant les sinus et les cosinus des multiples des deux anomalies moyennes.

M. Poincaré a consacré à cette question le Chapitre VI des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Il a plus particulièrement considéré un cas où les deux mobiles se déplacent dans un plan et cet exemple a fourni toute une série de résultats fondamentaux.

L'objet principal du travail analysé ici est l'étude de quelques autres cas du même problème.

M. Féraud a divisé son Mémoire en quatre Parties.

Pour la première Partie, l'auteur revient sur la détermination des coefficients du développement des fonctions d'une seule variable; il montre que tous les résultats relatifs à cette question, établis depuis la publication du Mémoire de M. Darboux *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres*, peuvent être facilement rattachés aux cas envisagés par le savant géomètre en posant le problème de la manière suivante :

Soit une fonction

$$f(z) = \Sigma a_i z^i$$

développable suivant les puissances de la variable; on se proposera d'en déduire une fonction

$$\varphi(t) = \Sigma b_j t^j$$

développable suivant les puissances de la variable, dont les coefficients b_j soient liés aux coefficients a_i par des équations récurrentes et dont les singularités sur les cercles de convergence soient telles que l'on sache effectivement calculer la valeur approchée des coefficients.

Ainsi, relativement aux fonctions $f(z)$ développables suivant les puissances croissantes et décroissantes de la variable, l'auteur fait voir que la généralisation de la méthode de M. Darboux, proposée par M. Flamme,

Digitized by Google

est immédiate, et que, pour évaluer les coefficients a_i dont l'indice i est positif, on peut procéder comme si cette fonction était développable suivant les puissances croissantes de la variable.

Il envisage ensuite une fonction $f(z)$ développable suivant les puissances croissantes de la variable et présentant au point $z = 1$ de son cercle de convergence une singularité dans les environs de laquelle le développement de la fonction est de la forme

$$(1 - z)^{\alpha}\psi(1 - z)\log^{p}(1 - z).$$

Pour étudier l'allure des fonctions $\varphi(t)$ qu'il convient alors d'introduire, l'auteur a eu à considérer des fonctions représentées par des intégrales définies qui appartiennent à la classe à laquelle M. Goursat a consacré un Mémoire dans les *Acta mathematica*. Dans le même but, il a formé explicitement l'équation différentielle du quatrième ordre à laquelle satisfait la fonction

$$y = \int_0^1 (1 - x)^{-\alpha-1}(1 - tx)^{\alpha}\log(1 - tx)\,dx.$$

Dans la deuxième Partie, M. Féraud aborde l'étude des coefficients du développement des fonctions de deux variables.

Soit $F(l, l')$ une fonction de deux variables réelles, périodique par rapport à l et à l' et de périodes 2π. Le calcul des coefficients du développement de cette fonction en une série double trigonométrique est immédiat quand on connaît la valeur des expressions

$$A_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{(x)=1}\int_{(y)=1} f(x, y)x^{-m-1}y^{-n-1}\,dx\,dy,$$

où $f(x, y)$ désigne ce que devient $F(l, l')$ par le changement de variables

$$e^{il} = x, \qquad e^{il'} = y.$$

Pour calculer les coefficients $A_{m,n}$, l'Auteur, s'inspirant de la généralisation de la méthode de M. Darboux proposée par M. Poincaré, introduit la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{(x)=1}\int_{(y)=1} \frac{f(x, y)\,dx\,dy}{x^{b+1}y^{d+1}\left(1 - \dfrac{t}{x^a y^c}\right)},$$

qui donne la suite simplement infinie de ces coefficients pour lesquels on a

$$m = ap + b, \qquad n = cp + d,$$

où a, b, c, d désignent des entiers positifs ou négatifs et p un nombre

Digitized by Google

variable devant recevoir toutes les valeurs entières positives. Le choix des constantes a, b, c, d permet d'ailleurs d'obtenir tous les coefficients $A_{m,n}$.

Il étudie ensuite la fonction $\varphi(t)$ dans le cas où $f(x, y)$ est une fonction rationnelle

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Imaginons la surface de Riemann

$$Q(x, y) = 0$$

appliquée sur le plan de la variable x. Le cylindre ayant pour base le cercle de rayon un découpera dans cette surface un certain nombre de courbes fermées.

Désignant par C_1, C_2, ..., C_f celles pour lesquelles le module de y est plus petit que un, il montre que l'on peut définir la fonction $\varphi(t)$ en intégrant suivant les courbes C_1, C_2, ..., C_f la fonction

$$\frac{P(x, y)}{x^{b+1} y^{d+1} \left(1 - \frac{t}{x^a y^c}\right) \frac{\partial Q}{\partial y}}.$$

Pour définir la fonction $\varphi(t)$ à partir de la valeur initiale t_0, on déformera ces courbes de façon qu'elles ne soient jamais traversées ni par les points de ramification de la surface de Riemann, ni par les pôles de l'élément différentiel marqués sur cette surface.

En écrivant que deux ou plusieurs pôles variables se confondent entre eux ou avec les points de ramification de la surface de Riemann, on obtient toutes les valeurs de t pour lesquelles la déformation des courbes peut être impossible.

Les valeurs de t ainsi obtenues sont les seules qui puissent être valeurs singulières de la fonction $\varphi(t)$. Pour distinguer, parmi ces valeurs, celles qui, suivant l'expression de M. Poincaré, sont admissibles, il faudra suivre les déformations du contour d'intégration et les déplacements des pôles variables sur la surface de Riemann.

L'Auteur, réservant pour les deux dernières Parties des discussions absolument analogues, s'est borné, dans la deuxième, à chercher l'allure de la fonction $\varphi(t)$ dans les environs des valeurs singulières et il a reconnu que dans tous les cas la fonction $\varphi(t)$ est développable algébriquement dans les environs de ses points singuliers.

Dans la troisième Partie, M. Féraud arrive à l'étude du développement de la partie principale de la fonction perturbatrice suivant les sinus et cosinus des multiples des deux anomalies moyennes.

Il discute le cas de deux orbites circulaires situées dans des plans

Digitized by Google

quelconques, et est amené, dans ce cas, à étudier la fonction

$$\varphi(t) = \int_{|x|=1}\int_{|y|=1} \frac{dx\,dy}{x^b y^d \left(1 - \frac{x^a y^c}{t}\right)\sqrt{xy\left[(x-\beta y)(y-\beta x) + \frac{\beta}{2}(\cos J - 1)(1-x^2)(1-y^2)\right]}}.$$

Pour définir la fonction $\varphi(t)$, lorsque t se déplace à partir de la valeur initiale t_0, il faudrait déformer le contour d'intégration tracé dans le plan de la variable x, et primitivement constitué par le cercle de rayon un, de façon qu'il ne fût jamais traversé par les points singuliers de la fonction de x définie par l'intégrale

$$(1) \quad \int_{|y|=1} \frac{dy}{y^d\left(1 - \frac{x^a y^c}{t}\right)\sqrt{y\left[(x-\beta y)(y-\beta x) + \frac{\beta}{2}(\cos J - 1)(1-x^2)(1-y^2)\right]}}.$$

Toute la difficulté consiste à distinguer si un point singulier de cette fonction de x qui se présente sur un des bords du contour d'intégration est ou n'est pas point singulier de la détermination, que l'on a définie de proche en proche sur le contour d'intégration.

Cette distinction est facilitée par la représentation suivante des éléments.

Considérant la surface de Riemann

$$(x - \beta y)(y - \beta x) + \frac{\beta}{2}(\cos J - 1)(1 - x^2)(1 - y^2) = 0,$$

on marque les points singuliers de la fonction (1) sur cette surface et l'on adopte comme contour initial d'intégration la courbe suivant laquelle le cylindre, ayant pour base le cercle de rayon un, coupe le feuillet inférieur.

L'auteur démontrera, en effet, que cette représentation est *effective*, c'est-à-dire que les déformations que doit subir le contour d'intégration sont celles que comportent la constitution de la surface de Riemann et la marche des points singuliers sur cette surface.

Les équations qui donnent les valeurs singulières de la fonction $\varphi(t)$ s'obtiennent en écrivant que deux points singuliers de la fonction de x définie par l'intégrale (1) se confondent. Après avoir formé ces équations, il divise la discussion en deux cas qui correspondent, le premier à $a + c$ impair, le second à $a + c$ pair.

Envisageons le premier cas, pour fixer les idées. Les points singuliers sont alors distribués sur les deux axes de coordonnées symétriquement par rapport à l'origine.

Digitized by Google

Il s'agit de distinguer, parmi les points situés sur la partie positive de l'axe réel, par exemple, ceux qui sont admissibles de ceux qui ne le sont pas. On y arrive en définissant de proche en proche la détermination considérée de la fonction $\varphi(t)$ lorsque x décrit la partie positive de l'axe réel. D'une discussion assez étendue il résulte qu'il n'y a qu'un seul point admissible situé sur la partie positive de l'axe réel.

L'auteur arrive ainsi aux conclusions suivantes :

Si $a+c$ est impair, il y a deux points admissibles et deux seulement.

Si $a+c$ est pair, il n'y a en tout qu'un seul point admissible.

Il cherche, enfin, l'allure de la fonction $\varphi(t)$ dans les environs de ces divers points.

La partie non holomorphe du développement de $\varphi(t)$ dans le voisinage de l'un quelconque de ces points est égale au produit d'un logarithme par une fonction holomorphe.

D'ailleurs, le point admissible unique du second cas joue le même rôle que l'ensemble des deux points admissibles du premier cas.

De sorte que, dans tous les cas, la valeur approchée du coefficient de $t^{\frac{1}{p}}$, dans le développement de $\varphi(t)$, est égale ou bien à zéro ou bien à

$$-4i\pi t_\nu^p\left[A_0\frac{1}{p}+A_1\frac{1}{t_\nu}\frac{1}{p(p-1)}+\ldots+A_q\frac{1}{t_\nu^q}\frac{1.2\ldots q}{p(p-1)\ldots(p-q)}\right].$$

M. Maurice Hamy a précédemment traité le cas de deux orbites circulaires dans un intéressant Mémoire inséré au tome X de ce *Bulletin*.

Dans la quatrième Partie, M. Féraud suppose les deux orbites dans un même plan; l'une d'elles est circulaire et l'autre elliptique.

On a maintenant à étudier la fonction

$$\varphi(t)=\int_{|x|=1}dx\int_{|y|=1}\frac{\left[1-\frac{\sin\varphi}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]dy}{\left[xe^{-\frac{\sin\varphi}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right]^b y^d\left[1-\frac{x^a e^{-\frac{a\sin\varphi}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}y^c}{t}\right]\sqrt{y\left[\left(x\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2-\beta xy\right]\left[\left(x\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2y-\beta x\right]}}.$$

Les points singuliers de la fonction de x définie par la seconde des intégrales qui composent l'expression de $\varphi(t)$ seront marqués sur la surface de Riemann

$$\left[\left(x\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2-\beta xy\right]\left[\left(x\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2y-\beta x\right]=0.$$

Le cylindre ayant pour base le cercle de rayon 1, coupe cette surface.

Digitized by Google

composée de deux feuillets distincts, suivant deux courbes distinctes; on adoptera comme contour initial d'intégration, celle de ces courbes pour laquelle les valeurs de y ont un module plus petit que l'unité.

Cette représentation des éléments est *effective,* au sens qui a été précédemment donné à ce mot.

Le contour initial d'intégration est tracé sur l'un ou sur l'autre feuillet de la surface de Riemann, suivant que l'orbite circulaire enveloppe l'orbite elliptique, ou est enveloppée par celle-ci. Il y a donc lieu d'examiner séparément chacune de ces deux hypothèses.

L'auteur suppose d'abord que l'orbite circulaire enveloppe l'orbite elliptique.

Les seules valeurs singulières de la fonction $\varphi(t)$ qu'il suffit de considérer sont alors celles que l'on obtient en remplaçant, dans l'expression

$$(2) \qquad t = x^a e^{-\frac{a\sin\varphi}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}(\beta x)^{-c}\left(x\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)^{2c},$$

x par les racines des équations

$$(3) \quad \frac{(x-\tau)(\tau x-1)}{x(1+\tau^2)} = \frac{c}{a}\,\frac{x+\tau}{x-\tau}, \qquad \frac{(x-\tau)(\tau x-1)}{x(1+\tau^2)} = \pm\beta, \qquad x = \frac{1}{\tau}.$$

Il est conduit à distinguer plusieurs cas caractérisés par les positions relatives des racines de ces équations; il indique, d'ailleurs, un moyen simple de déterminer le cas et la division dans lesquels on se trouve lorsque le rapport $\frac{c}{a}$, l'excentricité $\sin\varphi$ et le rapport β des longueurs des grands axes sont donnés.

Pour distinguer, dans les différents cas, parmi les points singuliers situés sur un même rayon issu de l'origine, ceux qui sont admissibles de ceux qui ne le sont pas, on définit de proche en proche, sur ce rayon, la détermination considérée de la fonction $\varphi(t)$.

La forme des courbes de déplacement des points singuliers imaginaires, définis par la relation (2), dans laquelle on fait t de $+\infty$ à o joue, dans cette étude, un rôle prépondérant.

Disons, pour indiquer rapidement comment la discussion a été conduite, que la forme de ces courbes, dans chaque nouveau cas à examiner, a été déduite de la considération de ces mêmes courbes dans une hypothèse limite de ce cas envisagée comme hypothèse limite d'un cas précédemment étudié.

Les résultats de la discussion sont résumés dans le Tableau de la page 180.

L'Auteur suppose, en dernier lieu, l'orbite circulaire enveloppée par l'orbite elliptique.

Digitized by Google

Les seules valeurs singulières de la fonction $\varphi(t)$ qu'il suffit de considérer sont celles que l'on obtient en remplaçant, dans l'expression

$$t = x^a e^{-\frac{a \sin\varphi}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} (\beta x)^c \left(x \sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-2c},$$

x par les racines des équations que l'on déduit des équations (3) en changeant x en $\frac{1}{x}$.

La discussion est encore divisée en plusieurs cas correspondant aux diverses positions relatives de ces racines.

On distingue, dans les divers cas, les points qui sont admissibles de ceux qui ne le sont pas en procédant comme précédemment.

Les courbes de déplacement des points singuliers imaginaires sont, d'ailleurs, facilement déduites de celles qui ont été considérées dans l'hypothèse précédente.

Le Tableau de la page 203 résume les résultats de la discussion.

La partie non holomorphe du développement de la fonction $\varphi(t)$, dans les environs de ses points singuliers, se présente toujours dans la forme de produit d'un logarithme par une fonction holomorphe. La valeur approchée des coefficients de $\varphi(t)$, et, par suite, des coefficients du développement de la partie principale de la fonction perturbatrice, s'obtient donc en employant les résultats de la première Partie.

L'hypothèse de l'orbite elliptique enveloppée par l'orbite circulaire avait déjà été envisagée par M. Maurice Hamy dans un Mémoire inséré au tome X (4e Série) du *Journal de Mathématiques*.

Relativement à l'hypothèse de l'orbite circulaire enveloppée par l'orbite elliptique, M. Hamy et M. Féraud ont publié presque simultanément leurs résultats dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (T. CXXII); depuis lors M. Hamy a développé les siens dans un Mémoire inséré au tome II (5e Série) du *Journal de Mathématiques*.

Les résultats des deux auteurs, quoique d'aspect un peu différent, sont au fond en parfait accord.

La nature et la position relative des ellipses introduisent dans la discussion du problème de l'évaluation des coefficients du développement de la partie principale de la fonction perturbatrice des modifications considérables.

En traitant des cas particuliers simples, M. Féraud semble avoir eu surtout pour souci de découvrir une route qui permette d'aborder l'étude de cas plus complexes.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

ORBITE DE LA COMÈTE TEMPEL 1871-IV;

PAR M. I. LAGARDE.

La comète 1871-IV fut découverte par Tempel, à Milan, le 3 novembre 1871. Elle était d'un faible éclat, de 1′ à 2′ de diamètre et possédait un noyau de 11e grandeur environ.

Avant son passage au périhélie elle fut observée, du 3 au 18 novembre, dans un assez grand nombre d'observatoires de l'hémisphère nord. Dans cet intervalle les déclinaisons demeurèrent comprises entre — 9° et — 23° et les variations diurnes des coordonnées furent modérées et régulières.

Il en fut tout autrement lorsque la comète réapparut après son passage au périhélie. Visible seulement dans l'hémisphère sud, elle y fut observée, du 17 janvier au 20 février, aux observatoires du Cap et de Cordoba. Le 17 janvier la comète avait une déclinaison de — 70°; elle continua à s'approcher du pôle sud jusqu'au 2 février où elle atteignit — 84°, puis revint rapidement vers le nord; le 20 février sa déclinaison était — 53°. Pendant ce temps l'ascension droite était passée de 18^h à 8^h. Ces rapides variations des coordonnées furent, en outre, extrêmement irrégulières : l'ascension droite qui, aux environs du 17 janvier et du 20 février, avait une variation diurne de deux ou trois minutes, un moment (2 février) diminua d'une heure par jour. D'autre part, la déclinaison variait de plus d'un degré par jour, un peu avant et un peu après son passage par le minimum.

Ces circonstances ont singulièrement augmenté les difficultés du calcul de l'orbite. Tout d'abord, j'ai dû renoncer à former une éphéméride régulière, interpolable dans les environs des époques où les coordonnées de la comète présentaient ces variations excessives et il est devenu indispensable, pour comparer les observations faites à ces moments, de calculer des lieux isolés pour les dates mêmes de ces observations. En outre, par suite du voisinage du pôle, il m'a fallu, dans bien des calculs, tenir

Digitized by Google

compte des termes d'ordre supérieur qu'on peut négliger pour des astres plus rapprochés de l'équateur.

Les observations faites avant le passage au périhélie se répartissent, sur l'orbite, dans un angle héliocentrique d'environ 17° et celles qui suivent le passage au périhélie sont comprises dans un angle de 33°. L'angle des rayons vecteurs correspondant à la première et à la dernière observation est de 167°.

J'ai repris les calculs de réduction des observateurs, n'acceptant leurs résultats que quand les données fournies par eux ne me permettaient pas de les vérifier. J'ai, notamment, apporté un soin tout spécial à rechercher, indépendamment du travail des observateurs, les meilleures positions des étoiles de comparaison, m'efforçant de les baser au moins sur deux catalogues de précision modernes. Malheureusement, la comète s'est presque constamment déplacée dans une région du ciel encore peu riche en observations d'étoiles et j'ai dû souvent me départir de la règle que je m'étais imposée. Dans ces cas-là j'ai fait pour le mieux, en tenant compte du degré de précision des catalogues employés, du nombre d'observations des étoiles, de la date des observations, etc. Pour un certain nombre d'entre elles qu'on ne trouvait guère que dans le catalogue d'Argelander-Weiss, j'ai eu la bonne fortune de pouvoir recourir aux observations inédites de l'observatoire de Bordeaux et je suis heureux d'adresser ici mes remercîments à son Directeur, M. Rayet, qui s'est empressé de me les communiquer. Qu'il me soit permis d'exprimer aussi tout particulièrement ma gratitude à M. Schulhof qui m'a conseillé d'entreprendre ce travail et qui met, avec empressement, au service des débutants sa grande compétence en ces matières et à M. Bossert dont les avis m'ont été souvent très utiles.

MM. Hind, Peters et Schulhof ont calculé des éléments provisoires paraboliques basés sur un plus ou moins grand nombre d'observations faites avant le passage au périhélie. M. Lindhagen a publié des éléments elliptiques reposant en outre sur des observations faites au Cap et à Cordoba. Il dit lui-même que ces éléments sont assez précis pour servir de base à un calcul définitif. Ce sont ces éléments provisoires que j'ai adoptés.

Digitized by Google

Éléments de M. Lindhagen (¹) :

T = 1871 décembre 20,41826, t. moy. de Berlin.

π	29°.59'.28",78	Éclipt. et équin. moy. 1870,0.
☊	147. 6.11,95	
i	98.19.31,52	
$\log q$	9,8396727	
e	0,9964266	

De ces éléments j'ai déduit l'éphéméride suivante :

Éphéméride pour 12ʰ temps moyen de Berlin.

Dates. 1871.	Æ vraie. h m s	☊ vraie. ° ' "	log dist. ♁.	T. d'aberr. m s
Nov. 2	18.37.33,96	— 8.24.32,0	0,1016	10.29,8
3	18.37.55,90	— 9.25.33,7	0,1035	10.32,5
4	18.38.18,78	—10.26. 0,4	0,1054	10.35,3
5	18.38.42,52	—11.25.52,2	0,1073	10.38,1
6	18.39. 7,06	—12.25. 9,5	0,1093	10.41,0
7	18.39.32,32	—13.23.52,7	0,1112	10.43,9
8	18.39.58,25	—14.22. 2,2	0,1132	10.46,8
9	18.40.24,77	—15.19.38,7	0,1151	10.49,7
10	18.40.51,81	—16.16.42,6	0,1171	10.52,7
11	18.41.19,30	—17.13.14,7	0,1191	10.55,7
12	18.41.47,17	—18. 9.15,7	0,1210	10.58,6
13	18.42.15,33	—19. 4.46,4	0,1229	11. 1,5
14	18.42.43,70	—19.59.47,4	0,1248	11. 4,4
15	18.43.12,20	—20.54.19,7	0,1267	11. 7,2
16	18.43.40,74	—21.48.24,1	0,1285	11.10,0
17	18.44. 9,24	—22.42. 1,5	0,1303	11.12,8
18	18.44.37,63	—23.35.12,8	0,1320	11.15,5
1872.				
Janv. 17	18.10.50,96	—69.55.11,6	0,0247	8.47,6
18	18. 7.31,03	—70.46.52,3	0,0182	8.39,8
19	18. 3.47,74	—71.39.41,2	0,0116	8.31,9
20	17.59.36,27	—72.33.41,1	0,0048	8.24,0
21	17.54.50,43	—73.28.54,0	9,9979	8.16,1
22	17.49.22,19	—74.25.20,6	9,9909	8. 8,1
23	17.43. 1,00	—75.22.59,4	9,9838	8. 0,2
24	17.35.32,75	—76.21.46,3	9,9765	7.52,2
25	17.26.38,31	—77.21.32,1	9,9692	7.44,3
26	17.15.51,27	—78.22. 1,1	9,9618	7.36,5
27	17. 2.34,72	—79.22.46,4	9,9543	7.28,7

(¹) *Astronomische Nachrichten*, n° 2647.

Digitized by Google

Dates. 1872.	Æ vraie. h m s	⊕ vraie. ° ′ ″	log dist. ♂.	T. d'aberr. m s
Janv. 28.....	16.45.56,68	—80.23. 3,9	9,9467	7.20,9
29.....	16.24.44,24	—81.21.41,2	9,9391	7.13,3
30.....	15.57.18,89	—82.16.41,8	9,9315	7. 5,7
31.....	15.21.42,17	—83. 5. 0,3	9,9239	6.58,3
Févr. 1.....	14.36.15,18	—83.42. 0,1	9,9163	6.51,1
2.....	13.41.22,92	—84. 1.47,3	9,9087	6.44,0
3.....	12.41.35,32	—83.58.55,7	9,9012	6.37,0
4.....	11.44.23,89	—83.31.18,9	9,8938	6.30,3
5.....	10.55.40,61	—82.41. 7,5	9,8865	6.23,9
6.....	10.17. 2,62	—81.32.43,6	9,8795	6.17,6
7.....	9.47.17,42	—80.10.20,0	9,8726	6.11,7
8.....	9.24.25,80	—78.37. 6,1	9,8660	6. 6,1
9.....	9. 6.40,94	—76.55.11,4	9,8597	6. 0,8
10.....	8.52.41,69	—75. 6. 2,9	9,8537	5.55,9
11.....	8.41.29,72	—73.10.41,5	9,8481	5.51,4
12.....	8.32.23,68	—71. 9.52,7	9,8430	5.47,3
13.....	8.24.54,03	—69. 4.13,1	9,8385	5.43,6
14.....	8.18.39,41	—66.54.15,1	9,8344	5.40,4
15.....	8.13.24,19	—64.40.29,4	9,8310	5.37,8
16.....	8. 8.56,72	—62.23.26,3	9,8282	5.35,6
17.....	8. 5. 8,14	—60. 3.36,3	9,8261	5.34,0
18.....	8. 1.51,66	—57.41.31,9	9,8247	5.32,9
19.....	7.59. 1,98	—55.17.46,2	9,8241	5.32,4
20.....	7.56.34,91	—52.52.53,5	9,8242	5.32,5

Pour des raisons précédemment indiquées j'ai, en outre, calculé les 13 lieux isolés suivants, dont les dates, exprimées en temps moyen de Berlin, sont celles des observations diminuées du temps d'aberration emprunté à l'éphéméride précédente.

Dates. 1872.	Æ vraie. h m s	⊕ vraie. ° ′ ″	log. dist. ♂.	T. d'aberr. m s
Janv. 26,563262.	17.15. 5,77	—78.25.51,58	9,9613	7.36,0
29,609169.	16.22. 4,77	—81.27.54,71	9,9383	7.12,5
30,609813.	15.53.50,46	—82.22.23,93	9,9307	7. 4,9
31,388419.	15.26. 8,60	—83. 0. 4,62	9,9247	6.59,1
31,396655.	15.25.49,18	—83. 0.26,70	9,9247	6.59,1
31,404058.	15.25.31,72	—83. 0.46,47	9,9246	6.59,0
Févr. 1,609948.	14.30.38,35	—83.45. 7,94	9,9154	6.50,3
2,607814.	13.35. 3,03	—84. 2.38,64	9,9079	6.43,2
4,616124.	11.38.14,23	—83.26.34,22	9,8930	6.29,6
6,707530.	10.10.12,17	—81.16.39,39	9,8780	6.16,3
7,610647.	9.44.27,45	—80. 0.30,21	9,8718	6.11,1
8,626817.	9.21.55,72	—78.24.37,41	9,8652	6. 5,4
8,648892.	9.21.30,07	—78.22.26,24	9,8650	6. 5,3

Digitized by Google

Voici maintenant, dans l'ordre de leurs ascensions droites, le Tableau des étoiles de comparaison affectées de numéros qui me serviront à les désigner dans la suite.

Numéros d'ordre.	Æ 1871,0.	Ⓓ 1871,0.	Autorités.
	h m s	° ′ ″	
1.....	18.33. 2,38	—13.11.15,3	Berlin, 2 observ.
2.....	18.34.21,58	—14.40.59,1	$\frac{1}{3}$ (2 Gould + Yarnall).
3.....	18.35.12,60	— 9.10.23,9	$\frac{1}{3}$ (Paris + Gould + Stone).
4.....	18.36.33,99	—10.51.24,3	$\frac{1}{2}$ (Munich$_1$ + Santini).
5.....	18.37.53,18	—11.35. 0,8	$\frac{1}{5}$ (2 Paris + 1 Brux. + 2 Rad$_3$).
6.....	18.38.39,46	—12.13.22,0	$\frac{1}{3}$ (1 Munich$_1$ + 2 Munich$_2$).
7.....	18.38.51,36	—16.11.19,5	Bordeaux.
8.....	18.39.28,97	—15. 2.48,2	$\frac{1}{3}$ (Bonn t. VI + Sant. + Mun$_1$).
9.....	18.39.36,37	—10.15.34,7	$\frac{1}{2}$ (Paris + Gould).
10.....	18.40. 5,30	—16. 6.59,8	$\frac{1}{2}$ (Paris + Berlin).
11.....	18.40.31,45	—16.54.50,3	Bordeaux.
12.....	18.40.48,32	—23.21.15,4	Zones de Cordoba.
13.....	18.40.48,49	—11.15. 9,7	Munich$_1$, 3 observ.
14.....	18.41. 9,58	—18.50.24,8	Berlin.
15.....	18.41.30,37	—13.20.55,0	Weisse$_1$.
16.....	18.41.40,59	—14. 2.42,4	Paris, 2 observ.
17.....	18.41.48,86	—18.54.43,5	Bordeaux.
18.....	18.42. 0,63	—19. 3. 2,4	$\frac{1}{2}$ (Bordeaux + Paris).
19.....	18.42. 0,72	—20.28. 7,6	$\frac{1}{4}$ (Paris + Brux. + Yarn. + Gould).
20.....	18.42. 5,58	—11. 6.57,1	Paris.
21.....	18.42.33,15	—18. 4.57,1	$\frac{1}{2}$ (Paris + Bordeaux).
22.....	18.42.45,60	—13.24.58,1	$\frac{1}{2}$ (Paris + Santini).
23.....	18.42.47,28	—13.24.47,6	$\frac{1}{3}$ (Paris + Munich$_1$ + Santini).
24.....	18.42.54,18	—22.24.42,6	$\frac{1}{2}$ (Paris + Gould).
25.....	18.43.18,79	—11. 9. 7,2	$\frac{1}{2}$ (Munich$_1$ + Santini).
26.....	18.43.20,66	—20.26.30,1	$\frac{1}{2}$ (Paris + Bruxelles).
27.....	18.43.27,12	—20.26.49,0	$\frac{1}{2}$ (Paris + Bruxelles).
28.....	18.43.30,82	—19.45.45,0	Bordeaux.
29.....	18.43.53,13	—19.47.11,2	Bordeaux.
30.....	18.44.21,96	—20.31.28,7	Bonn, t. VI.
31.....	18.48. 5,13	—16.31.51,4	Bossert, cat. de m. pr.
	1872,0.	1872,0.	
32.....	7.54.37,44	—51.56.48,7	$\frac{1}{2}$ (Gould + Stone).
33.....	7.56. 2,60	—52.11.34,9	$\frac{1}{2}$ (Gould + Stone).
34.....	8. 0.52,77	—57. 9.32,6	Gould.
35.....	8. 5. 5,49	—59.58.34,0	Le Cap, 4 observ.
36.....	8.24.19,20	—68.59.46,0	Le Cap, 4 observ.
37.....	8.24.41,47	—68.48.39,5	Gould.
38.....	8.32.52,80	—71. 7.13,0	Gould.

Digitized by Google

Numéros d'ordre.	Æ 1872,0.	Ⓓ 1872.0.	Autorités.
	h m s	° ′ ″	
39.....	8.42.15,56	—73. 9. 8,2	½ (Gould + Stone).
40.....	8.48.33,70	—74.57.46,2	Gould.
41.....	9.17.48,82	—78.28.21,4	Gould.
42.....	9.23.49,01	—78.32.20,1	Gould.
43.....	9.44.35,38	—80. 8.46,4	Gould.
44.....	10.15.31,15	—81.17.31,9	Gould.
45.....	11.44. 4,82	—83.27.37,5	Gould.
46.....	13.43.11,95	»	Gould.
47.....	14.34.46,40	—83.54.13,0	Gould.
48.....	15.24.55,76	—82.56.44,8	Le Cap.
49.....	15.50.59,95	—82.25.32,1	Gould.
50.....	16.18.51,92	—81.30.26,4	Gould.
51.....	17.17. 2,63	—78.29.37,4	Gould.
52.....	17.45.13,25	—75.30.33,9	Gould.
53.....	17.49.50,68	—74.36.41,0	Gould.
54.....	17.58.58,81	—72.46.21,9	Gould.
55.....	18. 0.21,61	—72.40.27,6	Gould.
56.....	18. 5.22,90	—71.57.47,5	Gould.
57.....	18. 5.24,61	—70. 8. 3,1	Gould.

Le Tableau suivant donne le résultat de la comparaison de l'éphéméride avec les positions observées de la comète. Le temps moyen de l'observation, donné à la seconde ronde pour les observations faites avant le passage au périhélie, est donné au dixième de seconde pour les autres observations faites lorsque la comète avait un fort mouvement. Les nombres de la dernière colonne sont les numéros des étoiles de comparaison du Tableau précédent. Les corrections cos Ⓓ *d*Æ et *d*Ⓓ sont entendues dans le sens observation — calcul. La valeur de la parallaxe horizontale du Soleil que j'ai employée pour le calcul des facteurs parallactiques est 8″,802.

Date.	Lieu d'observation.	T. m. Berlin.	Æ géoc.	cos Ⓓ *d*Æ.	Ⓓ géoc.	*d*Ⓓ.	*
			NOVEMBRE 1871.				
		h m s	h m s	s	° ′ ″	″	
3.	Milan.....	7.46.59	18.37.51,68	—0,13	— 9.14.30,9	— 4,8	3
4.	Milan.....	6.50.52	18.38.11,41	—2,18	—10.12.53,5	—15,3	9
4.	Bonn.....	7.26.41	18.38.10,72	—3,42	—10.14.19,2	—11,0	9
5.	Vienne (Josephst.)	6.13.11	18.38.34,88	—1,65	—11.11.12,4	— 8,5	25
5.	Leipzig.....	6.27. 5	18.38.34,25	—2,49	—11.11.42,7	— 4,2	20
5.	Leipzig.....	6.28.27	18.38.34,85	—1,92	—11.11.45,0	— 3,0	»

Digitized by Google

Date.	Lieu d'observation.	T. m. Berlin.	☊ géoc.	cos (☾) d☊.	(☾) géoc.	d(☾).	★
		h m s	h m s	s	° ′ ″	″	
5.	Vienne (anc.)....	6.33. 1	18.38.34,67	−2,18	−11.12.13,6	−20,3	4,5
5.	Vienne (anc.)....	7. 8.22	18.38.34,92	−2,50	−11.13.34,7	−13,5	13
5.	Bonn.....	7.12.23	18.38.34,12	−3,35	−11.13.38,0	− 6,8	5
5.	Karlsruhe.....	7.30.42	18.38.36,28	−1,53	−11.14.21,1	− 4,4	5
6.	Leipzig.....	6. 7. 2	18.38.57,88	−2,85	−12.10.20,4	− 6,0	6
6.	Hambourg.....	6.59. 4	18.38.59,08	−2,55	−12.12.23,6	− 1,0	6
6.	Altona.....	7. 2.22	18.39. 1,08	−0,66	−12.12.49,5	−18,7	2
6.	Hambourg.....	7.33.47	»	»	−12.14. 4,7	−16,6	6
6.	Hambourg.....	7.34.54	18.38.59,54	−2,70	»	»	6
7.	Athènes.....	5.39.58	18.39.24,14	−1,23	−13. 8.13,8	−13,9	15
7.	Athènes.....	5.39.58	18.39.24,04	−1,32	−13. 8. 5,2	− 5,3	22
7.	Athènes.....	5.39.58	18.39.23,69	−1,67	−13. 8. 4,4	− 4,5	23
7.	Altona.....	6.28.43	18.39.24,56	−1,66	−13.10. 9,1	−10,2	2
7.	Hambourg.....	6.32. 0	18.39.25,14	−1,15	−13.10.29,0	−22,0	15
7.	Berlin.....	6.34.28	18.39.23,49	−2,80	−13.10.33,0	−19,9	1
7.	Leipzig.....	7. 0.35	18.39.25,36	−1,42	−13.11.16,4	+ 0,5	15
8.	Leipzig.....	6.29.14	18.39.49,87	−2,11	−14. 8.34,5	−16,9	16
8.	Twickenham	6.42.22	18.39.50,23	−2,00	−14. 9. 9,9	−20,6	»
8.	Berlin.....	7. 5. 6	18.39.50,56	−2,08	−14.10.23,5	−39,2	»
9.	Hambourg.....	6.29. 9	18.40.15,86	−2,48	−15. 6.18,0	−16,4	8
9.	Milan.....	6.30.40	18.40.17,12	−1,29	−15. 6.14,5	− 9,4	8
9.	Lund	6.31.49	18.40.16,30	−2,11	−15. 6.15,6	− 7,8	8
9.	Altona.....	6.42.37	18.40.18,08	−0,57	−15. 6.50,6	−16,8	2
9.	Lund	6.54.43	18.40.17,52	−1,34	−15. 7.20,4	−17,6	8
9.	Hambourg.....	6.56.20	18.40.16,10	−2,74	−15. 7.18,9	−12,2	8
9.	Twickenham	7. 4.12	18.40.17,99	−1,05	−15. 7.34,9	− 9,5	»
10.	Berlin.....	6. 9.46	18.40.43,56	−1,37	−16. 2.57,0	−30,0	10
10.	Vienne.....	6.25.25	18.40.41,66	−3,49	−16. 3.23,0	−18,8	10
10.	Kremsmünster...	6.28.25	18.40.43,17	−2,09	−16. 3.26,6	−15,3	10
10.	Milan.....	6.29.21	18.40.44,07	−1,24	−16. 3.28,8	−15,3	10
10.	Altona.....	6.32.14	18.40.45,60	+0,18	−16. 3.42,8	−22,5	2
10.	Hambourg.....	6.32.54	18.40.43,28	−2,06	−16. 3.47,9	−26,0	7
10.	Vienne(Josephst.)	6.33.43	18.40.43,71	−1,66	−16. 3.48,7	−24,8	7
10.	Vienne (anc.)....	6.43.33	18.40.42,93	−2,59	−16. 4.12,2	−25,1	10
10.	Twickenham	6.46.17	18.40.44,17	−1,44	−16. 4.13,1	−19,4	»
10.	Vienne(Josephst.)	6.49. 9	18.40.43,99	−1,67	−16. 4.18,6	−18,1	10
10.	Neuchâtel.....	7. 8. 7	18.40.43,65	−2,34	−16. 4.54,5	− 9,2	10
10.	Bonn	7.42.23	18.40.46,17	−0,55	−16. 6.24,7	−18,1	10
11.	Hambourg	6.19.48	18.41.10,45	−2,03	−16.59.51,0	−20,5	11
11.	Altona.....	6.20.53	18.41.11,22	−1,31	−16.59.35,0	− 2,0	31
11.	Leipzig.....	6.44.43	18.41.10,30	−2,62	−17. 0.40,5	−11,5	11
12.	Lund.....	6. 7.49	18.41.38,22	−1,80	−17.55.40,2	−29,2	21
12.	Lund.....	6.23.21	18.41.39,50	−0,87	»	»	21
12.	Twickenham	6.47.26	18.41.38,88	−1,90	−17.57.18,8	−35,6	»

Digitized by Google

Date.	Lieu d'observation.	T. m. Berlin.	Æ géoc.	cos ☾ dÆ.	☾ géoc.	d☾.	*
		h m s	h m s	s	° ′ ″	″	
13.	Athènes.....	5.46.34	18.42. 6,19	—1,51	—18.50.18,2	—18,1	18
13.	Berlin.....	5.52.23	18.42. 6,60	—1,23	—18.50.41,9	—28,3	14
13.	Lund.....	5.54.46	18.42. 5,26	—2,54	—18.50.32,3	—13,3	17
14.	Athènes.....	5.26.38	18.42.34,53	—1,14	—19.44.45,9	—22,6	28
14.	Athènes.....	5.36.14	18.42.34,80	—1,05	—19.45. 5,4	—20,1	29
14.	Hambourg.....	6.13.25	18.42.34,68	—1,85	—19.46.31,4	—21,1	28
14.	Hambourg.....	6.34.41	»	»	—19.47.21,5	—22,5	28
14.	Hambourg.....	6.39.19	18.42.35,03	—2,01	»	»	28
15.	Athènes.....	5.29.30	18.43. 2,99	—1,18	—20.39.36,1	—16,2	26
15.	Athènes.....	5.36.29	18.43. 3,31	—1,01	—20.39.56,8	—31,0	27
15.	Athènes.....	5.48.46	18.43. 3,24	—1,30	—20.40.14,8	—21,2	19
15.	Vienne (Josephst.)	5.51.59	18.43. 2,72	—1,85	—20.40.20,0	—19,2	30
17.	Hambourg.....	5.59.21	18.44. 0,09	—1,66	»	»	24
17.	Hambourg.....	6. 0.57	»	»	—22.28.43,6	—26,9	24
18.	Hambourg.....	5.46.50	18.44.28,28	—1,64	»	»	12

Janvier 1872.

17.	Cordoba.....	18.53.31,1	18. 9.56,23	—0,22	—70. 9.47,9	—11,5	57
19.	Le Cap.....	9.49.34,9	18. 4.10,22	—0,07	—71.34.41,6	— 9,3	»
19.	Cordoba.....	18.30.40,6	18. 2.43,50	—0,15	—71.53.49,4	+ 4,7	56
19.	Cordoba.....	19.31.30,6	18. 2.33,70	+0,02	—71.56.11,3	— 1,1	56
20.	Cordoba.....	16.24.10,0	17.58.48,29	+0,02	—72.43.30,6	— 6,4	55
20.	Cordoba.....	16.47.56,2	17.58.42,18	—0,45	—72.44.20,7	— 2,2	54
22.	Cordoba.....	14.12.49,0	17.48.51,51	+0,02	—74.30.12,0	+ 5,3	53
22.	Cordoba.....	17.17. 4,1	17.48. 5,06	—0,06	—74.37.32,6	+ 4,1	53
23.	Cordoba.....	14. 6. 3,5	17.42.27,00	—0,01	—75.27.41,8	+ 4,3	52
24.	Le Cap.....	9. 2.23,5	17.36.33,90	—0,25	—76.14. 5,3	+ 3,2	»
26.	Cordoba.....	13.38.41,8	17.15. 7,14	+0,27	—78.25.53,6	— 2,0	51
29.	Cordoba.....	14.44.24,8	16.22. 3,93	—0,13	—81.27.43,5	+11,2	50
30.	Cordoba.....	14.45.12,8	15.53.56,72	+0,83	—82.22.12,7	+11,2	49
31.	Le Cap.....	9.26.18,5	15.26.12,23	+0,44	»	»	48
31.	Le Cap.....	9.38.10,1	»	»	—83. 0.20,9	+ 5,8	48
31.	Le Cap.....	9.48.49,6	15.25.35,40	+0,45	»	»	48

Février 1872.

1.	Cordoba.....	14.45. 9,8	14.30.50,79	+1,35	—83.44.56,3	+11,6	47
2.	Cordoba.....	14.41.58,3	13.34.57,81	—0,54	»	»	46
4.	Cordoba.....	14.53.42,8	11.38.26,78	+1,43	—83.26.32,7	+ 1,5	45
6.	Cordoba.....	17. 5. 6,9	10.10.20,85	+1,32	»	»	44
7.	Cordoba.....	14.45.31,1	9.44.33,82	+1,11	—80. 0.48,5	—18,3	43
8.	Cordoba.....	15. 8.42,4	9.22. 2,69	+1,40	—78.24.51,9	—14,5	42

Digitized by Google

Date.	Lieu d'observation.	T. m. Berlin.	Æ géoc.	cos Ⓓ dÆ.	Ⓓ géoc.	dⒹ.	★
		h m s	h m s	s	° ′ ″	″	
8.	Cordoba	15.40.29,6	9.21.39,39	+1,87	—78.22.42,3	—16,1	41
10.	Cordoba	14.19. 1,0	8.51.23,53	+1,42	—74.53.28,1	—11,4	40
11.	Cordoba	13.50.52,7	8.40.50,12	+1,18	—73. 2.16,3	—12,9	39
13.	Le Cap.....	12.14. 2,7	»	»	—69. 3.41,8	—14,8	36
13.	Le Cap.....	12.25.58,2	8.24.50,94	+0,95	»	»	36
13.	Le Cap.....	12.35.36,3	»	»	—69. 1.46,1	—12,4	36
13.	Le Cap.....	12.46. 1,9	8.24.45,55	+1,05	»	»	36
13.	Le Cap.....	13. 7.30,1	»	»	—68.59. 4,3	—20,6	36
13.	Cordoba	14.48. 5,6	8.24.10,37	+0,72	—68.50.12,9	—26,8	37
17.	Le Cap.....	12.12.41,3	»	»	—60. 2.54,7	— 0,3	35
17.	Le Cap.....	12.38. 3,7	8. 5. 4,69	+0,66	»	»	35
17.	Le Cap.....	13.16.24,5	»	»	—59.56.41,5	— 1,7	35
18.	Cordoba	17. 5.38,2	8. 1.15,94	+0,92	—57.12. 4,8	—23,2	34
20.	Cordoba	20.23.30,6	7.55.47,50	—0,77	—52. 2.52,3	—14,1	33
20.	Cordoba	21.31.48,1	7.55.42,51	—0,06	—51.55.46,2	— 1,9	32

REMARQUES.

Un certain nombre d'observations, en général celles qui ne sont pas suivies d'un numéro d'étoile de comparaison, ont été acceptées telles qu'elles avaient été publiées par les observateurs, les données étant insuffisantes pour en reprendre la réduction.

1871 *nov.* 5, t. m. $6^h 33^m 1^s$. — L'observateur a rapporté la comète à deux étoiles différentes et a groupé les résultats pour donner une seule position de la comète correspondant au temps moyen donné.

1871 *nov.* 8, t. m. $7^h 5^m 6^s$. — L'étoile de comparaison ne paraît pas être celle qu'indique l'observateur; j'ai adopté ses positions conclues de la comète.

1871 *nov.* 18, t. m. $5^h 46^m 50^s$. — La déclinaison est en erreur d'environ 2′; j'ai négligé cette coordonnée.

1872 *janv.* 19 et 24. — Observations du Cap. Observations méridiennes de la comète.

1872 *févr.* 6. — J'ai supprimé la déclinaison qui paraît en erreur de 1′ environ.

1872 *févr.* 12, Cordoba. — Cette observation ne figure pas au Tableau. Les discordances des corrections trouvées font penser qu'il y a erreur d'étoile de comparaison ou que l'astre observé n'était pas la comète.

1872 *févr.* 13, Cordoba. — J'ai admis une erreur de 1^h dans le temps sidéral de l'observation.

1872 *févr.* 17. — J'ai augmenté l'ascension droite de 2^m.

Digitized by Google

Les corrections et suppressions que je viens d'indiquer aux remarques sont la conséquence de discordances tout à fait inadmissibles. L'examen du Tableau précédent montre que l'incertitude des positions conclues de la comète est assez forte. J'ai voulu étudier la valeur relative des corrections de l'éphéméride pour leur attribuer des poids s'il y avait lieu. En ce qui concerne les observations faites en 1871, j'ai pu facilement, par un groupement provisoire, établir, pour chacune des coordonnées, une fonction du temps à trois termes représentant avec assez d'exactitude l'ensemble des corrections de l'éphéméride. Les écarts trouvés entre les corrections théoriques déduites de cette fonction et les corrections réelles ont donné une idée de la précision de chaque observation. Ces écarts sont en général assez forts; aucun cependant n'atteint une valeur inacceptable. Pour les observations faites après le passage au périhélie, la variation plus rapide des corrections et leur petit nombre rendaient moins facile cette étude; je me suis borné à constater qu'ici encore aucune observation ne semblait suspecte d'erreur et qu'il n'y avait entre les corrections aucune discordance exagérée. D'autre part, le groupement par observatoires n'a pas fait découvrir d'erreurs systématiques. Dans ces circonstances, il ne m'a pas paru que l'attribution de poids fût justifiée et dût notablement améliorer le résultat final. J'ai donc admis que toutes les observations avaient le même poids.

En groupant les corrections dans les espaces de temps pendant lesquels elles semblent n'avoir pas de variations dépendant des puissances du temps autres que la première, j'ai formé six lieux normaux. Les observations se répartissent comme il suit :

I.....	du 3 novembre	au 9 novembre 1871
II.....	du 10 novembre	au 18 novembre
III.....	du 17 janvier	au 26 janvier 1872
IV.....	du 29 janvier	au 4 février
V.....	du 6 février	au 13 février
VI.....	du 17 février	au 20 février

J'ai donné le poids 2 aux deux premiers lieux normaux qui contiennent un bien plus grand nombre d'observations que les autres; les derniers ont tous le poids 1.

Digitized by Google

Voici le Tableau des corrections de l'éphéméride pour les dates de ces lieux normaux :

	Dates.	cos ☊ dAR. en temps.	cos ☊ dAR. en arc.	d☊.	Poids.
		s	″		
I.....	1871. Nov. 6,5	−1,937	−29,05	−11,30	2
II.....	1871. Nov. 12,5	−1,639	−24,59	−21,28	2
III.....	1872. Janv. 21,5	−0,080	− 1,20	− 0,99	1
IV.....	1872. Févr. 1,5	+0,565	+ 8,48	+ 8,26	1
V.....	1872. Févr. 10,5	+1,253	+18,80	−16,56	1
VI.....	1872. Févr. 19,5	+0,188	+ 2,82	−10,05	1

Ces résultats doivent encore être corrigés des perturbations que les planètes ont fait subir à la comète. Par cette correction, j'aurai ramené les lieux normaux au cas du mouvement elliptique, les rendant ainsi absolument comparables aux positions correspondantes de l'éphéméride. J'ai, en conséquence, calculé les perturbations produites par chacune des planètes : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne. L'action d'Uranus et de Neptune a été insensible. La méthode employée est celle d'Encke par les quadratures mécaniques; j'ai choisi pour époque de l'osculation la date 1871 nov. 6,0 et calculé directement les perturbations des coordonnées x, y, z rapportées à l'écliptique, de huit jours en huit jours. J'en ai déduit le Tableau suivant qui donne les perturbations totales en unités de la 7ᵉ décimale.

Perturbations totales de ☿, ♀, ♁, ♂, ♃, ♄.

Dates. 1871.	dx.	dy.	dz.	Dates. 1872.	dx.	dy.	dz.
Nov. 2,0..	− 0,10	− 0,33	− 0,04	Janv. 1,0..	− 0,05	−52,64	− 1,87
6,0..	0,00	0,00	0,00	5,0..	+ 1,43	−57,66	− 2,40
10,0..	− 0,10	− 0,32	− 0,03	9,0..	+ 3,14	−62,30	− 2,67
14,0..	− 0,37	− 1,32	− 0,15	13,0..	+ 5,15	−66,42	− 2,49
18,0..	− 0,82	− 2,95	− 0,28	17,0..	+ 7,51	−70,01	− 1,67
22,0..	− 1,41	− 5,24	− 0,44	21,0..	+10,27	−73,05	− 0,15
26,0..	− 2,03	− 8,15	− 0,55	25,0..	+13,54	−75,55	+ 2,23
30,0..	− 2,66	−11,66	− 0,60	29,0..	+17,34	−77,50	+ 5,45
Déc. 4,0..	− 3,21	−15,70	− 0,59	Févr. 2,0..	+21,78	−78,87	+ 9,55
8,0..	− 3,62	−20,25	− 0,50	6,0..	+26,82	−79,57	+14,54
12,0..	− 3,78	−25,20	− 0,40	10,0..	+32,59	−79,66	+20,39
16,0..	− 3,62	−30,53	− 0,36	14,0..	+38,95	−78,99	+27,19
20,0..	− 3,17	−36,03	− 0,43	18,0..	+46,06	−77,58	+34,86
24,0..	− 2,37	−41,64	− 0,76	22,0..	+53,76	−75,36	+43,39
28,0..	− 1,32	−47,21	− 1,25				

Digitized by Google

De ce Tableau j'ai tiré, par interpolation, les perturbations correspondant aux lieux normaux. J'en ai d'abord déduit, par une transformation de coordonnées, les perturbations dx', dy', dz' rapportées à l'équateur et, enfin, les perturbations en ascension droite et en déclinaison, cos ☊ δ☊ et δ☊. Voici ces résultats :

	Écliptique			Équateur				
	dx.	dy.	dz.	dx'.	dy'.	dz'.	cos ☊ δ☊.	δ☊.
I.....	0,00	— 0,01	0,00	0,00	— 0,01	0,00	0',00	0',00
II.....	— 0,25	— 0,87	— 0,10	— 0,25	— 0,76	— 0,45	0,00	0,00
III.....	+10,65	—73,39	+ 0,11	+10,65	—67,34	—29,11	+0,25	+1,16
IV.....	+21,20	—78,73	+ 8,99	+21,20	—75,77	—23,08	+1,81	+0,71
V.....	+33,35	—79,61	+21,20	+33,35	—81,44	—12,24	+0,91	—2,37
VI.....	+48,88	—76,84	+37,95	+48,88	—85,55	+ 4,23	0,00	—2,43

J'ai donc, en tenant compte de ces données, les corrections suivantes pour les positions de l'éphéméride :

	Dates.	cos ☊ d☊.	d☊.
I.....	1871. Nov. 6,5	—29',05	—11',30
II.....	1871. Nov. 12,5	—24,58	—21,28
III.....	1872. Janv. 21,5	— 1,45	— 2,15
IV.....	1872. Févr. 1,5	+ 6,67	+ 7,55
V.....	1872. Févr. 10,5	+17,89	—14,19
VI.....	1872. Févr. 19,5	+ 2,82	— 7,62

Il ne reste plus maintenant qu'à procéder à la recherche des corrections des éléments qui réduisent au minimum ces corrections de l'éphéméride. J'ai emprunté à l'Ouvrage de M. d'Oppolzer, t. II, les formules des équations différentielles qui lient entre elles toutes ces variations, dans le cas d'une orbite de très grande excentricité. Pour en faire une application dans le cas actuel j'ai tout d'abord transformé les éléments écliptiques de M. Lindhagen en éléments équatoriaux :

Éléments équatoriaux.

T = 1871 décembre 20,41826, t. moy. de Berlin.

π'.....	42°.22'.58",40	Équat. et équin. moy. 1870,0.
☊'.....	146.45.12,74	
i'.....	78.35.15,64	
$\log q$.....	9,8396727	
e.....	0,9964266	

Digitized by Google

J'ai ensuite formé les douze équations de condition suivantes, les six premières pour l'ascension droite, les six autres pour la déclinaison.

Les coefficients des inconnues sont sous la forme logarithmique.

		dT.	de.	$d \log q$.	$d\Lambda'$.	$\sin i' d\Omega'$.	di'.
1.....	$-29,05 =$	$+7,78803$	$+9,29059$	$+9,71274$	$+9,05937$	$+9,85391$	$-7,06377$
2.....	$-24,58 =$	$+7,82836$	$+9,18967$	$+9,62772$	$+8,64180$	$+9,75860$	$-8,75729$
3.....	$-1,45 =$	$+8,32595$	$-9,24461$	$+0,05051$	$-9,78716$	$-0,04664$	$-9,51698$
4.....	$+6,67 =$	$+8,38068$	$-9,56041$	$+9,98145$	$-9,74442$	$-9,52409$	$+9,29221$
5.....	$+17,89 =$	$-7,95973$	$+8,86472$	$-0,02717$	$+9,65778$	$+0,31578$	$+9,78308$
6.....	$+2,82 =$	$-8,17800$	$+9,41311$	$-0,13234$	$+9,77176$	$+0,38543$	$+9,67636$
7.....	$-11,30 =$	$+8,19458$	$+8,72760$	$-0,31973$	$-9,92908$	$-0,00192$	$-5,82974$
8.....	$-21,28 =$	$+8,20385$	$+8,80666$	$-0,27952$	$-9,88543$	$-9,98409$	$+7,44550$
9.....	$-2,15 =$	$+7,95327$	$-9,17752$	$-9,67144$	$-8,07698$	$+9,70555$	$+9,67282$
10.....	$+7,55 =$	$-8,04580$	$+8,77797$	$-0,11244$	$+9,73119$	$+0,23090$	$+9,77401$
11.....	$-14,19 =$	$-8,45730$	$+9,65509$	$-0,30629$	$+9,96728$	$+9,84509$	$-9,24003$
12.....	$-7,62 =$	$-8,43847$	$+9,53147$	$-0,49150$	$+0,12849$	$+9,84984$	$-9,41509$

Tous les coefficients des équations 1, 2, 7 et 8 devront être multipliés par $\sqrt{2}$ pour tenir compte des poids attribués aux lieux normaux.

Pour la facilité des calculs ultérieurs j'ai changé les inconnues en posant

$$x = [9,78308]\, di', \qquad y = [0,38543] \sin i' d\Omega', \qquad z = [0,12849]\, d\Lambda',$$
$$t = [0,49150]\, d \log q, \qquad u = [8,45730]\, dT, \qquad v = [9,65509]\, de.$$

J'ai, en outre, changé l'unité d'erreur en divisant tous les nombres des premiers membres par le plus élevé d'entre eux : $29'',05\sqrt{2}$; les équations de condition ainsi transformées sont alors devenues

		x.	y.	z.	t.	u.	v.
1....	$-0,0000 =$	$-7,4312$	$+9,6190$	$+9,0814$	$+9,3718$	$+9,4813$	$+9,7860$
2....	$-9,9274 =$	$-9,1247$	$+9,5237$	$+8,6638$	$+9,2867$	$+9,5216$	$+9,6851$
3....	$-8,5477 =$	$-9,7339$	$-9,6612$	$-9,6587$	$+9,5590$	$+9,8687$	$-9,8595$
4....	$+9,2104 =$	$+9,5091$	$-9,1387$	$-9,6159$	$+9,4900$	$+9,9234$	$-9,9053$
5....	$+9,6389 =$	$+0,0000$	$+9,9304$	$+9,5293$	$-9,5367$	$-9,5024$	$+9,2096$
6....	$+8,8366 =$	$+9,8933$	$+0,0000$	$+9,6433$	$-9,6408$	$-9,7207$	$+9,7580$
7....	$-9,5899 =$	$-6,1972$	$-9,7670$	$-9,9511$	$-9,9787$	$+9,8878$	$+9,2230$
8....	$-9,8648 =$	$+7,8129$	$-9,7492$	$-9,9075$	$-9,9385$	$+9,8971$	$+9,3021$
9....	$-8,7187 =$	$+9,8897$	$+9,3201$	$-7,9485$	$-9,1799$	$+9,4960$	$-9,5224$
10....	$+9,2642 =$	$+9,9909$	$+9,8455$	$+9,6027$	$-9,6209$	$-9,5885$	$+9,1229$
11....	$-9,5383 =$	$-9,4570$	$+9,4597$	$+9,8388$	$-9,8148$	$-0,0000$	$+0,0000$
12....	$-9,2682 =$	$-9,6320$	$+9,4644$	$+0,0000$	$-0,0000$	$-9,9812$	$+9,8764$

Digitized by Google

Dans ces équations tous les coefficients sont sous la forme logarithmique. En leur appliquant la méthode des moindres carrés, je les ai ramenées à six équations normales dont la résolution a donné pour les inconnues les résultats suivants :

x	[9,84119n]
y	[0,12725]
z	[0,11714n]
t	[9,62238n]
u	[0,10390n]
v	[0,20124n]

d'où

di'	[1,67178n]
$\sin i'\, d\Omega'$	[1,35549]
$d\Lambda'$	[1,60232n]
$d \log q$	[0,74455n]
dT	[3,26027n]
de	[2,15982n]

La substitution de ces variations des éléments dans les équations de condition a fait apparaître les résidus suivants dans le sens observation-calcul :

	$\cos \delta\, d\alpha$.	$d\delta$.
I	$+1'',55$	$+2'',10$
II	$-1,55$	$-2,23$
III	$+3,26$	$-0,04$
IV	$-2,17$	$-0,33$
V	$+5,75$	$+0,76$
VI	$-3,86$	$-0,15$

dont la somme des carrés, après qu'on a multiplié les résidus des deux premiers lieux par 2 à cause des poids, est $92'',40$. Les résidus des ascensions droites ne sont pas entièrement satisfaisants; mais la cause doit en être imputée à l'incertitude des lieux normaux. Les variations des coordonnées étaient telles qu'une faible erreur dans le temps de l'observation devait considérablement influer sur les résultats de la comparaison avec l'éphéméride. Les résidus précédents semblent pour ces raisons demeurer dans les limites de l'exactitude qu'on pouvait espérer.

La résolution des équations normales n'a pas révélé d'indétermination pour certaines des inconnues; néanmoins, comme, par la nature même du problème, l'excentricité est mal déterminée,

Digitized by Google

j'ai voulu reprendre la résolution des équations en supposant l'inconnue v indéterminée. J'ai résolu les équations normales de façon à obtenir les autres inconnues en fonction de v, puis j'ai substitué ces valeurs dans le système des équations de conditions transformées. J'ai ainsi obtenu douze équations avec v pour seule inconnue. La valeur de v que j'en ai déduite par la méthode des moindres carrés ne diffère pas sensiblement de la valeur trouvée précédemment.

Les corrections des éléments équatoriaux adoptées sont en définitive :

dT	$-0,0088278$	di'	$-46'',97$
$d\pi'$	$+6'',24$	$d\log q$	$-0,0000269$
$d\Omega'$	$+23,13$	de	$-0,0007005$

La représentation directe des lieux normaux concorde avec la représentation par les équations différentielles. Il n'y a donc pas à espérer qu'une seconde solution du problème, en partant d'éléments plus précis, puisse donner de meilleurs résultats que la première. Voici donc les éléments que je considère comme les plus probables :

T = 1871 déc. 20,40943, t. m. de Berlin.

π	29°.59'.54",07	Équin. et éclipt. moy. 1870,0.
Ω	147. 6.44,80	
i	98.18.50,76	
$\log q$	9,8396458	
e	0,9957261	

Reste à savoir entre quelles limites on peut faire varier l'excentricité, qui est l'élément le plus mal déterminé, sans faire tort à la représentation des lieux normaux. La substitution des inconnues x, y, z, t, u, déterminées en fonction de v, dans les équations de condition transformées, conduit aux résidus suivants :

Æ.		Ⓓ.	
$+1',55\sqrt{2}$	$-0,2705v$	$+2',10\sqrt{2}$	$+0,0256v$
$-1,55\sqrt{2}$	$-0,0525v$	$-2,23\sqrt{2}$	$-0,1051v$
$+3,26$	$+0,2218v$	$-0,04$	$-0,1590v$
$-2,17$	$+0,1821v$	$-0,33$	$-0,0676v$
$+5,75$	$+0,1131v$	$+0,76$	$-0,1682v$
$-3,86$	$+0,1971v$	$-0,15$	$+0,1664v$

Digitized by Google

Ces résidus, calculés pour chacune des hypothèses $v = +15''$, $v = -15''$, deviennent

$v = +15''$.		$v = -15''$.	
cos ☊ dÆ.	d☊.	cos ☊ dÆ.	d☊.
$-1'',8$	$+3'',3$	$+6'',2$	$+2'',6$
$-3,0$	$-4,7$	$-1,4$	$-1,6$
$+6,6$	$-2,4$	$-0,1$	$+2,3$
$+0,5$	$-1,3$	$-4,9$	$+0,7$
$+7,5$	$-1,8$	$+4,0$	$+3,3$
$-0,9$	$+2,4$	$-6,8$	$-2,6$

On voit qu'on ne pourrait guère dépasser pour v ces limites sans tomber sur des résidus inadmissibles. Pour ces valeurs extrêmes, on a $de = \pm 0,0001609$; c'est l'incertitude de l'excentricité. Les durées de la révolution qui correspondent à chacune des limites sont 2179^{ans} et 1880^{ans} dont la moyenne est 2030^{ans}, avec une incertitude $\pm 150^{ans}$.

OBSERVATIONS DE PETITES PLANÈTES ET DE LA COMÈTE PERRINE,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial d'Eichens, de $0^m,26$ d'ouverture);

PAR M. COGGIA.

Dates.	T. m. Marseille.	ΔÆ.	ΔΦ.	N. de c.	Æ app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	★
				(379) **AQ 1894.**					
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
AOUT 4.	11.16.57	+0.36,97	− 7.48,0	7.7	20.21.21,21	$\bar{2}$,266n	107.34.51,0	0,887n	1
26.	8.47.59	−0.17,61	− 7. 8,6	6.6	20. 7.33,28	$\bar{2}$,878	108.35.42,7	0,889n	2
27.	9.53.21	−0.43,32	− 4.25,9	5.5	20. 7. 7,56	$\bar{2}$,364	108.38.25,4	0,891n	3
				(144) **Vibilia.**					
AOUT 4.	12.12.30	−0. 5,66	− 9.45,1	5.5	20.39.58,83	$\bar{2}$,759	115.28.31,3	0,914n	4
				(240) **Vanadis.**					
AOUT 26.	10. 6. 4	+2.28,96	+ 7.35,4	5.5	22. 5.47,58	$\bar{1}$,264n	103.55.30,0	0,862n	5
27.	10.40.47	+1.35,34	+13.18,6	5.5	22. 4.53,97	$\bar{1}$,049n	104. 1.13,2	0,868n	6
30.	9.35.54	+1.22,42	− 4.35,3	5.5	22. 2.19,28	$\bar{1}$,308n	104.17.13,3	0,861n	7
SEPT. 1.	9.53.19	−0.20,75	+ 5.56,7	5.5	22. 0.36,11	$\bar{1}$,130n	104.27.45,3	0,868n	8
4.	9.40.12	−0.45,45	+ 9.21,1	5.5	21.58. 6,81	$\bar{1}$,187n	104.42.40,7	0,868n	9
24.	8.59.16	+2.23,24	+ 9.48,4	5.5	21.45.25,85	$\bar{2}$,772n	105.54. 0,2	0,879n	10
25.	9.19. 4	+1.59,44	+11.48,4	5.5	21.45. 2,04	$\bar{2}$,082n	105.56. 0,3	0,879n	11

Digitized by Google

Dates.	T. m. Marseille.	ΔΔ.	ΔΦ.	N. de c.	Δ app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	*
					(194) Prokné.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Aout 26.	11.26.32	+5.57,24	+ 1.42,4	5.5	22.28. 0,61	$\bar{2}$,873 *n*	96.34.32,4	0,828 *n*	12
27.	11.54.27	—0.37,42	+ 3.21,0	8.8	22.27.27,26	2,133 *n*	96.53.56,0	0,831 *n*	15
30.	10.21.46	+1. 7,02	— 5. 8,9	5.5	22.25.49,69	$\bar{1}$,154 *n*	97.50. 6,3	0,833 *n*	14
Sept. 1.	10.35.38	—0.29,16	— 9.49,3	5.5	22.24.43,10	$\bar{1}$,077 *n*	98.28.20,6	0,838 *n*	15
4.	10.50.16	+0.34,90	+ 7.36,4	5.5	22.23. 7,90	$\bar{2}$,830 *n*	99.24.58,6	0,845 *n*	16
24.	11.16. 4	—2. 0,56	+ 0.33,9	5.5	22.16.16,07	$\bar{1}$,160	104.48.16,3	0,869 *n*	17
25.	8.37.11	—2. 5,65	+11. 5,3	5.5	22.16.11,00	$\bar{1}$,179 *n*	104.59.47,7	0,869 *n*	18
					(416) Vaticana.				
Aout 26.	12.51.21	—1.34,26	— 1.21,3	5.5	0.57. 7,57	$\bar{1}$,284 *n*	102.11.35,4	0,853 *n*	19
27.	12.36.46	—2. 4,94	+ 3.34,3	6.6	0.56.36,91	$\bar{1}$,322 *n*	102.16.30,9	0,852 *n*	20
30.	13.16.36	+1.34,45	— 4. 8,5	5.5	0.54.53,81	$\bar{1}$,060 *n*	102.31.47,8	0,860 *n*	21
Sept. 4.	12.20.52	+0.39,77	— 6.57,7	6.6	0.51.41,19	$\bar{1}$,243 *n*	102.56.40,7	0,858 *n*	22
25.	12.41.51	—1. 5,75	— 2.44,6	5.5	0.33.51,68	$\bar{2}$,753	104.23.48,0	0,872 *n*	23
Oct. 23.	12.38.11	—0.13,58	— 5.39,5	7.7	0.10.41,30	$\bar{1}$,452	104.31.26,4	0,851 *n*	24
24.	9.11.45	—0.44,96	— 7.49,6	5.5	0.10. 9,92	$\bar{2}$,932 *n*	104.29.16,4	0,871 *n*	25
25.	8.53.33	+2.42,38	+ 3.54,4	5.5	0. 9.34,72	$\bar{1}$,047 *n*	104.26.36,4	0,870 *n*	26
26.	9.35. 6	+2. 6,95	+ 0.58,8	5.5	0. 8.59,28	$\bar{2}$,362 *n*	104.23.40,9	0,872 *n*	27
27.	8.27. 1	+1.35,54	— 1.53,9	5.5	0. 8.27,87	$\bar{1}$,158 *n*	104.20.48,3	0,867 *n*	28
28.	9.29.34	+1. 2,38	— 5.13,6	5.5	0. 7.54,70	$\bar{2}$,215 *n*	104.17.28,7	0,872 *n*	29
29.	9.37.44	+0.31,67	— 8.36,6	5.5	0. 7.23,99	$\bar{3}$,908	104.14. 5,8	0,872 *n*	30
30.	8.59. 2	—0.30,14	+ 0. 3,5	5.5	0. 6.55,77	$\bar{2}$,765 *n*	104.10.38,9	0,870 *n*	31
					DG (Charlois, 25 août).				
Sept. 25.	11.28.33	+1.54,15	+ 3.10,7	5.5	22.12.45,38	$\bar{1}$,248	81. 4.59,7	0,703 *n*	32
					DH (Charlois, 25 août).				
Sept. 4.	13. 6.56	—0.37,27	+ 3.56,7	6.6	22.28.15,33	$\bar{1}$,246	83.53. 9,3	0,730 *n*	33
					(11) Parthénope.				
Sept. 25.	13.29.33	+0.49,99	+ 3.23,1	5.5	1.12.44,48	$\bar{2}$,843	90.17.29,5	0,783 *n*	34
29.	13.44.30	—0.13,41	— 0.22,3	5.5	1. 9.26,24	$\bar{1}$,119	90.44.47,5	0,787 *n*	35
Oct. 7.	12.25.57	+0.54,19	+ 7.46,2	5.5	1. 2.30,32	$\bar{2}$,764	91.36.38,4	0,794 *n*	36
11.	11.14.23	+0.47,11	— 2.24,3	5.5	0.59. 1,49	$\bar{2}$,625 *n*	92. 0. 0,7	0,797 *n*	37
18.	10.51.46	—0.49,58	— 2.54,8	5.5	0.53. 8,29	$\bar{2}$,303 *n*	92.35.44,6	0,801 *n*	38
20.	9.40.12	—2.22,08	+ 5.34,3	5.5	0.51.35,80	$\bar{1}$,130 *n*	92.44.13,9	0,801 *n*	39
24.	11.37. 0	+6. 7,70	+ 7. 4,5	5.5	0.48.33,76	$\bar{1}$,067	92.59.37,7	0,803 *n*	40
25.	10. 0.26	+5.29,05	+10. 6,3	5.5	0.47.55,11	$\bar{2}$,741 *n*	93. 2.39,5	0,804 *n*	41
26.	10. 3.13	+4.48,24	+13. 9,4	5.5	0.47.14,30	$\bar{2}$,616 *n*	93. 5.42,7	0,805 *n*	42
27.	9. 8.28	+4.10,62	+15.53,0	5.5	0.46.36,68	$\bar{1}$,126 *n*	93. 8.26,3	0,804 *n*	43
28.	9.56.59	+3.31,08	+18.33,5	5.5	0.45.57,14	$\bar{2}$,552 *n*	93.11. 6,9	0,805 *n*	44
29.	9.54. 2	+2.54,74	+20.49,4	5.5	0.45.20,80	$\bar{2}$,539 *n*	93.13.22,8	0,806 *n*	45
30.	9.32. 2	+2.20,17	+23. 3,8	5.5	0.44.46,23	$\bar{2}$,852 *n*	93.15.37,3	0,806 *n*	46

Digitized by Google

Dates.	T. m. Marseille.	ΔR.	ΔP.	N. de c.	R app.	log. f. p.	P app.	log. f. p.	★
					(115) Thyra.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Oct. 7.	13.26.35	—2. 4,44	+17.14,6	5.5	0.20. 2,29	$\bar{1}$,420	64.34. 5,3	0,498 *n*	47
11.	10.34.26	+2.39,42	— 3.52,0	5.5	0.16. 5,21	$\bar{2}$,586 *n*	64.44.50,8	0,434 *n*	48
18.	9.36.26	—0.19,28	+ 4.34,5	7.7	0. 9.40,82	$\bar{2}$,944 *n*	65.14.45,8	0,452 *n*	49
19.	7. 4. 4	—1. 3,24	+ 9.10,9	5.5	0. 8.56,85	$\bar{1}$,544 *n*	65.19.22,1	0,565 *n*	50
20.	8.29.35	+3.14,74	+ 3. 6,0	5.5	0. 8. 6,50	$\bar{1}$,302 *n*	65.25.12,4	0,486 *n*	51
21.	9.30.17	+2.26,74	+ 8.52,8	5.5	0. 7.18,50	$\bar{2}$,854 *n*	65.30.59,1	0,455 *n*	52
23.	11.26.28	+2.31,04	+ 4. 2,5	5.5	0. 5.48,79	$\bar{1}$,262	65.42.51,7	0,485 *n*	53
24.	8. 8.45	+1.56,91	+ 9.13,6	5.5	0. 5.14,65	$\bar{1}$,310 *n*	65.48. 2,4	0,495 *n*	54
25.	8. 5.45	—2.42,06	— 1.22,8	5.5	0. 4.36,04	$\bar{1}$,303 *n*	65.54. 6,8	0,496 *n*	55
26.	8.54.55	—3.19,22	+ 5. 3,8	5.5	0. 3.58,88	$\bar{2}$,983 *n*	66. 0.33,4	0,470 *n*	56
27.	7.45.19	+1. 8,92	— 7.53,6	5.5	0. 3.26,22	$\bar{1}$,346 *n*	66. 6.40,1	0,508 *n*	57
28.	9. 2.28	+0.35,66	— 1.10,2	5.5	0. 2.52,95	$\bar{2}$,796 *n*	66.13.23,4	0,470 *n*	58
29.	10.25. 0	+0. 4,93	+ 5.39,5	5.5	0. 2.22,22	$\bar{1}$,060	66.20.13,0	0,480 *n*	59
30.	8.22.49	—0.19,41	+11.37,7	6.6	0. 1.57,87	$\bar{1}$,095 *n*	66.26.11,1	0,484 *n*	60
					(43) Ariane.				
Oct. 11.	12.42.45	+1.18,87	— 1.19,3	6.6	1. 7.42,54	$\bar{1}$,047	76.38.25,8	0,647 *n*	61
18.	11.44.27	—0.26,96	— 4.39,2	5.5	1. 0.46,00	$\bar{2}$,819	77.30.37,5	0,655 *n*	62
20.	10.20.14	—2.16,92	+10. 0,3	5.5	0.58.56,05	$\bar{2}$,885 *n*	77.45.16,9	0,658 *n*	63
23.	13.55.38	+0.23,03	+ 0.31,5	6.6	0.56. 5,47	$\bar{1}$,511	78. 8.57,3	0,700 *n*	64
24.	11. 1.59	—0.22,36	+ 7. 2,8	6.6	0.55.20,08	$\bar{2}$,604	78.15.28,7	0,663 *n*	65
25.	10.30.45	+1.56,30	— 7.45,7	5.5	0.54.30,56	$\bar{2}$,029 *n*	78.22.39,5	0,664 *n*	66
26.	11.14. 9	+1. 5,85	— 0.14,5	5.5	0.53.40,11	$\bar{2}$,910	78.30.10,7	0,668 *n*	67
27.	10. 5. 5	+0.20,35	+ 6.38,3	5.5	0.52.54,61	$\bar{2}$,620 *n*	78.37. 3,4	0,668 *n*	68
28.	11. 4.36	—0.28,04	+14. 4,7	5.5	0.52. 6,22	$\bar{2}$,910	78.44.29,8	0,671 *n*	69
29.	10.56.44	—3.32,54	+14.49,6	5.5	0.51.21,16	$\bar{2}$,875	78.51.33,6	0,672 *n*	70
					(77) Frigga.				
Oct. 18.	12.34.26	+0.57,97	+10.36,7	5.5	1.27.48,62	$\bar{1}$,037	79. 0. 8,2	0,675 *n*	71
20.	11.13.28	+4.23,60	— 1.24,0	5.5	1.26. 3,07	$\bar{1}$,427 *n*	79. 8. 1,4	0,674 *n*	72
23.	14.52.19	—1.41,34	— 4.59,6	6.6	1.23.15,52	$\bar{1}$,555	79.20.57,5	0,720 *n*	73
24.	12. 4. 0	—2.27,44	— 1.26,4	6.6	1.22.29,42	$\bar{1}$,025	79.24.30,6	0,680 *n*	74
25.	11.17.11	+1.37,61	— 5.22,2	5.5	1.21.39,35	$\bar{2}$,420	79.28.16,1	0,678 *n*	75
26.	11.49.43	+0.45,46	— 1.16,7	5.5	1.20.47,20	$\bar{2}$,987	79.32.31,6	0,681 *n*	76
27.	10.36.35	—0. 2,37	+ 2.27,1	7.7	1.19.59,37	$\bar{2}$,519 *n*	79.36.15,4	0,679 *n*	77
28.	11.38.25	—0.54,32	+ 6.28,8	5.5	1.19. 7,43	$\bar{2}$,972	79.40.17,1	0,682 *n*	78
29.	12. 8.26	—1.43,96	+10.31,3	6.6	1.18.17,79	$\bar{1}$,197	79.44.19,6	0,687 *n*	79
30.	10. 3.51	—0.27,43	— 5. 8,6	5.5	1.17.33,81	$\bar{2}$,833 *n*	79.47.51,0	0,683 *n*	80

Digitized by Google

Dates.	T. m. de Marseille	ΔA.	ΔP.	N. déc.	A app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
					(20) Massalia.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Oct. 7.	11.54.43	+1.53,74	+ 0.12,7	5.5	1.22.23,40	$\bar{2}$,583 *n*	81. 9.18,6	0,697 *n*	81
11.	11.56. 5	—1.24,01	— 1.26,7	6.6	1.18.42,17	$\bar{7}$,000	81.32.49,4	0,701 *n*	82
18.	10.12.50	—1.57,42	+ 6.27,7	5.5	1.12.12,74	$\bar{1}$,108 *n*	82.14.49,3	0,712 *n*	83
19.	7.54.53	—2.47,25	+11.54,0	5.5	1.11.22,92	$\bar{1}$,525 *n*	82.20.15,5	0,735 *n*	84
20.	9. 6.58	—1.23,25	—10.47,3	5.5	1.10.23,83	$\bar{1}$,353 *n*	82.26.31,7	0,721 *n*	85
23.	12. 7.30	—0.51,24	—12.37,3	5.5	1. 7.34,16	$\bar{1}$,118	82.45. 1,5	0,717 *n*	86
24.	8.42.24	—1.36,19	— 7.36,3	5.5	1. 6.49,22	$\bar{1}$,369 *n*	82.50. 2,5	0,725 *n*	87
25.	9.33.29	—2.30,37	— 1.40,4	5.5	1. 5.55,04	$\bar{1}$,140 *n*	82.55.58,4	0,719 *n*	88
26.	10.34.56	—3.23,79	+ 4.13,7	5.5	1. 5. 1,62	$\bar{2}$,174 *n*	83. 1.52,6	0,717 *n*	89
27.	9.38. 7	—1. 1,54	+ 5.35,7	5.5	1. 4.13,53	$\bar{1}$,051 *n*	83. 7.16,4	0,720 *n*	90
28.	10.28.40	—1.52,68	+11.16,7	5.5	1. 3,22,40	$\bar{3}$,946 *n*	83.12.57,4	0,719 *n*	91
29.	11.36.25	—2.43,01	+16.54,2	6.6	1. 2.32,07	$\bar{1}$,102	83.18.34,9	0,723 *n*	92
					Perrine.				
Oct. 21.	7.56.30	—2.34,50	+ 4.57,7	3.3	2.59. 8,97	0,171 *n*	16.16.20,6	$\bar{1}$,014 *n*	93
24.	7.28.56	+1.41,05	+ 1.46,7	5.5	2.12.19,65	0,272 *n*	12.14.40,9	0,057	94
26.	7.24. 8	+6.51,91	— 9.16,6	3.3	1.21.58,00	0,299 *n*	10. 4.35,5	0,426	95
27.	12.33.59	—3.20,41	+17.29,1	3.3	0.41.22,77	0,190 *n*	9. 6. 2,0	0,631	96
28.	8. 8.44	—3.55,06	— 6.25,9	4.4	0.10. 5,08	0,047 *n*	8.38.58,5	0,696	97
30.	10.46.39	—4.25,06	+ 3.46,4	4.4	22.41.26,57	0,287	8.20.24,8	0,598	98

La comète a l'aspect d'une nébulosité à peu près elliptique, sans noyau ni condensation appréciables. Traces de queue à peine sensibles.

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	A moy. 1897,0.	Réd. au j.	P moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	7,8	20.20.39,75	+4,49	107.42.49,6	—10,6	5489 Radcliffe.
2.	8,9	20. 7.46,37	+4,52	108.43. 0,5	— 9,2	15986 Arg. Zones Sud.
3.	8,9	»	+4,51	»	— 9,2	Id.
4.	4,5	20.39.59,74	+4,75	115.38.28,7	—12,3	5585 Radcliffe.
5.	7	22. 3.14,16	+4,46	103.48.15,5	—20,9	5952 Radcliffe.
6.	7	»	+4,47	»	—20,9	Id.
7.	4,4	22. 0.52,36	+4,50	104.22. 9,3	—20,7	ι Verseau (*C. d. T.*).
8.	4,4	»	+4,50	»	—20,7	Id.
9.	10	21.58.47,75	+4,51	104.33.40,1	—20,5	30144 Munich$_1$.
10.	8,9	21.42.58,15	+4,46	105.44.30,2	—18,4	973 W$_1$ h. XXI.
11.	8,9	»	+4,45	»	—18,3	Id.
12.	9	22.21.59,07	+4,30	96.33.12,4	—22,4	417 W$_1$ h. XXII.
13.	9	22.28. 0,37	+4,31	96.50.57,5	—22,5	31163 Munich$_2$.

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1897,0.	Réd. au j.	℘ moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
14.	9	22.24.38,32	+4,35	97.55.38,0	—22,8	31057 Munich$_2$.
15.	8	22.25. 7,89	+4,37	98.38.32,9	—23,0	6039 Radcliffe.
16.	9	22.22.28,60	+4,40	99.17.45,0	—22,8	427 W$_1$ h. XXII.
17.	9	22.18.12,16	+4,47	104.48. 3,9	—21,5	313 W$_1$ h. XXII.
18.	9	»	+4,49	»	—21,5	Id.
19.	8,9	0.58.37,94	+3,89	102.13.26,4	—29,7	991 W$_1$ h. o.
20.	8,9	»	+3,91	»	—29,8	Id.
21.	8	0.53.15,36	+4,00	102.36.26,2	—29,9	869 W$_1$ h. o.
22.	9	0.50.57,32	+4,10	103. 4. 8,4	—30,0	850 W$_1$ h. o.
23.	8,9	0.34.52,98	+4,45	104.27. 1,9	—29,3	128 Radcliffe.
24.	10	0.10.50,36	+4,52	104.37.32,0	—26,1	117 Munich$_1$.
25.	10	»	+4,52	»	—26,0	Id.
26.	7	0. 6.47,83	+4,51	104.23. 7,8	—25,8	24 Radcliffe.
27.	7	»	+4,50	»	—25,7	Id.
28.	7	»	+4,50	»	—25,6	Id.
29.	7	»	+4,49	»	—25,5	Id.
30.	7	»	+4,49	»	—25,4	Id.
31.	9	0. 7.21,43	+4,48	104.11. 0,8	—25,4	82 Munich$_1$.
32.	9	22.10.47,19	+4,04	81. 2.12,2	—23,2	169 W$_1$ h. XXII.
33.	10	22.28.48,44	+4,16	83.49.36,2	—23,6	31189 Munich$_1$.
34.	8	1.11.50,16	+4,33	90.14.35,6	—29,2	196 Lamont.
35.	10	1. 9.35,27	+4,38	90.45.39,1	—29,3	193 Lamont.
36.	9	1. 1.31,68	+4,45	91.29.21,5	—29,3	1438 Paris.
37.	9	0.58. 9,87	+4,51	92. 2.54,3	—29,3	981 W$_1$ h. o.
38.	9	0.53.53,37	+4,50	92.39. 8,5	—29,1	897 W$_1$ h. o.
39.	9	»	+4,51	»	—28,9	Id.
40.	9	0.42.21,57	+4,49	92.53. 1,9	—28,7	434 Munich$_1$.
41.	9	0.42.21,57	+4,49	92.53. 1,9	—28,7	434 Munich$_1$.
42.	9	»	+4,49	»	—28,6	Id.
43.	9	»	+4,49	»	—28,6	Id.
44.	9	»	+4,49	»	—28,5	Id.
45.	9	»	+4,49	»	—28,5	Id.
46.	9	»	+4,49	»	—28,4	Id.
47.	7,5	0.22. 2,27	+4,46	64.17.20,5	—29,8	506 Paris.
48.	9	0.13.21,33	+4,46	64.49.13,4	—30,6	300 W$_2$ h. o.
49.	8,9	0. 9.55,69	+4,41	65.10.42,9	—31,6	194 Paris.
50.	8,9	»	+4,40	»	—31,7	Id.
51.	8,9	0. 4.47,39	+4,37	65.22.38,3	—31,9	29 W$_2$ h. o.
52.	8,9	»	+4,37	»	—32,0	Id.
53.	9	0. 3.13,39	+4,36	65.39.21,2	—32,0	1375 W$_2$ h. XXIII.
54.	9	»	+4,35	»	—32,4	Id.
55.	8,9	0. 7.13,73	+4,37	65.56. 2,1	—32,5	124 W$_2$ h. o.
56.	8,9	»	+4,37	»	—32,5	Id.
57.	9	0. 2.12,97	+4,33	66.15. 6,4	—32,7	$\frac{1}{2}$(1329 + 1331) W$_2$ h. XXIII.

Digitized by Google

*	Gr.	Æ moy. 1897,0.	Réd. au j.	ℙ moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
58.	9	0. 2.12,97	+ 4,32	66.15. 6,4	—32,8	½(1329 + 1331) W_2 h. XXIII.
59.	9	»	+ 4,32	»	—32,9	Id.
60.	9	»	+ 4,31	»	—33,0	Id.
61.	9	1. 6.19,14	+ 4,53	76.40.14,6	—29,5	45 W_1 h. I.
62.	6,7	1. 1. 8,41	+ 4,55	77.35.46,7	—30,0	1423 Paris.
63.	6,7	»	+ 4,56	»	—30,1	Id.
64.	9	0.55.37,89	+ 4,55	78. 8.56,2	—30,4	930 W_1 h. o.
65.	9	»	+ 4,55	»	—30,3	Id.
66.	8,9	0.52.29,72	+ 4,54	78.30.55,6	—30,4	874 W_1 h. o.
67.	8,9	»	+ 4,54	»	—30,4	Id.
68.	8,9	»	+ 4,54	»	—30,5	Id.
69.	8,9	»	+ 4,54	»	—30,5	Id.
70.	8	0.54.49,15	+ 4,55	78.37.14,5	—30,5	915 W_1 h. o.
71.	9	1.26.46,05	+ 4,60	78.50. 0,8	—29,3	414 W_1 h. I.
72.	8,9	1.21.34,87	+ 4,60	79. 9.54,9	—29,5	321 W_1 h. I.
73.	9	1.24.52.24	+ 4,62	79.26.26,7	—29,6	382 W_1 h. I.
74.	9	»	+ 4,62	»	—29,7	Id.
75.	9	1.19.57,12	+ 4,62	79.34.18,1	—29,8	287 W_1 h. I.
76.	9	»	+ 4,62	»	—29,8	Id.
77.	9	»	+ 4,62	»	—29,8	Id.
78.	9	»	+ 4,63	»	—29,8	Id.
79.	9	»	+ 4,63	»	—29,8	Id.
80.	8,4	1.17.56,61	+ 4,63	79.53.29,5	—29,9	637 $Rumker_2$.
81.	9	1.20.25,17	+ 4,49	81. 9.34,9	—29,0	296 W_1 h. I.
82.	9	1.20. 1,66	+ 4,52	81.34.45,3	—29,1	290 W_1 h. I.
83.	8	1.14. 5,61	+ 4,55	82. 8.51,1	—29,5	175 W_1 h. I.
84.	8	»	+ 4,56	»	—29,6	Id.
85.	8,7	1.11.42,52	+ 4,56	82.37.48,6	—29,6	574 $Rumker_2$.
86.	5	1. 8.20,84	+ 4,56	82.58. 8,6	—29,8	284 Radcliffe.
87.	5	»	+ 4,57	»	—29,8	Id.
88.	5	»	+ 4,57	»	—29,8	Id.
89.	5	»	+ 4,57	»	—29,7	Id.
90.	9	1. 5.10,51	+ 4,56	83. 2.10,5	—29,8	23 W_1 h. I.
91.	9	»	+ 4,57	»	—29,8	Id.
92.	9	»	+ 4,57	»	—29,8	Id.
93.	9	3. 1.33,06	+10,41	16.11.39,1	—16,2	3426 Arg. Œltz.
94.	7,8	2.10.26,96	+11,64	12.13.17,1	—22,9	469 Groombridge.
95.	9	1.14.55,04	+11,05	10.14.21,2	—29,1	1373 Arg. Œltz.
96.	9,7	0.44.32,32	+10,86	8.49. 4,7	—31,8	105 Carrington.
97.	9,7	0.13.51,42	+ 8,72	8.45.58,4	—34,0	24 Carrington.
98.	10	22.45.48,96	+ 2,67	8.17.15,0	—36,6	3495 Carrington.

On a augmenté de 1^m l'Æ de l'étoile de comparaison n° 21 d'après le B. D. zone — 12° n° 170.

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

MONTHLY NOTICES, t. LVII.

Mc Lean (*F.*). — Spectres photographiques de β Lyre ainsi que d'étoiles des types III et IV.

La Note est accompagnée de la reproduction des spectres. A la séance du 9 janvier et à celle du 12 mars, le P. Sidgreaves, M. Maunder et M. Newall ont parlé aussi de β Lyre.

Stone (*E.-J.*). — Effets de la distance sur les spectres des amas d'étoiles.

Barnard (*E.-E.*). — Comparaison du réflecteur et de l'objectif à portraits.

M. Barnard revient sur la comparaison de ses photographies obtenues avec un objectif de Willard, de 6 pouces, et de celles obtenues par le Dr Isaac Roberts avec son réflecteur de 20 pouces. Tout dépend de la nature de l'objet photographié. Pour une représentation d'ensemble des régions étendues : nébulosités, queues cométaires, etc., l'objectif à portrait est à préférer.

L'éclipse totale du 9 août 1896.

A une Note des Secrétaires résumant les observations de MM. E.-J. Stone et W. Shackleton, à la Nouvelle-Zemble, sont jointes quelques remarques de M. W.-H. Wesley sur les apparences de la Couronne en 1885, 1886 et 1896 ; il y aurait beaucoup de ressemblance entre celles des deux dernières époques.

Downing (*A.-M.-W.*). — Comparaison des longitudes du Soleil déduites des Tables de Le Verrier et Newcomb.

Comparaison faite pour 1901. Pour la longitude la différence Newcomb-Le Verrier atteint 1".

Dreyer (*J.-L.-E.*). — Sur les erreurs systématiques dans l'observation des ascensions droites des nébuleuses.

Digitized by Google

Note importante dans laquelle l'auteur, après avoir constaté les erreurs systématiques résultant de la comparaison même des observations, indique un moyen de les évaluer par la mesure avec le micromètre des différences nébuleuse-étoile conclues d'autre part des passages. Il semble que la différence des résultats, micromètre-passage, a une tendance au signe positif, surtout pour les nébuleuses diffuses.

M. Dreyer rapproche cette étude du travail du Dr Mönnichmeyer (n° 1 des *Publications de l'Observatoire de Bonn*), sur la réduction des observations de nébuleuses à un système homogène.

En conclusion, M. Dreyer n'hésite pas à recommander la mesure directe avec la vis de la différence d'ascension droite, en prenant comme étoile de comparaison celle qui se trouve au voisinage, qu'elle soit ou non cataloguée. C'est le parti qu'a pris depuis longtemps M. Bigourdan.

Rambaut (*A.-A.*). — Sur l'inégalité causée par la réfraction dans le mouvement diurne apparent et sur une manière d'en tenir compte dans la photographie céleste.

Il est de règle de ne pas s'éloigner par trop du méridien pendant la durée de pose d'une plaque; mais s'il s'agit des recherches relatives aux parallaxes, M. Rambaut dit qu'on peut être obligé de s'éloigner beaucoup du méridien. Alors il devient nécessaire de tenir compte de la petite modification du mouvement diurne apparent en altérant par exemple de temps en temps la vitesse du mouvement d'horlogerie. Une Table étendue donne les valeurs de la correction dont il s'agit.

Rappelons que M. Gruey a publié (*Bull.*, t. V) une étude *Sur les effets de la réfraction dans le mouvement diurne.*

Notes et observations sur les Léonides des 13-14 novembre 1896.

A Dublin (p. 62) observations assez nombreuses. Un essai pour photographier les météores n'a rien donné.

Observations faites à Madère et à Calcutta (p. 68, 69); à Oxford (p. 73).

Éphémérides des Léonides avec remarques du Dr G.-J. Stoney (p. 70) [l'auteur engage les astronomes à essayer de photographier l'essaim; cependant le Dr Roberts n'a rien pu obtenir (p. 430)].

Importante série obtenue, le 14 novembre à Penarth, Glamorgan, par MM. Thompson et Tanner (p. 158).

Backhouse (*T.-W.*). — L'aurore boréale du 4 mars 1896.

Note à rapprocher de plusieurs articles des *Monthly Notices* (mars 1896).

Digitized by Google

Christie (*W.-H.-M.*), *Hills* (Cap. *E.-H.*), *Turner* (*H.-H.*), *Common* (*A.-A.*), *Lockyer* (*J.-N.*). — Rapport sur les expéditions envoyées pour observer l'éclipse totale de Soleil du 9 août 1896 (Japon, Vadsö, île de Kiö).

On sait que dans les trois stations le temps a été défavorable. Mais la description des préparatifs pourra être consultée pour l'avenir; le cœlostat paraît appelé à rendre de bons services.

Campbell (*A.-Y.-G.*), *Ball* (*Sir R.-S.*). — Sur la variation des arbitraires non canoniques; application à la théorie des planètes.

M. Campbell et après lui sir R.-S. Ball montrent comment on peut obtenir les dérivées des arbitraires. La connaissance des crochets de Lagrange n'est pas indispensable, et il suffit de calculer pour chaque arbitraire une certaine fonction que M. Campbell apprend à former.

On remarque encore une méthode d'approximations successives pour tenir compte de différentes portions de la fonction perturbatrice et d'autres résultats rappelant ceux dus à Jacobi.

Turner (*H.-H.*). — Sur la réfraction différentielle quand on tient compte des termes de degré supérieur (p. 133-140).

Dans le cas des grandes distances zénithales et s'il s'agit de plaques couvrant un grand champ, les expressions limitées aux termes du premier degré, publiées naguère dans les *M. N.*, ne suffisent pas. M. Turner juge donc utile de reprendre, en conservant toujours les coordonnées rectangulaires, la démonstration des résultats obtenus par MM. Rambaut, Kapteyn, ...

Cortie (Rev. *A.-L.*). — Coordonnées héliographiques des taches du Soleil et des facules, d'après les dessins de Stonyhurst.

L'Auteur montre comment l'observation si simple par projection donne des résultats tout à fait comparables sous le rapport de l'exactitude à ceux publiés par l'observatoire de Greenwich, au prix d'un travail bien plus considérable.

A la séance du 9 janvier, M. Turner a signalé ce travail à l'attention de la Société.

Lowell (*P.*). — Dessins de Mercure.

Digitized by Google

Lowell (*P.*). — Caractère de la surface de Vénus; rotation de la planète (p. 148 et 402).

Les dessins, qui accompagnent les Notes de M. Lowell, montrent les singulières apparences qui ont tant surpris les astronomes. Les mesures micrométriques d'un certain détail de la surface, d'où résulterait une nouvelle preuve de la rotation lente de la planète, forment la seconde Note.

Schur (*W.*). — Détermination du diamètre et de l'aplatissement de Mars, d'après les observations héliométriques faites à Göttingen.

Aplatissement $\frac{1}{47}$. Diamètres à la distance moyenne : 6″,256 et 6″,120. Les mesures ont été faites en intercalant un prisme à réversion entre l'oculaire et l'œil.

Sells (*P.*). — Remarques sur les observations physiques de Jupiter, faites à l'observatoire Adélaïde, de 1884 à 1893.

Les observations dont il s'agit ont donné lieu à une belle série de 217 dessins, remarquables par la finesse des détails; on peut en juger par une reproduction contenue dans les *Monthly Notices*.

Innes (*R.-T.-A.*). — Sur la grandeur de η Argo en 1896.

Penrose (*F.-C.*). — Réduction d'une distance lunaire.

Denning (*W.-F.*). — Catalogue de trajectoires de 107 météores observés de 1886 à 1896 (p. 161-170).

Niessl (*G. von*). — Catalogue des trajectoires de brillants météores (p. 170-180).

Les deux Catalogues sont disposés suivant les mois et les jours, abstraction faite de l'année. Celui de M. de Niessl renferme seulement des météores brillants, tandis que celui de M. Denning comprend aussi bien les bolides que les étoiles filantes qui ont été observés en plusieurs stations. Une partie des résultats a déjà été publiée dans divers Recueils.

La disposition adoptée met en évidence la liaison possible des météores; M. Denning indique, par exemple, la liaison d'un essaim avec des bolides

Digitized by Google

dans la première quinzaine de septembre, d'autres bolides rappelant les radiants stationnaires.....

Il est désirable qu'un Catalogue général, comprenant en particulier les matériaux accumulés dans les *Reports of the luminous meteors Committee* de l'Association britannique, ne tarde pas à être publié.

Denning (*W.-F.*). — Radiants de bolides dans le zodiaque (p. 610).

M. Denning avait déjà annoncé (*Monthly Notices*, t. LIV, p. 342 et 539) que les bolides brillants ont en général un mouvement lent et deviennent radiants situés dans l'hémisphère céleste occidental et dans le voisinage de l'horizon. En fait, ces bolides paraissent constituer une classe spéciale de corps et se distinguer nettement des autres météores généralement animés d'une vitesse rapide avec des radiants situés vers l'est et de grande altitude.

M. Denning précisant davantage, dit que les radiants des bolides sont distribués dans l'ensemble le long de l'écliptique; ils se déplaceraient dans des orbites directes et de faible inclinaison, comme il arrive pour les comètes de la famille de Jupiter.

Brown (*E.-W.*). — Sur les moyens mouvements du périgée et du nœud. Sur la valeur théorique de l'accélération séculaire (p. 332, 342 et 566).

L'Auteur est occupé, depuis plusieurs années déjà, avec le calcul des inégalités de la Lune causées par le Soleil, et il vient d'obtenir les termes dépendant des secondes puissances des excentricités et des inclinaisons; ce qui lui permet de comparer entre eux et avec la théorie les nombres de Hansen et de Delaunay. Voici les sommaires des différents paragraphes :

Véri cation des expressions de Delaunay $\left(\text{au moyen de la partie constante de } \frac{1}{r}\right)$.

Mouvement annuel du périgée (la théorie donne $+146435'',3 \pm 1'',8$; l'observation $35'',6$, alors que Hansen trouve $34'',0$).

Mouvement annuel du nœud (la théorie donne $-69679'',5 \pm 1'',1$, l'observation $79'',5$, alors que Hansen trouve $76'',8$).

Les nombres de Hansen seraient un peu modifiés si l'on prenait les valeurs trouvées par Hill pour les inégalités causées par la figure de la Terre : $34'',9$ et $77'',3$.

M. Brown a profité des recherches dont il vient d'être parlé pour

Digitized by Google

calculer avec plus de précision les accélérations séculaires du moyen mouvement, du périgée et du nœud. Il trouve :

Moyen mouvement.....	+ 5",91	±0",02
Périgée.....	—38,9	±0,1
Nœud.....	+ 6,56	±0,02

M. Brown dit que cette recherche, considérée naguère comme très longue et difficile, a été beaucoup simplifiée grâce au Mémoire de M. Newcomb (t. V des *Papers* de l'*American Ephemeris*).

A la séance du 11 juin, M. Dyson a parlé de la haute valeur des travaux de M. E. Brown.

Turner (*H.-H.*). — Sur un cercle méridien photographique.

Le principe est celui-ci : combiner la disposition (déjà proposée par l'Auteur et plusieurs astronomes) d'un miroir mobile autour d'une horizontale perpendiculaire au méridien, renvoyant les images des étoiles dans une lunette fixe horizontale, avec une plaque photographique mobile, dont le mouvement pourra être déterminé mécaniquement.

On trouvera, dans l'article de M. Turner, l'examen des difficultés de détail ainsi que des remarques sur l'application du déplacement de la plaque photographique à la lunette zénithale, à la détermination des longitudes.....

Hall (*M.*). — Le système sidéral en 1896 (p. 357-378).

Déjà en 1887 (*Bull.*, IV, p. 531), l'Auteur a publié des Tableaux représentant le système sidéral considéré comme un système mécanique. Les nouvelles déterminations obtenues pour les mouvements propres, les parallaxes et les vitesses radiales lui ont permis de reprendre ses calculs. Somme toute, les documents recueillis sont loin de contredire la théorie, bien que la parallaxe du Soleil relativement au centre d'attraction et sa vitesse sur l'orbite soient largement modifiées.

L'article de M. Maxwell Hall contient sous forme de Tableaux beaucoup de renseignements sur l'Astronomie sidérale.

Young (Mrs *W.-H.*). — Discussion de l'équation que l'on rencontre dans le calcul des orbites d'après trois observations (p. 379-387).

Il s'agit de l'équation $\sin^4 z = c \sin(z - q)$. Mme Young a voulu com-

Digitized by Google

pléter la discussion faite par Oppolzer. De nombreuses indications bibliographiques sont données.

Adams (*J.-C.*). — Sur l'orbite des météores de novembre.

Reproduction de l'article publié autrefois par l'illustre Auteur.

Burnham (*S.-W.*). — Orbites de 44 Bouvier, de δ Cygne et de Sirius.

Notices très complètes sur ces trois étoiles doubles. M. Burnham signale des anomalies inexplicables dans le mouvement de 44 Bouvier.

See (*T.-J.-J.*). — Sur un nouveau couple à courte période dans la constellation de la Dorade.

Période de 44 ans environ.

Stone (*E.-J.*). — Estimations de la grandeur de la *Nova* du Cocher à l'observatoire Radcliffe, Oxford.

Mellor (*T.-K.*). — Le noyau d'une tache solaire, le 7 février 1897.

Downing (*A.-M.-W.*). — Remarques sur une nouvelle réduction des observations de Taylor à Madras.

En cherchant si l'on pouvait tirer de ces observations, faites conjointement avec des déterminations du nadir, des résultats indépendants, ou si l'on devait se borner à considérer des différences par rapport à un système de fondamentales, M. Downing a constaté l'existence d'un écart moyen de plus de 1″ suivant que l'on prend un parti ou l'autre; il a dû en conséquence adopter le dernier parti.

Downing (*A.-M.-W.*). — Renseignements météorologiques sur les stations propices à l'observation de l'éclipse totale de Soleil en janvier 1898.

Observations faites à Vadsö pendant l'éclipse totale de Soleil du 9 août 1896.

Knobel (*E.-B.*). — Sur quelques dessins inédits de la comète de 1652.

Digitized by Google

M. Knobel a découvert dans un ancien Ouvrage des observations inédites de la comète consistant en alignements par rapport aux étoiles. Il donne avec les observations, au nombre de 11, les positions conclues, ainsi que leur comparaison avec les observations contemporaines d'Hévélius.

Turner (*H.-H.*). — Sur la courbure des fils d'araignée.

Cette courbure ne paraît pas avoir d'effet dans les observations de Greenwich. M. Turner propose divers moyens de faire le calcul de la correction.

Marth (*A.*). — Sur le disque apparent et sur l'ombre d'un ellipsoïde (p. 442-449).

L'Auteur développe des formules qui paraissent utilisables même si le corps éclairant est lui-même un ellipsoïde. Les cas de la Terre, de Jupiter et Saturne sont traités en particulier.

Innes (*R.-T.-A.*). — Sur un système quadruple.

Deux couples x Toucan et 353 Lacaille sont à une distance d'environ 5'; et comme les deux étoiles principales possèdent le même mouvement propre, il y a tout lieu de croire qu'elles sont liées physiquement. On a donc là un système très intéressant.

Stone (*E.-J.*). — Sur la détermination de la correction de l'époque d'un Catalogue d'étoiles horaires fondamentales, en tenant compte des équations personnelles; application à la détermination des erreurs tabulaires du Soleil et de la Lune (p. 458-472).

Comme le dit l'Auteur dans cette Note importante, peu de questions sont plus délicates à considérer en Astronomie pratique que la correction de l'époque d'un Catalogue et la détermination des erreurs des Tables du Soleil en longitude.

Le plan adopté à Greenwich a été de confier les observations du Soleil à des observateurs assez nombreux, de sorte que, grâce à un roulement convenable, l'effet des équations personnelles devînt négligeable dans la moyenne des résultats. Mais en pratique la distribution du travail ne peut se faire comme on le voudrait.

M. Stone montre qu'il y a avantage à séparer les observations répar-

Digitized by Google

ties à Oxford entre trois observateurs. Si les valeurs annuelles des corrections conclues de 1884 à 1891 sont un peu discordantes à cause du faible nombre des observations, les résultats moyens pour plusieurs années doivent inspirer confiance. Il devient ensuite possible d'obtenir les erreurs des Tables du Soleil et de la Lune d'une manière à peu près indépendante des équations personnelles.

Hinks (*A.-R.*). — Équation personnelle dépendant de la grandeur des étoiles et affectant les ascensions droites du Catalogue de Cambridge; sa détermination au moyen des plaques du Catalogue photographique (p. 475-485).

Le Catalogue de la zone assignée à Cambridge comprend 671 étoiles du Catalogue dû au Dr Becker. La comparaison ayant montré pour les ascensions droites, dans le sens Cambridge-Berlin, une différence de 0s,07 en moyenne, M. A.-R. Hincks chercha si elle ne provenait pas des grandeurs des étoiles; ce qui fut vérifié. Le résultat a été confirmé par l'examen des plaques photographiques prises à Oxford pour le Catalogue.

Après échange d'observations, à la séance du 9 avril, entre MM. Downing, Turner, Newall et Stone, l'astronome royal présente le résultat des premiers essais de MM. Dyson et Cowell avec le nouvel équatorial photographique Thompson, ainsi que des photographies d'étoiles doubles prises par M. Lewis avec le réfracteur de 28 pouces, en écartant les deux verres. Les plaques sont au collodion sec. M. Common a vu les images et les a trouvées excellentes.

Roberts (*A.-W.*). — Influence de la position sur l'estimation des grandeurs, avec graphiques (p. 485-492).

M. Roberts paraît avoir grandement élucidé cette intéressante question qui lui avait été signalée par le Dr Gould, comme réclamant une étude particulière. Il a trouvé que la différence, qui peut atteindre une grandeur, augmente en général avec la distance au centre du champ. L'ensemble de ses observations montre une dépendance avec l'angle de position représentée par la formule $R \cos(\theta - 32^\circ)$.

Il y a là sans doute le résultat d'un effet physiologique, digne de fixer l'attention des observateurs d'étoiles variables. A la séance du 9 avril, Sir R.-S. Ball et le capitaine Noble ont rapproché la constatation de M. Roberts des apparences offertes par la Lune et le Soleil au zénith et à l'horizon.

Digitized by Google

Roberts (*A.-W.*). — Mouvements propres de L Carène et de K Paon.

Lindemann (*A.-F.*). — Nouveau système de remontage du mouvement d'horlogerie d'un équatorial.

Safford (*T.-H.*). — Sur les différentes espèces d'équation personnelle dans les passages méridiens des étoiles (p. 504-514).

Notice fort intéressante dont l'Auteur donne le résumé qui suit : on voit donc que la théorie générale de Bessel sur l'équation personnelle est confirmée et que la même chose peut se dire de l'explication de Wundt relative à la méthode de *l'œil et de l'oreille,* dont la précision n'a pas été trouvée inférieure à celle des autres méthodes..... Les astronomes devraient étudier la question dans les détails. La comparaison des observations de passages des étoiles comprises dans certains amas (les Pléiades, Præsepe, la Chevelure de Bérénice) avec les mesures micrométriques renseignera sur l'influence de la grandeur des étoiles. Il faudrait aussi étudier l'équation des étoiles polaires qui n'est pas la même que celle des étoiles voisines de l'équateur. Les travaux des astronomes de Greenwich et Poulkovo ont fourni les principaux matériaux de la Notice.

Sidgreaves (Rév. *W.*). — Le spectre de β Lyre, d'après les observations de Stonyhurst en 1895 (p. 515-532, avec dessins).

Les données qui ont servi de base à cet important travail consistent d'abord dans les Tableaux des longueurs d'onde relatives des raies principales d'après 90 photographies du spectre rangées par ordre de date à partir de l'époque du plus petit minimum de l'étoile; et ensuite dans une Table des longueurs d'onde moyennes pour chaque jour de la période, avec une Carte montrant les positions relatives des raies pour chaque jour.

Le P. Sidgreaves dit que, parmi toutes les explications proposées, celle de MM. Belopolsky et Vogel paraît à préférer. Le travail se termine par cette conclusion empruntée à M. Belopolsky : en général, il faut avouer que l'ensemble des faits observés dans le spectre de β Lyre est loin d'être expliqué par un mouvement des corps sur des orbites; il paraît nécessaire d'invoquer les actions intérieures.

Gill (*D.*). — Positions moyennes et mouvements propres pour 1900 de 24 étoiles circompolaires australes.

Digitized by Google

Les détails de la discussion qui a fourni le Tableau dont il s'agit seront publiés en Appendice au Catalogue général du Cap pour 1890. M. Gill ajoute que l'ensemble des observations est très bien représenté, spécialement les ascensions droites.

Innes (*R.-T.-A.*). — Étoiles doubles nouvelles trouvées à l'observatoire du Cap en 1896.

La liste qui fait suite à des listes antérieures va du n° 43 au n° 146. Ce sont des estimations et non des mesures à proprement parler.

See (*T.-J.-J.*). — Mesures micrométriques d'étoiles doubles dans le voisinage de η Carène, avec le réfracteur de 24 pouces de l'observatoire Lowell.

Mesures de 18 objets identifiés avec ceux du Catalogue de Gould (*Argentine General Catalogue*, p. 625-630).

Burnham (*S.-W.*). — L'orbite de μ Dragon.

Mort de M. E.-J. Stone.

Dans la séance du 14 mai, le président Sir R.-S. Ball a annoncé la mort de M. E.-J. Stone, directeur de l'observatoire Radcliffe à Oxford, connu par un important Catalogue d'étoiles australes et par une discussion approfondie du passage de Vénus.

Hills (Capitaine). — Détermination des longitudes terrestres par la Photographie.

Dans cette Communication, non insérée dans les *Monthly Notices* (*voir* dans l'*Observatory*, p. 224, le compte rendu de la séance du 14 mai), le capitaine Hills revient sur la méthode proposée par lui (*Bull.*, t. XIII, p. 206), laquelle consiste à photographier sur la même plaque la Lune et une étoile brillante de même déclinaison, en tenant compte, avec précision, de l'intervalle des deux poses.

MM. Turner et Dyson, le capitaine Noble et le Président ont montré, par leurs remarques à propos de la Note du capitaine Hills, l'extrême importance qu'ils attachent à la détermination pratique des longitudes.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LES DÉTERMINATIONS DE LATITUDE EFFECTUÉES PAR M. PÉRIGAUD AU CERCLE GAMBEY DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS;

PAR M. F. GONNESSIAT.

M. Périgaud vient de publier le détail des mesures de distances zénithales qu'il a obtenues au cercle de Gambey, de 1887 à 1894 inclusivement. Pour la plus grande part, elles se rapportent à la Polaire. Dans ce qui va suivre, il ne sera question que des observations faites sur cette étoile.

L'habileté de l'observateur, le long intervalle sur lequel s'étendent les mesures, donnent à cette série de déterminations une importance particulière. Nous allons donc l'examiner avec toute l'attention qu'elle mérite.

Le but principal poursuivi par l'auteur était la détermination exacte de la latitude. Or, il arrive à cette conclusion que :

« La valeur de latitude du cercle de Gambey ne peut s'écarter sensiblement de $48^{\circ}50'10'',9$;

» Quant à la variation de la latitude, l'ensemble des observations de la Polaire, de 1887 à 1894, n'apporte pas de vérification de la loi généralement admise et même ne fournit aucune preuve formelle de son existence. »

A l'origine de la question, les résultats des observations de M. Périgaud, publiés d'année en année, ont paru contraires à l'hypothèse de la variabilité des latitudes.

Il y a donc intérêt à voir si réellement les observations au cercle de Gambey ne décèlent d'aucune façon le déplacement du pôle, et à essayer de se rendre compte par suite de quelles circonstances, étrangères à l'observateur, une conclusion plus précise n'a pu se dégager de cet ensemble de mesures.

Observons d'abord que, si l'on se borne à combiner entre elles des moyennes de déterminations obtenues à six mois de distance et durant une période de plusieurs mois, on élimine nécessai-

Digitized by Google

rement les variations périodiques annuelles ou quasi-annuelles, comme celles de la latitude, le résultat conclu ne prouve rien au point de vue qui nous occupe.

Il faut donc, avant tout, grouper les déterminations de même nature par périodes assez courtes. C'est ce que nous avons fait, en établissant des moyennes de valeurs dont les dates extrêmes sont rarement espacées de plus d'un mois. Avant d'en donner le Tableau, nous allons définir les notations dont nous ferons usage.

Les nombres publiés par M. Périgaud englobent avec la valeur de la latitude : d'une part, la correction $\Delta\delta$ à la déclinaison de la Polaire admise par la *Connaissance des Temps;* d'autre part la flexion instrumentale f.

Posons

$$\varphi = 48^\circ 50' 10'' + \Delta\varphi.$$

En ne prenant que les secondes et retranchant 10″ au résultat brut de l'observation, on obtient les valeurs Δz, telles que

$$\Delta z = \Delta\varphi \mp \Delta\delta + f \left\{ \begin{matrix} \text{PS.} \\ \text{PI.} \end{matrix} \right.$$

$\Delta\varphi$ se compose d'une partie constante $\Delta\varphi_0$ et d'une partie périodique $d\varphi$,

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + d\varphi.$$

$\Delta\delta$ comprend la correction $\Delta\delta_0$ à la position moyenne et la correction $d\delta$ d'aberration et de parallaxe,

$$\Delta\delta = \Delta\delta_0 + d\delta.$$

Dans le but de déterminer avec le plus de précision possible $\Delta\delta_0$ et f, il est avantageux, en s'aidant des résultats les mieux connus, d'éliminer les variables $d\varphi$ et $d\delta$, quitte à les rétablir ensuite s'il y a lieu. On obtient ainsi

$$\Delta z - d\varphi \pm d\delta = \Delta z_0 = \Delta\varphi_0 \mp \Delta\delta_0 + f.$$

Dans l'hypothèse d'une flexion invariable, les Δz_0 doivent représenter, dans chaque catégorie de déterminations, une valeur constante.

Le Tableau qui suit donne d'abord, avec leur date, les moyennes Δz.

Digitized by Google

Les $d\varphi$ ont été calculées avec la formule représentative des observations de Lyon (*Comptes rendus*, 3 mai 1897), formule qui s'accorde bien d'ailleurs avec la moyenne des nombreuses mesures obtenues par le procédé de Talcott.

Nous adoptons comme constante de l'aberration $\nu = 20'',49$, soit $\Delta\nu = 0'',045$, et nous prenons pour parallaxe de la Polaire $\pi = 0'',045$; la correction $d\delta$ peut alors se mettre sous la forme

$$d\delta = 0'',063 \cos(\odot - 243^\circ).$$

Les Δz_0 résultant de la combinaison des valeurs précédentes sont réparties, avec le nombre n de mesures afférent à chacune, dans les quatre colonnes répondant aux observations directes d ou par réflexion r, à chacune des culminations, PS ou PI.

On divise les observations en deux parties : dans la première, la réfraction a été calculée d'après les indications du thermomètre Arago, placé hors de la salle d'observation; dans la deuxième, le thermomètre utilisé était suspendu à l'intérieur, près de l'objectif lorsque la lunette vise le pôle.

Afin de rendre toutes les observations comparables entre elles, on a rétabli la déclinaison primitive, qui avait été corrigée de $-0'',1$ à partir de 1891,0.

On prend pour unité le *centième de seconde*.

PREMIÈRE PARTIE. — *Thermomètre extérieur.*

Numéros d'ordre.	Date 1800+	Δz.	$-d\varphi$.	$\pm d\delta$.	PS. d. Δz_0.	PS. d. n.	PS. r. Δz_0.	PS. r. n.	PI. d. Δz_0.	PI. d. n.	PI. r. Δz_0.	PI. r. n.
1...	87,45	250	+12	—6	256	14						
2...	45	152	+12	+6					170	15		
3...	50	180	+11	+5					196	6		
4...	88,73	233	+10	—3					240	3		
5...	73	123	+10	—3							130	3
6...	80	171	+17	—5					183	8		
7...	80	65	+17	—5							77	8
8...	81	210	+18	+5	233	9						
9...	81	65	+18	+5			88	10				
10...	89,46	241	—14	+6					233	8		
11...	46	77	—14	+6							69	9
	Ensemble.....				247	23	88	10	194	40	81	20

Digitized by Google

Deuxième partie. — *Thermomètre intérieur.*

Numéros d'ordre.	Date 1800 +	Δz.	$-d\varphi$.	$\pm d\delta$.	PS. d. Δz_0.	PS. d. n.	PS. r. Δz_0.	PS. r. n.	Pl. d. Δz_0.	Pl. d. n.	Pl. r. Δz_0.	Pl. r. n.
12...	89,38	229	— 5	+6					230	9		
13...	40	340	— 8	—6	326	2						
14...	87	247	+ 8	+6	261	7						
15...	90,02	210	+25	+4	239	3						
16...	15	130	+24	0			154	11				
17...	18	194	+22	—1	215	14						
18...	41	216	— 9	+6					213	10		
19...	41	320	— 9	—6	305	2						
20...	46	12	—17	+6							1	8
21...	86	224	— 4	—6					214	10		
22...	87	265	— 2	+6	269	2						
23...	98	208	+15	+5	228	5						
24...	91,13	213	+26	0	239	11						
25...	18	211	+25	—1	235	11						
26...	30	262	+12	—5	269	9						
27...	39	270	— 3	—6	261	7						
28...	42	218	— 8	+6					216	10		
29...	49	181	—21	+5					165	10		
30...	56	226	—31	+3					198	11		
31...	92,12	211	+10	+1	222	9						
32...	21	248	+16	—3	261	10						
33...	41	40	+ 5	+6							51	9
34...	45	181	0	+6					187	9		
35...	51	168	— 7	+5					166	6		
36...	93,12	210	— 3	+1	208	9						
37...	21	239	+ 1	—3	237	9						
38...	25	218	+ 2	—4	216	9						
39...	31	20	+ 1	+5							26	2
40...	32	236	+ 1	+6					243	11		
41...	33	249	0	—6	243	13						
42...	37	209	— 1	+6					214	11		
43...	42	24	— 4	+6							26	12
44...	48	9	— 7	+5							7	9
45...	48	196	— 7	+5					194	10		
46...	57	0	—13	+3							—10	4
47...	58	201	—13	+3					191	10		
48...	87	254	—15	+6	245	9						
49...	87	211	—15	—6					190	7		

Digitized by Google

Numéros d'ordre.	Date 1800 +	Δz.	$-d\varphi$.	$\pm d\delta$.	PS. d. Δz_0.	PS. d. n.	PS. r. Δz_0.	PS. r. n.	PI. d. Δz_0.	PI. d. n.	PI. r. Δz_0.	PI. r. n.
50...	94,10	84	— 3	+2			83	10				
51...	15	83	— 2	0			81	10				
52...	22	93	0	—3			90	10				
53...	25	93	0	—4			89	9				
54...	32	100	— 1	—6			93	10				
55...	32	32	— 1	+6							37	13
56...	39	38	— 1	+6							43	11
57...	46	58	— 2	+6							62	10
58...	51	78	— 3	+5							80	10
59...	71	90	— 1	—2							87	4
Ensemble.....					241	141	99	60	203	124	39	92

Admettons avec M. Périgaud que la flexion astronomique de l'instrument de Gambey soit suffisamment bien représentée par l'expression

$$f = a \cos z.$$

Dans ce cas, deux observations conjuguées d et r déterminent a :

$$d - r = 2a.$$

Si l'on suppose que le paramètre a puisse être considéré comme invariable durant l'intervalle des mesures, les moyennes des Tableaux précédents conduisent aux nombres que voici :

	$2a$.	Poids.
Première partie. PS.....	+159	3
» » PI.....	+113	5
Deuxième partie. PS.....	+142	17
» » PI.....	+164	21
Ensemble.....	+150	

L'unité de poids correspond à $n = 10$.

Mais on peut concevoir quelques doutes sur la permanence de l'état instrumental. On est alors amené à ne combiner entre elles que des séries d'observations sensiblement de même date. On trouve ainsi :

Digitized by Google

Date. 1800 +.	Numéros des séries. d.	r.	2a.	Poids.
88,7	4	5	+110	2
88,8	6	7	+106	4
88,8	8	9	+145	5
89,5	10	11	+164	4
90,2	17	16	+ 61	6
90,4	18	20	+212	5
92,4	34	33	+136	5
93,3	40	39	+217	2
93,4	42	43	+188	6
93,5	45	44	+187	5
93,6	47	46	+201	3
Ensemble			+148	
En excluant 90,2			+162	

L'unité de poids correspond à $n = 1$.

On retombe à peu près sur le nombre obtenu précédemment; mais on constate des fluctuations qui paraissent excéder les erreurs d'observations; manifestement la différence $(d - r)$ s'est accrue de plus d'une demi-seconde dans l'intervalle de 1888 à 1893.

Cependant, si l'on considère les moyennes des déterminations obtenues avec l'aide du collimateur zénithal, c'est une variation de sens inverse que l'on trouve. Voici les chiffres (p. 87) :

Dates.	2a.	n.
1889,48	+173	9
89,84	+168	5
90,46	+163	3
90,78	+160	6
91,42	+143	7
94,62	+140	5
Moyenne	+158	

De ce qui précède, il doit être permis de conclure que la loi de la flexion n'est pas aussi simple qu'on l'a admis, qu'elle peut contenir un terme fonction de $\sin z$, qu'elle n'est pas constante au degré de précision cherché, et que, par conséquent, il eût été désirable d'alterner symétriquement les observations d et r, de façon à pouvoir éliminer ou déterminer d'une façon continue cet élément important.

Digitized by Google

Quoi qu'il en soit, en restant dans l'hypothèse d'une flexion constante, nous pouvons admettre, en nombre rond,

a ..... $+80$

La correction f, ne variant pas de $0'',01$ d'une culmination à l'autre, est ainsi

d ..... -140
r ..... $+20$

En l'appliquant aux moyennes des $\Delta\varphi_0$, on obtient les nombres suivants qui déterminent $\Delta\delta_0$:

	PS. $\Delta\varphi_0 - \Delta\delta_0$.	n.	PI. $\Delta\varphi_0 + \Delta\delta_0$.	n.	$\Delta\delta_0$.	Poids relatif.
Première partie d.....	107	23	54	40	-27	2
» » r.....	108	10	101	20	-4	1
Deuxième partie d.....	101	141	63	124	-19	10
» » r.....	119	60	59	92	-30	6

Valeur conclue ..... $\Delta\delta_0 = -0'',23$

Au sujet de cette valeur, il faut remarquer qu'elle peut être sensiblement entachée par les erreurs de la graduation, puisque la lunette est restée calée sur le cercle constamment suivant un même diamètre.

A l'aide des valeurs, données ci-dessus, de f et $\Delta\delta_0$, il est maintenant possible de calculer les $\Delta\varphi_0$ résultant de chaque groupe d'observations : les valeurs en sont données ci-après. En regard nous plaçons les variations calculées

$$d'\varphi = d\varphi \mp d\delta$$

introduites précédemment. La somme

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + d'\varphi$$

ajoutée à la constante $48^\circ 50' 10''$ fournirait ainsi la valeur de la latitude tirée de l'observation à chacune des époques considérées.

Digitized by Google

PREMIÈRE PARTIE.

Date. 1800 +.	$d'\varphi$.	PS. d. $\Delta\varphi_0$.	PS. d. n.	PS. r. $\Delta\varphi_0$.	PS. r. n.	Pl. d. $\Delta\varphi_0$.	Pl. d. n.	Pl. r. $\Delta\varphi_0$.	Pl. r. n.
87,45.....	— 6	93	14						
45.....	—18					53	15		
50.....	—16					79	6		
88,73.....	— 7					123	3		
73.....	— 7							173	3
80.....	—12					66	8		
80.....	—12							120	8
81.....	—23	70	9						
81.....	—23			85	10				
89,46.....	+ 8					116	8		
46.....	+ 8							112	9
Ensemble...		84	23	85	10	77	40	124	20

DEUXIÈME PARTIE.

Date. 1800 +.	$d'\varphi$.	PS. d. $\Delta\varphi_0$.	PS. d. n.	PS. r. $\Delta\varphi_0$.	PS. r. n.	Pl. d. $\Delta\varphi_0$.	Pl. d. n.	Pl. r. $\Delta\varphi_0$.	Pl. r. n.
89,38.....	— 1					113	9		
40.....	+14	163	2						
87.....	—14	98	7						
90,02.....	—29	76	3						
15.....	—24			151	11				
18.....	—21	52	14						
41.....	+ 3					96	10		
41.....	+15	142	2						
46.....	+11							44	8
86.....	+10					97	10		
87.....	— 4	106	2						
98.....	—20	65	5						
91,13.....	—26	76	11						
18.....	—24	72	11						
30.....	— 7	106	9						
39.....	+ 9	98	7						
42.....	+ 2					99	10		
49.....	+16					48	10		
56.....	+28					81	11		
92,12.....	—11	59	9						

Digitized by Google

Date. 1800 +.	$d'\varphi$.	PS. d. $\Delta\varphi_0$.	PS. d. n.	PS. r. $\Delta\varphi_0$.	PS. r. n.	PI d. $\Delta\varphi_0$.	PI d. n.	PI r. $\Delta\varphi_0$.	PI r. n.
92,21.....	−13	98	10						
41.....	−11							94	9
45.....	− 6					70	9		
51.....	+ 2					49	6		
93,12.....	+ 2	45	9						
21.....	+ 2	74	9						
25.....	+ 2	53	9						
31.....	− 6							69	2
32.....	− 7					126	11		
33.....	+ 6	80	13						
37.....	− 5					97	11		
42.....	− 2							69	12
48.....	+ 2							50	9
48.....	+ 2					77	10		
57.....	+10							33	4
58.....	+10					74	10		
87.....	+ 9	82	9						
87.....	+21					73	7		
94,10.....	+ 1			81	10				
15.....	+ 2			80	10				
22.....	+ 3			90	10				
25.....	+ 4			90	9				
32.....	+ 7			97	10				
32.....	− 5							75	13
39.....	− 5							81	11
46.....	− 4							101	10
51.....	− 2							121	10
71.....	+ 3							133	4
Ensemble.....		78	141	96	60	86	124	82	92

La moyenne générale donne :

Première partie ..... $\Delta\varphi_0 = +0'',90$, $\varphi = 48.50.10,90$,
Deuxième partie..... $\Delta\varphi_0 = +0'',85$, $\varphi = 48.50.10,85$.

On retombe donc bien sur le chiffre annoncé par M. Périgaud.

En se reportant au Mémoire, on observe que les déterminations d'un même groupe, c'est-à-dire d'à peu près même date, présentent entre elles, en général, une concordance très remarquable, qui atteste le talent de l'observateur. Et l'on conclut de là que les erreurs accidentelles des pointés n'entrent que pour une faible part

Digitized by Google

dans les écarts que montre le Tableau des valeurs obtenues pour la constante $\Delta\varphi_0$.

Les écarts dont nous parlons sont d'un ordre de grandeur supérieur à celui des variations $d'\varphi$ qu'il s'agissait de mettre en évidence. En remarquant d'ailleurs que, par suite de l'interférence des deux oscillations principales, la variation de latitude a été presque nulle dans l'intervalle 1892 à 1894, on s'explique comment les recherches de M. Périgaud ont abouti sur ce point à une conclusion négative.

L'origine des erreurs systématiques qui ont nui à la précision des résultats n'est pas difficile à préciser.

Nous avons déjà parlé de l'incertitude affectant les valeurs adoptées pour la flexion, et nous avons montré que cette incertitude porte sur des grandeurs de l'ordre au moins des variations de la latitude.

Une autre cause d'erreur tient aux anomalies de la réfraction aux abords de l'instrument. Entre l'extérieur et l'intérieur existent des différences de température atteignant parfois de 2° à 3°, et qui faussent le calcul de la réfraction; même l'erreur peut être différente dans l'observation directe et l'observation réfléchie.

Dans deux séries de mesures effectuées la nuit, au printemps et à l'automne de 1889, M. Périgaud a trouvé que les réductions basées sur les indications du thermomètre intérieur conduisent à des valeurs de la latitude plus fortes de 0″,3 que celles en rapport avec le thermomètre extérieur. Et cependant les moyennes générales des deux périodes correspondant à l'emploi de chacun des thermomètres sont sensiblement d'accord. C'est donc que les anomalies dues à la réfraction sont de sens et de grandeur variables avec l'heure du jour et l'époque de l'année.

Que l'on consulte le Tableau des $\Delta\varphi_0$, on verra, par exemple, que les résultats obtenus au PS tendent à *croître* dans l'intervalle des fractions 0,1 à 0,4 de l'année; au PI, les nombres sont *décroissants* de 0,3 à 0,5. L'ensemble des observations *r* de 1894 indiquerait une latitude régulièrement croissante : ici, sans doute, la variation de la flexion entre au même degré que les perturbations de la réfraction.

Digitized by Google

Il n'était donc pas possible de construire, d'après les mesures qu'on vient d'analyser, une courbe normale des variations de latitude. Mais on peut néanmoins se demander si ces variations n'apparaîtraient pas dans des moyennes plus étendues, et grouper dans ce but, d'après la grandeur des $d'\varphi$, les valeurs observées

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + d'\varphi,$$

telles qu'elles résultent du Tableau ci-dessus.

C'est ce qui a été fait dans le Tableau suivant, où nous mettons les moyennes $\Delta\varphi$ relatives à chaque groupe, leur écart $d\varphi$ *obs.* à la moyenne, et la comparaison O. — C. entre les $d\varphi$ *obs.* et les $d'\varphi$ prévues par nos formules. N représente le nombre de valeurs entrant dans chaque moyenne, et Σp la somme des poids correspondants. Afin de tenir compte non seulement de l'erreur des pointés, mais encore des autres erreurs plus ou moins systématiques, le poids p d'une valeur provenant de n déterminations a été calculé d'après l'échelle suivante :

n.	p.
1 à 3	1
4 à 6	2
7 à 10	3
Au delà de 11	4

L'erreur moyenne de l'unité de poids, déduite des résidus, a été trouvée égale à $\pm 0'',25$.

	N.	Σp.	$\Delta\varphi$.	$d\varphi$. obs.	$d'\varphi$. calc.	O.—C.
Première partie.....	5	12	114 ± 7	+24	+ 1	+23
» »	6	18	60 ± 6	—30	—17	—13
» »	8	25	67 ± 5	—18	—21	+ 3
Deuxième partie.....	14	43	87 ± 4	+ 2	— 5	+ 7
» »	15	44	82 ± 4	— 3	+ 3	— 6
» »	11	29	92 ± 5	+ 7	+14	— 7

Dans la première partie, les erreurs systématiques ne se compensent sans doute qu'imparfaitement, et l'écart des deux valeurs de $\Delta\varphi$ qui y figurent est trop grand; mais il est bien dans le sens voulu.

Dans la deuxième partie, l'accord entre l'observation et le calcul est réalisé d'une façon très satisfaisante, et les discordances O. — C. restent dans les limites des erreurs à craindre.

Digitized by Google

L'amplitude totale des variations aussi bien que leur sens doivent donc être tenus pour conformes aux prévisions : en tout cas, ils n'impliquent aucune contradiction avec les recherches faites ailleurs.

En résumé, si les observations faites avec tant de soin par M. Périgaud ne font pas ressortir nettement les variations de la latitude, c'est que celles-ci ont été faibles en général dans l'intervalle des mesures, et ont été masquées par des erreurs reconnaissant pour causes : 1° une installation défectueuse; 2° les difficultés de déterminer la flexion astronomique d'un instrument non réversible.

Dans leur ensemble, ces observations doivent être considérées comme vérifiant la loi généralement admise pour les oscillations de l'axe terrestre.

SUR L'AMORTISSEMENT DES TRÉPIDATIONS DU SOL. APPLICATION DU BAIN DE MERCURE A COUCHE ÉPAISSE;

PAR M. MAURICE HAMY.

Les présentes recherches ont été instituées à la demande de M. Lœwy, afin de rendre observable, à Paris, le bain de mercure à couche épaisse qui, en principe, est l'appareil idéal pour obtenir la direction absolue de la verticale. Elles reposent sur des considérations théoriques qui ont conduit droit au but à atteindre.

En réfléchissant aux moyens appliqués jusqu'à ce jour pour amortir l'effet des trépidations du sol sur la surface du mercure, mon attention s'est portée sur le bain Gautier, fondé sur l'emploi d'une couche mince combiné avec un demi-flottage de la cuvette. L'idée m'est venue de chercher analytiquement s'il est possible de réaliser un flottage pouvant à lui seul produire un amortissement efficace. L'étude approchée des petits mouvements d'un solide nageant dans un liquide, lorsque le vase qui renferme le système est soumis à des vibrations harmoniques verticales, m'a conduit au résultat suivant : Le solide acquiert, au bout de quelque temps, un mouvement vibratoire, synchrone de celui du

Digitized by Google

vase, mais d'amplitude différente. Cette amplitude est beaucoup plus petite que celle du vase si, l'*enfoncement* du solide dans le liquide étant assez grand, la résistance au mouvement produite par la viscosité n'est pas trop considérable. Dans cet énoncé, on doit entendre par *enfoncement* la longueur d'une colonne cylindrique du liquide qui aurait pour base la section du solide déterminée par la surface libre de ce liquide et dont le poids égalerait celui du solide.

Je n'ai pas vérifié expérimentalement ces indications du calcul parce que la condition imposée à la cuvette de s'enfoncer profondément dans le liquide m'a paru difficile à concilier avec la réalisation d'un amortissement modéré, pour un bain de grandes dimensions. Mais le résultat théorique obtenu n'a pas été perdu; il m'a mis sur la voie que j'ai suivie ensuite avec le plus complet succès.

Remarquant que la poussée variable du liquide sur le solide en mouvement est comparable à l'action élastique d'un ressort, j'ai été conduit à me poser le problème suivant, en ne faisant plus cette fois la restriction que les vibrations sont verticales.

Un support rigide, animé d'un mouvement vibratoire, entraîne un solide pesant M qui y est suspendu par des ressorts hélices verticaux égaux, de masses négligeables, dont les points d'attache forment un polygone régulier. On demande de déterminer le mouvement absolu de la masse M, sachant que la vitesse relative d'un point Q de ce solide, par rapport au support, est gênée par des résistances proportionnelles à cette vitesse.

La solution complète de cette question dépend de six équations différentielles simultanées du second ordre qui sont linéaires et à coefficients constants dans le cas des petits mouvements. On peut abaisser ce nombre à trois, en se contentant d'étudier le mouvement dans le plan vertical P contenant la direction des vibrations et le centre de gravité du solide.

Les conclusions auxquelles on arrive ainsi ne peuvent différer de celles auxquelles on parviendrait en prenant le problème en général, car les mouvements du système, autres que ceux qui s'effectuent dans le plan P, sont rapidement détruits par l'amortissement appliqué en Q, puisqu'ils ne sont pas entretenus par les vibrations venant du dehors.

Digitized by Google

Appelons

m la masse du solide M;

l_0 la longueur réduite des ressorts (longueur que prendraient les ressorts au repos si la rencontre des spires ne s'opposait pas à ce qu'ils se raccourcissent assez pour que leur tension devienne nulle);

l_1 la longueur des ressorts lorsque le solide M y est suspendu et se trouve en équilibre;

g l'accélération de la pesanteur;

T la période du mouvement vibratoire du support;

p la hauteur du plan contenant les points d'attache des ressorts au-dessus du centre de gravité de M (on suppose le plan en question horizontal lorsque le système est en équilibre);

mk^2 le moment d'inertie du corps M par rapport à un axe horizontal, perpendiculaire au plan P, passant par son centre de gravité;

$-\lambda$ le coefficient négatif par lequel il faut multiplier la vitesse du point Q, invariablement lié au solide M, dans le sens vertical, pour avoir la résistance au mouvement de ce point dans cette direction;

$-\mu$ le coefficient négatif par lequel il faut multiplier la vitesse du point Q, dans le sens horizontal, pour avoir la résistance au mouvement du même point dans ce second sens;

q la distance à laquelle le point Q est placé au-dessous du centre de gravité de M, sur la verticale passant par ce point, lorsque ce corps est un équilibre.

Désignons par

$$\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\beta \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

les composantes, suivant la verticale et dans le sens horizontal, du mouvement vibratoire qui entraîne le support. Appelons ξ le

Digitized by Google

déplacement du centre de gravité de M dans le sens vertical, η le déplacement horizontal du même point dans le plan vertical P. Considérons enfin une droite invariablement liée au corps M, passant par son centre de gravité et dirigée verticalement lorsque ce solide est en repos.

Soit ϖ l'angle dont cette droite s'écarte de sa position d'équilibre parallèlement au plan P, pendant le mouvement.

On trouve, en discutant les intégrales générales des équations différentielles du problème, que les conditions initiales, dans lesquelles le solide a été abandonné aux forces qui agissent sur lui, perdent, au bout d'un certain temps, toute influence sur le mouvement qui anime le corps M. C'est une conséquence de l'amortissement appliqué en Q.

Voici, à titre d'exemple, comment on parvient à la valeur de ξ. L'équation qui fournit cette variable est

$$(1)\quad \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{d\xi}{dt} + \frac{g}{l_1 - l_0}\xi = \alpha\left[\frac{\lambda}{m}\frac{2\pi}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T} + \frac{g}{l_1 - l_0}\sin 2\pi\frac{t}{T}\right].$$

On en tire

$$\xi = [AE^{r_1 t} + BE^{r_2 t}] + \alpha\sqrt{\frac{1 + \left[\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{m}\frac{l_1 - l_0}{g}\right]^2}{\left[\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{l_1 - l_0}{g} - 1\right]^2 + \left[\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{m}\frac{l_1 - l_0}{g}\right]^2}}\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \omega\right);$$

en appelant E la base des logarithmes népériens; A et B deux constantes arbitraires; r_1 et r_2 les racines de la caractéristique de l'équation (1), privée de second membre (quantités dont la partie réelle est négative); ω une constante réelle, fonction des paramètres qui figurent sous le radical.

Lorsque t augmente, les exponentielles $E^{r_1 t}$, $E^{r_2 t}$ décroissent très rapidement, en sorte qu'au bout d'un espace de temps fort restreint, la valeur de ξ se réduit au terme en $\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \omega\right)$. On a alors

$$\xi = \alpha\sqrt{\frac{1 + \left[\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{m}\frac{l_1 - l_0}{g}\right]^2}{\left[\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{l_1 - l_0}{g} - 1\right]^2 + \left[\frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{m}\frac{l_1 - l_0}{g}\right]^2}}\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \omega\right).$$

On trouve, par des considérations analogues, quoique un peu

Digitized by Google

moins simples, les formules suivantes, établies en faisant l'hypothèse que le produit $\frac{T^2}{4\pi^2}\frac{g}{l_1}$ est petit devant l'unité,

$$\eta = \beta\frac{T}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2+\left(\frac{g}{l_1}\frac{T}{2\pi}\right)^2}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\omega'\right),$$

$$\varphi = \frac{\beta}{k^2}\frac{T}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{q\mu}{m}\right)^2+\left[\frac{gp}{l_1}\frac{T}{2\pi}\right]^2}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\omega''\right),$$

ω' et ω'' désignant des quantités constantes.

Le mouvement du solide devient donc périodique au bout d'un certain temps et synchrone de celui du support.

Les facteurs qui accompagnent α et β, dans ces expressions, décroissent lorsque l_1 croît $\left(\text{il faut } \frac{l_1-l_0}{g} > \frac{T^2}{4\pi^2}\right.$ pour que cette conclusion soit exacte pour $\left.\xi\right)$. Il y a donc intérêt à suspendre le corps M à des ressorts susceptibles de s'allonger beaucoup si l'on veut réduire le plus possible l'influence des vibrations du support sur le solide. On doit, dans le même but, donner au solide M une forme telle que le rayon de giration k soit le plus grand possible.

La valeur de φ diminue avec p; mais nous verrons, dans l'application qui sera faite plus loin de la théorie précédente au bain de mercure, que ce paramètre ne peut pas être pris inférieur à un certain minimum.

Les valeurs de ξ, η diminuent avec λ, μ et celle de φ avec $q\mu$. Il semble donc que l'emploi d'un très faible amortissement doive être avantageux pour réduire autant que possible l'effet des vibrations du support sur le solide M (on ne peut supposer λ et μ nuls puisque les expressions données pour ξ, η, φ supposent essentiellement qu'il y a un amortissement sensible). C'est effectivement ce qui a lieu si le mouvement vibratoire possède la régularité mathématique que nous avons admise jusqu'ici; mais si ce mouvement subit des perturbations fréquentes, comme dans le cas des trépidations du sol, il faut de toute nécessité donner à l'amortissement une valeur notable pour que la force vive communiquée au solide par ces perturbations soit promptement détruite. Il y a donc, dans le choix de l'amortissement appliqué

Digitized by Google

en Q, un juste milieu à atteindre que l'expérience seule est apte à faire connaître dans chaque cas particulier.

Pour donner une idée de la perfection avec laquelle l'amortissement des trépidations est réalisé par la suspension à ressorts, voici les valeurs ξ, η, φ pour un appareil d'essai expérimenté à l'Observatoire. On avait, en chiffres ronds,

$$\xi = \frac{\alpha}{110}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\omega\right), \qquad \eta = \frac{\beta}{125}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\omega'\right), \qquad \varphi = \frac{\beta}{16^{m},00}.$$

On voit que le mouvement vibratoire du centre de gravité du solide M est de très petite amplitude par rapport à celle des trépidations. Quant à la valeur de φ, elle est extrêmement petite. En admettant que $\beta < 0^{mm},01$, ce qui est très vraisemblable à l'Observatoire, il en résulte

$$\varphi < \frac{1''}{7}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\omega''\right).$$

Voici les données qui ont servi à calculer les valeurs de ξ, η, φ dans les expériences exécutées à l'Observatoire. En prenant comme unités le mètre et la seconde de temps moyen (μ et λ ayant les dimensions d'une masse divisée par un temps, d'après leur définition, les rapports $\frac{\mu}{m}$, $\frac{\lambda}{m}$ ont les dimensions de l'inverse d'un temps), on avait approximativement

$$T = 0^{s},1, \qquad g = 9^{m},81,$$
$$\frac{\lambda}{m} = \frac{1}{2^{s}}, \qquad l_1 = 0^{m},80,$$
$$\frac{\mu}{m} = \frac{1}{2^{s}}. \qquad l_0 = 0^{m},10,$$
$$q = 0^{m},30,$$
$$p = 0^{m},28,$$
$$k = 0^{m},20.$$

Application au bain de mercure. — Supposons que le solide M soit une cuvette très lourde contenant du mercure de telle sorte que le centre de gravité du système cuvette-mercure se trouve sensiblement sur la surface de ce liquide. Les petits mouvements du système causent des ondulations sur la surface liquide; mais, comme la masse de ces ondulations est très petite par rapport à celle de l'ensemble cuvette-mercure, les conditions posées

Digitized by Google

dans notre problème de tout à l'heure ne changent pas sensiblement, en sorte que le mouvement de la cuvette est pratiquement le même que si le mercure était figé. On conçoit donc la possibilité d'atténuer considérablement l'effet des trépidations du sol sur la surface du mercure en suspendant convenablement la cuvette.

Il y a toutefois une condition indispensable dont il faut tenir compte, dans la construction de l'appareil, pour que ce raisonnement soit valable. Il faut que le système cuvette-mercure soit stable. La stabilité est assurée si l'on a

$$p > \frac{\pi D}{4} \frac{r^4}{P}$$

ou

$$p > 10,7 \frac{r^4}{P}. \tag{2}$$

r désignant le rayon intérieur de la cuvette, D le poids spécifique du mercure, P le poids de la cuvette (poids du solide M) et p, rappelons-le, l'élévation du plan contenant les points d'attache des ressorts à la cuvette, au-dessus du centre de gravité de cette cuvette.

On voit, comme nous l'avons dit plus haut, que la longueur p ne peut être choisie au-dessous d'un certain minimum. Il convient, d'ailleurs, que l'inégalité (2) soit largement vérifiée pour que l'appareil soit très stable. Dans mes recherches (unité de longueur, décimètre; unité de poids, kilogramme), j'ai pris

$$p = 2^d,8 \qquad r = 1^d,2 \qquad P = 20^{kg};$$

ce qui donne

$$2,8 > 1,1;$$

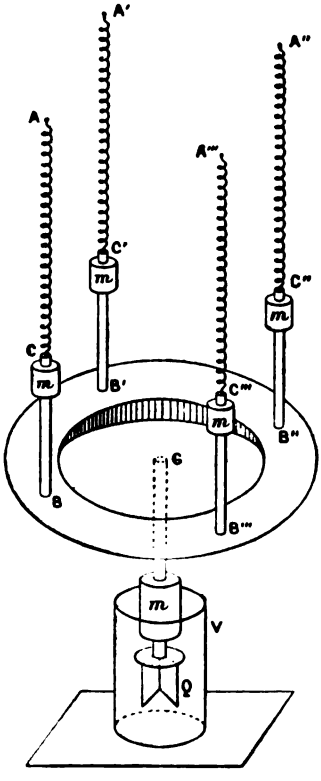
l'inégalité (2) est bien vérifiée.

Les expériences ont été faites avec un appareil provisoire construit d'après les données indiquées ci-dessus. Les ressorts (*voir* la figure), attachés en A, A′, A″, A‴ à un support non représenté sur le schéma [1], sont accrochés en C, C′, C″, C‴ à des mon-

[1] Au lieu d'un seul ressort, il convient d'en attacher deux, de forces différentes, en chacun des points A, A′, ..., de façon que leurs vibrations s'amortissent en se contrariant.

Digitized by Google

tants BC, B′C′, B″C″, B‴C‴, de longueur p, faisant corps avec la cuvette. Un amortisseur Q, vissé en G à la cuvette ($GQ = q$), plonge dans le vase de verre V contenant un mélange visqueux de goudron et d'huile et reposant sur le socle du support. On amène le centre de gravité G du système à se trouver sur la surface du



mercure en déplaçant les masses m, éloignées à dessein du point G pour augmenter le plus possible le moment d'inertie par rapport à un axe horizontal quelconque passant par ce point.

Les expériences (¹) exécutées à l'Observatoire de Paris ont

(¹) Les mesures ont été faites par MM. Boquet, Lancelin, Oltramare, sous la direction de M. Leveau, chef du service méridien.

Digitized by Google

complètement confirmé les prévisions de la théorie. Pendant deux jours consécutifs, les images fournies par le nouveau bain, à couche épaisse, ont été observables, à toutes les heures de la journée et de la soirée, dans les mêmes conditions de netteté que les images fournies par le bain à couche mince. Les déterminations du nadir faites comparativement avec les deux bains n'ont d'ailleurs accusé aucune différence systématique appréciable. Ce résultat est d'accord avec les conclusions des longues recherches de M. Périgaud et d'un travail fait à l'observatoire de Nice en vue de vérifier l'horizontalité de la surface du bain à couche mince. Il convient de rappeler que les expériences de M. Marcuse l'ont conduit à émettre des doutes sur cette horizontalité.

On a constaté à nouveau, pendant le cours des expériences, que le bain de mercure ordinaire à couche épaisse ne permet à aucun moment d'observer le nadir à l'Observatoire de Paris.

En dehors du bain de mercure amalgamé assez souvent employé, il convient de rappeler que le premier bain amorti a été réalisé pratiquement par M. Gautier, il y a une dizaine d'années, en employant, comme nous l'avons déjà dit, une cuvette demi-flottante et une couche mince. M. Périgaud a ensuite supprimé le flottage sans nuire à la qualité des images. Auparavant, Le Verrier avait essayé sans succès d'amortir les oscillations en employant une cuvette à fond strié, isolée du sol par des cales élastiques ou suspendue par des lanières de caoutchouc.

En dehors de son application au bain de mercure, la suspension représentée (*voir* la figure) permet de soustraire un appareil sensible aux petits tremblements du sol. La méthode est indiquée pour les galvanomètres très délicats [1]. Il importe, pour les applications de cette nature, de donner au solide M, sur lequel repose l'instrument, un fort moment d'inertie par rapport à la verticale passant par son centre de gravité. On devra donc munir le solide de masses lourdes éloignées du centre de gravité et disposées dans un plan horizontal passant par ce point. Il conviendra

[1] Les présentes recherches touchaient à leur fin lorsque j'ai appris que M. Benoît avait eu, de son côté, l'idée de suspendre tout récemment un galvanomètre à de longs ressorts pour le soustraire aux trépidations.

Digitized by Google

aussi d'augmenter l'amortissement pour les mouvements s'effectuant autour de la verticale, en faisant plonger dans un liquide visqueux des palettes verticales fixées au solide et assez éloignées de son centre de gravité.

OBSERVATIONS DES LÉONIDES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE RIO JANEIRO.

(Extrait d'une Lettre de M. Cruls à M. Lœwy.)

L'observation de l'essaim des Léonides a fourni cette année des résultats qui n'ont guère répondu à ce que l'on en attendait. Quoique, en réalité, la présence de la Lune ait peut-être contribué jusqu'à un certain point à ce résultat, il est à présumer, toutefois, que la véritable cause est due à un éparpillement plus ou moins considérable des météores le long de l'orbite qu'ils parcourent dans l'espace.

A l'observatoire de Rio, j'avais recommandé à l'assistant de service de faire l'observation des météores, en en notant le nombre de cinq en cinq minutes, à partir de 1^h du matin jusqu'au lever du Soleil. Ceci a été fait pendant cinq nuits consécutives, du 11 au 16 novembre.

Le Tableau ci-dessous montre quel a été le résultat de ces observations.

Nuits des	Nombre de météores.	Remarques.
Nov. 11-12.....	2	Ciel couvert à partir de 1^h35^m jusqu'à 4^h.
12-13.....	7	A 2^h37^m météore brillant.
13-14.....	10	Nuit très claire.
14-15.....	4	Ciel couvert à partir de 2^h.
15-16.....	3	A 8^h35^m météore brillant.
Total....	26	

Digitized by Google

OBSERVATIONS DES PLANÈTES

(114), (124), (130), (137), (153) ET 1896 DC, DD, DE, DF,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE NICE (équatorial coudé);

PAR M. CHARLOIS.

(114).

Dates.	T. m. de Nice.	ΔÆ.	ΔΦ.	N. déc.	Æ app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	*
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JUILL. 28.	10. 5. 5	+0. 4,16	— 5.26,2	4	19.52.14,96	$\bar{1}$,181 *n*	105.40.18,4	0,875 *n*	1
29.	9.28.45	—0.45,32	— 1.44,6	4	19.51.25,49	$\bar{1}$,318 *n*	105.44. 0,0	0,870 *n*	1
30.	9.32.36	—1.36,04	+ 2. 5,0	4	19.50.34,77	$\bar{1}$,286 *n*	105.47.49,5	0,872 *n*	1

(124).

JUIN 23.	10.31. 4	—0. 9,43	— 1. 8,3	5	16.59.42,93	$\bar{2}$,579 *n*	107.57.29,1	0,890 *n*	2
24.	9.26. 7	—0.54,95	— 1.57,2	5	16.58.57,42	$\bar{1}$,185 *n*	107.56.40,2	0,884 *n*	2
25.	9.18.55	—1.41,54	— 2.43,5	4	16.58.10,83	$\bar{1}$,198 *n*	107.55.53,9	0,884 *n*	2
26.	9.30. 5	—2.27,46	— 3.27,2	4	16.57.24,92	$\bar{1}$,108 *n*	107.55.10,1	0,886 *n*	2

(130).

JUIN 19.	10. 3.48	—0.53,05	— 3.21,9	4	17. 5.27,11	$\bar{1}$,101 *n*	82.55.20,7	0,723 *n*	3
21.	10.37. 1	—2.24,42	+ 2.29,0	4	17. 3.55,75	$\bar{2}$,679 *n*	83. 1.11,3	0,722 *n*	3
22.	10. 7.35	—3. 7,91	+ 5.36,1	4	17. 3.12,26	$\bar{2}$,972 *n*	83. 4.18,2	0,723 *n*	3
23	9.31.50	+0.37,72	+ 5.41,5	4	17. 2.29,30	$\bar{1}$,176 *n*	83. 7.39,8	0,726 *n*	4

(137).

JUILL. 28.	11. 3.27	+1.46,53	— 5.14,8	4	19.53. 7,99	$\bar{2}$,619 *n*	88.12.53,1	0,770 *n*	5
29.	9.48.36	+1. 7,50	— 1. 5,6	4	19.52.28,96	$\bar{1}$,226 *n*	88.17. 2,1	0,771 *n*	5
30.	10.27.19	+0.25,31	+ 3.36,9	4	19.51.46,78	$\bar{2}$,960 *n*	88.21.44,5	0,772 *n*	5

(153).

JUILL. 28.	10.34. 8	+3. 2,23	— 5.56,8	4	20.49.40,41	$\bar{1}$,291 *n*	96.13. 0,3	0,824 *n*	6
29.	11. 0.52	+2.22,31	— 3.45,7	4	20.49. 0,50	$\bar{1}$,151 *n*	96.15.11,3	0,827 *n*	6
30.	11.21. 7	+1.42,52	— 1.29,8	4	20.48.20,72	$\bar{2}$,985 *n*	96.17.27,1	0,828 *n*	6

DC (28 décembre 1896) = (425).

Grandeur 13,0.

1896.									
DÉC. 29.	8.49.41	+0. 8,97	— 2. 4,5	5	7.17.35,05	$\bar{1}$,609 *n*	63.29. 9,8	0,596 *n*	7
30.	8. 9.12	—0.46,19	— 4.59,7	4	7.16.39,91	$\bar{1}$,644 *n*	63.26.14,6	0,638 *n*	7
1897.									
JANV. 4.	9. 7. 6	+1. 3,29	+ 4.31,1	5	7.11.46,21	$\bar{1}$,541 *n*	63.11.57,1	0,535 *n*	8
25.	8.24.43	+2.49,65	— 2.50,4	5	6.52.22,77	$\bar{1}$,401 *n*	62.32. 4,7	0,460 *n*	9

Digitized by Google

DD (31 décembre 1896).

Grandeur 12,8.

Dates. 1897.	T. m. de Nice. h m s	ΔÆ. m s	ΔΦ. ′ ″	N. de c.	Æ app. h m s	log f. p.	Φ app. ° ′ ″	log f. p.	✱
JANV. 2.	9.20. 3	+2.41,15	— 2. 9,2	4	7.49. 4,78	$\bar{1}$,573 n	68.25.53,0	0,632 n	10
12.	8.52.50	+1.35,80	+ 2. 9,4	5	7.39.55,61	$\bar{1}$,543 n	67.53.35,8	0,610 n	11

DE (31 décembre 1896).

Grandeur 12,8.

JANV. 2.	9.50. 0	—0.13,40	— 2.27,7	5	7.54.15,15	$\bar{1}$,536 n	68.19.52,6	0,611 n	12
4.	9.40.36	—1.58,95	— 2. 2,8	5	7.52.29,64	$\bar{1}$,536 n	68.20.17,5	0,611 n	12
12.	9.51.41	—1.13,11	— 5.44,9	5	7.45.10,68	$\bar{1}$,429 n	68.22.17,7	0,573 n	13

DF (31 décembre 1896) = (424).

Grandeur 12,2.

JANV. 2.	7.55.52	—2. 1,27	+ 4.30,4	4	8. 5.36,71	$\bar{1}$,661 n	66.37.41,0	0,711 n	14
12.	9.18.32	—2.55,40	+ 3.39,3	5	7.56.24,68	$\bar{1}$,535 n	65.34.36,8	0,572 n	15
26.	8.35. 4	+1.47,86	+ 0.25,5	5	7.43. 9,87	$\bar{1}$,490 n	64.17. 7,3	0,528 n	16

Positions des étoiles de comparaison.

✱	Gr.	Æ moy. 1896,0-97,0. h m s	Réd au j. s	Φ moy. 1896,0-97,0. ° ′ ″	Réd. au j. ″	Autorités.
1.	6,0	19.52. 6,42	+4,38	105.45.52,2	— 7,6	Radcliffe 5333.
1.	6,0	19.52. 6,42	+4,39	105.45.52,2	— 7,6	Id.
1.	6,0	19.52. 6,42	+4,39	105.45.52,2	— 7,7	Id.
2.	7,8	16.59.48,41	+3,95	107.58.27,0	+10,4	Arg. Œ. (Vienne 13062).
2.	7,8	16.59.48,41	+3,96	107.58.27,0	+10,4	Id.
2.	7,8	16.59.48,41	+3,96	107.58.27,0	+10,4	Id.
2.	7,8	16.59.48,41	+3,97	107.58.27,0	+10,3	Id.
3.	10,0	17. 6.16,67	+3,49	82.58.34,5	+ 8,1	$Munich_1$ 13636.
3.	10,0	17. 6.16,67	+3,50	82.58.34,5	+ 7,8	Id.
3.	10,0	17. 6.16,67	+3,50	82.58.34,5	+ 7,6	Id.
4.	10,0	17. 1.48,08	+3,50	83. 1.50,6	+ 7,7	$Munich_1$ 13533.
5.	8,7	19.51.17,50	+3,96	88.18.16,2	— 8,3	A. G. Albany 6913.
5.	8,7	19.51.17,50	+3,96	88.18.16,2	— 8,5	Id.
5.	8,7	19.51.17,50	+3,97	88.18.16,2	— 8,6	Id.
6.	8,0	20.46.34,06	+4,12	96.19. 9,8	—12,7	$\frac{1}{2}$ (Mun_1 26305 + Mun_2 10916).
6.	8,0	20.46.34,06	+4,13	96.19. 9,8	—12,8	Id.
6.	8,0	20.46.34,06	+4,14	96.19. 9,8	—12,9	Id.

Digitized by Google

★	Gr.	⚭ moy. 1895,0-97,0.	Réd. au j.	☊ moy. 1896,0-97,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
7.	8,8	7.17.19,96	+6,12	63.31. 9,1	+ 5,2	A. G. Cambridge 3941.
7.	8,8	7.17.19,96	+6,14	63.31. 9,1	+ 5,2	Id.
8.	7,0	7.10.40,39	+2,53	63. 7.27,9	— 1,9	½ (Y₃ 2985 + Gl. 1815).
9.	7,5	6.49.30,44	+2,68	62.34.59,1	— 4,0	½ (Paris 8352 + A. G. Cambridge 3598).
10.	9,0	7.46.21,26	+2,37	68.28. 2,0	+ 0,2	A. G. Berlin 3155.
11.	8,8	7.38.17,27	+2,54	67.51.26,4	0,0	A. G. Berlin 3096.
12.	9,1	7.54.26,19	+2,36	68.22.19,5	+ 0,8	A. G. Berlin 3211.
12.	9,1	7.54.26,19	+2,40	68.22.19,5	+ 0,8	Id.
13.	9,0	7.46.21,26	+2,53	68.28. 2,0	+ 0,6	A. G. Berlin 3155.
14.	6,5	8. 7.35,61	+2,57	66.33. 8,8	+ 1,8	A. G. Berlin 3293.
15.	8,0	7.59.17,49	+2,59	65.30.56,0	+ 1,5	A. G. Berlin 3251.
16.	8,8	7.41.19,25	+2,76	64.16.41,8	0,0	A. G. Cambridge 4169.

OCCULTATIONS D'ÉTOILES PAR LA LUNE,

OBSERVÉES A L'ÉQUATORIAL DE NICE DE 0m,24 D'OUVERTURE;

PAR M. PRIM.

Dates. 1895.		Étoiles.	Gr.	Phénomène.	Bord de la Lune.	T. observé à la pendule.	Correct. de la pendule.	Temps sid. de Nice.	Temps moy. de Nice.
						h m s	m s	h m s	h m s
MARS	29.	ε Bélier	4	Disp.	Obsc.	7.38.15,2	+1. 7,3	7.39.22,5	7.11.43,6
	29.	DM + 20° 492	8,2	Disp.	Obsc.	9.28.19,3	+1. 7,3	9.29.26,6	9. 1.29,7
(a)	29.	DM + 20° 495	9,4	Disp.	Obsc.	9.41.48,2	+1. 7,3	9.42.55,5	9.14.56,3
	29.	DM + 20° 496	7,7	Disp.	Obsc.	9.50.17,3	+1. 7,3	9.51.24,6	9.23.24,0
	30.	DM + 24° 598	8,0	Disp.	Obsc.	9.21.45,9	+1. 4,7	9.22.50,6	8.50.58,8
	30.	DM + 24° 603	9,0	Disp.	Obsc.	10. 2.19,9	+1. 4,7	10. 3.24,6	9.31.26,2
	30.	DM + 24° 602	8,3	Disp.	Obsc.	10. 3.31,3	+1. 4,7	10. 4.36,0	9.32.37,4
(b) AVR.	2.	DM + 27° 1306	9,3	Disp.	Obsc.	10.44.54,2	+0.57,0	10.45.51,2	10. 1.58,1
	2.	DM + 27° 1307	8,0	Disp.	Obsc.	10.54. 3,4	+0.57,0	10.55. 0,4	10.11. 5,8
	2.	DM + 27° 1314	9,5	Disp.	Obsc.	12.12.16,3	+0.57,0	12.13.13,3	11.29. 5,9
	2.	DM + 27° 1315	9,4	Disp.	Obsc.	12.18. 7,9	+0.57,0	12.19. 4,9	11.34.56,5
	4.	DM + 20° 2256	9,3	Disp.	Obsc.	9.16.50,2	+0.52,3	9.17.42,5	8.26.12,0
	4.	DM + 20° 2258	8,9	Disp.	Obsc.	9.36.16,4	+0.52,3	9.37. 8,7	8.45.35,0
(c)	4.	DM + 20° 2259	9,2	Disp.	Obsc.	10.17.30,5	+0.52,3	10.18.22,8	9.26.42,4
	4.	DM + 20° 2260	8,2	Disp.	Obsc.	10.20. 8,9	+0.52,3	10.21. 1,2	9.29.20,3
(d)	4.	DM + 20° 2262	9,5	Disp.	Obsc.	11.15.33,0	+0.52,3	11.16.25,3	10.24.35,3
	4.	DM + 19° 2153	8,0	Disp.	Obsc.	11.35.11,9	+0.52,3	11.36. 4,2	10.44.11,0
(e)	4.	DM + 20° 2264	9,5	Disp.	Obsc.	11.57.19,3	+0.52,3	11.58.11,6	11. 6.14,8
	6.	c Lion	5,6	Disp.	Obsc.	14.44.35,3	+0.47,6	14,45.22,9	13.45. 6,9
(f) MAI	4.	DM + 3° 2502	7,5	Disp.	Obsc.	10.43. 2,1	+0. 4,5	10.43. 6,6	7.53.24,8

Digitized by Google

Dates. 1895.		Étoiles.	Gr.	Phé-nomène.	Bord de la Lune.	T. observé à la pendule. h m s	Correct. de la pendule. m	Temps sid. de Nice m s	Temps moy. de Nice. h m s
Mai	4.	τ Lion	5,6	Disp.	Obsc.	11.24.15,3	+0. 4,5	11.24.19,8	8.34.31,3
	4.	DM + 3°2505	8,2	Disp.	Obsc.	11.26.42,5	+0. 4,5	11.26.47,0	8.36.58,1
	4.	DM + 3°2506	8,2	Disp.	Obsc.	11.43.36,4	+0. 4,5	11.43.40,9	8.53.49,2
(g)	4.	DM + 3°2507	9,3	Disp.	Obsc.	11.52.39,2	+0. 4,5	11.52.43,7	9. 2.50,5
	4.	DM + 3°2508	8,8	Disp.	Obsc.	12. 4.46,5	+0. 4,5	12. 4.51,0	9.14.55,9
(h)	14.	DM — 22°5520	9,2	Réap.	Obsc.	19.19.46,2	+0. 7,0	19.19.53,2	15.49.27,7
	17.	DM — 8°5997	9,3	Réap.	Obsc.	18.43.23,8	+0. 9,0	18.43.32,8	15. 1.25,5
Mai	28.	DM + 22°1947	9,3	Disp.	Obsc.	12.56.54,7	+0. 9,7	12.57. 4,4	8.32.38,8
	28.	DM + 22°1949	8,5	Disp.	Obsc.	13. 4.59,9	+0. 9,7	13. 5. 9,6	8.40.42,7
	28.	DM + 22°1952	8,8	Disp.	Obsc.	13.32.50,1	+0. 9,7	13.32.59,8	9. 8.28,3
	28.	DM + 21°1866	8,3	Disp.	Obsc.	14.10.33,0	+0. 9,7	14.10.42,7	9.46. 5,1
	28.	DM + 21°1868	9,0	Disp.	Obsc.	14.14.56,1	+0. 9,7	14.15. 5,8	9.50.27,4
	28.	DM + 21°1870	9,3	Disp.	Obsc.	14.24.23,6	+0. 9,7	14.24.33,3	9.59.53,4
	28.	DM + 21°1875	8,8	Disp.	Obsc.	15. 3.26,7	+0. 9,7	15. 3.36,4	10.38.50,1
(i)	29.	DM + 17°2097	8,8	Disp.	Obsc.	14.57.16,0	+0.10,5	14.57.26,5	10.28.45,3
(j) Juin	26.	DM + 12°2147	8,5	Disp.	Obsc.	15. 1.50,4	+0.25,7	15. 2.16,1	8.43.28,5
	26.	α Lion	1,2	Disp.	Obsc.	15. 7. 7,3	+0.25,7	15. 7.33,0	8.48.44,6
	28.	DM — 0°2501	9,0	Disp.	Obsc.	15.40.42,3	+0.28,1	15.41.10,4	9.14.24,7
	28.	DM — 0°2510	8,0	Disp.	Obsc.	16.46.24,5	+0.28,1	16.46.52,6	10.19.56,1
	29.	DM — 7°3465	9,3	Disp.	Obsc.	15. 9.24,8	+0.29,2	15. 9.54,0	8.39.17,5
	30.	DM — 13°3726	8,9	Disp.	Obsc.	15.55.59,2	+0.30,4	15.56.29,6	9.21.49,5
Juill.	1.	DM — 19°3874	8,5	Disp.	Obsc.	15.27.57,2	+0.31,4	15.28.28,6	8.49.57,2
	1.	DM — 18°3816	9,0	Disp.	Obsc.	16. 9.24,0	+0.31,4	16. 9.55,4	9.31.17,2
(k)	1.	DM — 18°3819	9,0	Disp.	Obsc.	16.31.30,7	+0.31,4	16.32. 2,1	9.53.20,3
	1.	DM — 19°3879	7,3	Disp.	Obsc.	16.40.47,0	+0.31,4	16.41.18,4	10. 2.35,1
(l)	3.	Cordoba Z. C. Hora 16, 545	7,5	Disp.	Obsc.	15.26.13,7	+0.33,9	15.26.47,6	8.40.24,7
(m)	9.	δ Capricorne	3	Disp.	Brill.	21.36.56,9	+0.42,5	21.37.39,4	14.26.40,2
	13.	DM + 4° 80	8,2	Réap.	Obsc.	21.16.25,6	+0.48,6	21.17.14,2	13.50.34,7
	13.	DM + 5° 81	9,0	Réap.	Obsc.	22.26.21,1	+0.48,6	22.27. 9,7	15. 0.18,8
	13.	DM + 5° 83	9,0	Réap.	Obsc.	22.37.46,0	+0.48,6	22.38.34,6	15.11.41,8
	13.	DM + 5° 85	9,0	Réap.	Obsc.	22.54.54,4	+0.48,6	22.55.43,0	15.28.47,4
	15.	DM + 15° 304	8,8	Réap.	Obsc.	21.34.16,2	+0.52,1	21.35. 8,3	14. 0.34,1
(n)	16.	47 Bélier	6	Disp.	Brill.	20.33.25,6	+0.54,1	20.34.19,7	12.55.59,5
	16.	47 Bélier	6	Réap.	Obsc.	21.15.30,4	+0.54,1	21.16.24,5	13.37.57,4
	16.	DM + 20° 488	9,0	Réap.	Obsc.	22.40.50,8	+0.54,1	22.41.44,9	15. 3. 3,9
	16.	DM + 20° 486	9,5	Réap.	Obsc.	22.44.10,8	+0.54,1	22.45. 4,9	15. 6.23,3
	26.	DM — 5°3500	8,5	Disp.	Obsc.	16.41.14,9	+1.13,8	16.42.28,7	8.25.27,4
	27.	DM — 11°3487	7,3	Disp.	Obsc.	17.13.24,7	+1.15,9	17.14.40,6	8.53.38,1
	29.	DM — 22°3897	7,5	Disp.	Obsc.	17.46.30,4	+1.20,5	17.47.50,9	9.18.51,2
(o)	29.	DM — 22°3901	8,0	Disp.	Obsc.	17.59.37,3	+1.20,5	18. 0.57,8	9.31.55,9
Aout	1.	Cordoba — 29°14292	7,3	Disp.	Obsc.	19.27.39,7	+1.28,4	19.29. 8,1	10.48. 4,0
(p)	1.	Cordoba — 29°14296	9,0	Disp.	Obsc.	19.41.42,4	+1.28,4	19.43.10,8	11. 2. 4,4
	1.	Cordoba — 29°14342	7,8	Disp.	Obsc.	20.50.48,0	+1.28,4	20.52.16,4	12.10.58,7
(q)	6.	42 Verseau	6	Disp.	Brill.	22. 6.20,6	+1.42,5	22. 8. 3,1	13. 6.53,4

Digitized by Google

Dates. 1895.		Étoiles.	Gr.	Phénomène.	Bord de la Lune.	T. observé à la pendule. h m s	Correct. de la pendule. m s	Temps sid. de Nice. h m s	Temps moy. de Nice. h m s
(r)	Aout 7.	81 Verseau	6,7	Disp.	Brill.	23.26.48,4	+1.45,3	23.28.33,7	14.23.14,9
	10.	DM + 8° 172	9,3	Réap.	Obsc.	22.49.35,1	—0.32,7	22.49. 2,4	13.32. 2,4
	10.	DM + 9° 132	6,5	Réap.	Obsc.	0.27. 7,8	—0.32,7	0.26.35,1	15. 9.19,1
	12.	DM + 19° 399	8,8	Réap.	Obsc.	23.25.10,5	—0.26,2	23.24.44,3	13.59.46,6
(s)	12.	DM + 19° 397	9,1	Réap.	Obsc.	23.26. 4,7	—0.26,2	23.25.38,5	14. 0.40,7
	12.	DM + 19° 400	8,8	Réap.	Obsc.	23.42.18,5	—0.26,2	23.41.52,3	14.16.51,8
	12.	μ Bélier	6	Réap.	Obsc.	0.33.35,7	—0.26,2	0.33. 9,5	15. 8. 0,6
	12.	DM + 19° 405	8,0	Réap.	Obsc.	1. 3.32,6	—0.26,2	1. 3. 6,4	15.37.52,6
	13.	DM + 23° 481	8,8	Réap.	Obsc.	0.52.10,3	—0.23,0	0.51.47,3	15.22.39,4
	14.	DM + 26° 722	9,0	Réap.	Obsc.	23.15.17,5	—0.20,2	23.14.57,3	13.42. 9,4
(t)	15.	DM + 27° 780	9,1	Réap.	Obsc.	23.20.36,5	—0.17,1	23.20.19,4	13.43.34,7
	15.	DM + 27° 783	7,3	Réap.	Obsc.	23.45.36,8	—0.17,1	23.45.19,7	14. 8.30,9
	15.	DM + 27° 789	9,0	Réap.	Obsc.	0.36.45,6	—0.17,1	0.36.28,5	14.59.31,3
(u)	15.	DM + 27° 790	9,5	Réap.	Obsc.	0.44.37,9	—0.17,1	0.44.20,8	15. 7.22,3
(v)	15.	DM + 27° 792	9,5	Réap.	Obsc.	0.54.48,8	—0.17,1	0.54.31,7	15.17.31,6
(x)	15.	DM + 27° 795	9,3	Réap.	Obsc.	1. 5.45,9	—0.17,1	1. 5.28,8	15.28.26,9
	16.	DM + 27° 1157	9,0	Réap.	Obsc.	0. 3.43,2	—0.14,0	0. 3.29,2	14.22.41,5
(y)	17.	DM + 25° 1741	9,4	Réap.	Obsc.	1.19. 3,7	—0.10,8	1.18.52,9	15.33.57,0
	17.	DM + 25° 1749	9,3	Réap.	Obsc.	1.46.30,5	—0.10,8	1.46.19,7	16. 1.19,3
(z)	27.	Cordoba — 28° 12282	9,3	Disp.	Obsc.	18.18.39,1	—0. 6,3	18.18.32,8	7.55.26,6
	27.	Cordoba — 28° 12293	8,5	Disp.	Obsc.	18.36.26,8	—0. 6,3	18.36.20,5	8.13.11,4
(a_1)	27.	Cordoba — 28° 12303	9,3	Disp.	Obsc.	18.47.55,1	—0. 6,3	18.47.48,8	8.24.37,8
(b_1)	27.	Cordoba — 28° 12329	8,1	Disp.	Obsc.	19.38.36,3	—0. 6,3	19.38.30,0	9.15.10,7
	28.	Cordoba — 29° 13829	7,5	Disp.	Obsc.	18.18.45,2	—0. 6,5	18.18.38,7	7.51.36,6
	28.	Cordoba — 29° 13832	8,6	Disp.	Obsc.	18.25.22,8	—0. 6,5	18.25.16,3	7.58.13,1
	28.	Cordoba — 29° 13853	8,5	Disp.	Obsc.	19.24.23,1	—0. 6,5	19.24.16,6	8.57. 3,7
	28.	Cordoba — 29° 13881	7,9	Disp.	Obsc.	20. 8.22,1	—0. 6,5	20. 8.15,6	9.40.55,5
	29.	Cordoba — 28° 14776	8,7	Disp.	Obsc.	19. 4.31,5	—0. 6,7	19. 4.24,8	8.33.19,3
	29.	Cordoba — 28° 14820	8,5	Disp.	Obsc.	20.47.24,3	—0. 6,7	20.47.17,6	10.15.55,2
	30.	6666 B.A.C.	6	Disp.	Obsc.	17.28.35,2	—0. 6,9	17.28.28,3	6.53.42,6
(c_1)	30.	Cordoba — 27° 14054	8,5	Disp.	Obsc.	19.48. 3,6	—0. 6,9	19.47.56,7	9.12.48,1
Sept.	3.	λ Verseau	3,4	Disp.	Obsc.	3.55. 8,4	—0. 7,6	3.55. 0,8	17. 2.48,8
(d_1)	6.	60 Poissons	6	Réap.	Obsc.	18.57.45,5	—0. 7,9	18.57.37,6	7.55. 5,9
(e_1)	6.	62 Poissons	6	Disp.	Brill.	19.16.34,3	—0. 7,9	19.16.26,4	8.13.51,7
	9.	DM + 22° 463	8,3	Réap.	Obsc.	0.34. 0,3	—0. 8,0	0.33.52,3	13.18.37,8
	9.	DM + 22° 467	9,4	Réap.	Obsc.	1. 0.27,0	—0. 8,0	1. 0.19,0	13.45. 0,2
	9.	DM + 22° 468	8,9	Réap.	Obsc.	1.13.21,3	—0. 8,0	1.13.13,3	13.57.52,4

Digitized by Google

Dates. 1895.		Étoiles.	Gr.	Phénomène.	Bord de la Lune.	T. observé à la pendule. h m s	Correct. de la pendule. m s	Temps sid. de Nice. h m s	Temps moy. de Nice. h m s
SEPT.	9.	DM + 22° 469	7,5	Réap.	Obsc.	1.28.26,6	—0. 8,0	1.28.18,6	14.12.55,2
	9.	DM + 22° 473	8,9	Réap.	Obsc.	3. 9. 1,8	—0. 8,0	3. 8.53,8	15.53.13,9
(f_1)	9.	Compag. de DM + 22° 475	9,4	Réap.	Obsc.	3.29.26,3	—0. 8,0	3.29.18,3	16.13.35,1
	9.	DM + 22° 475	8,0	Réap.	Obsc.	3.31.15,8	—0. 8,0	3.31. 7,8	16.15.24,3
(g_1)	10.	DM + 25° 681	8,4	Réap.	Obsc.	1.10.40,7	—0. 8,0	1.10.32,7	13.51.16,3
	10.	DM + 25° 682	8,5	Réap.	Obsc.	1.33.22,3	—0. 8,0	1.33.14,3	14.13.54,2
(h_1)	10.	DM + 25° 683	9,5	Réap.	Obsc.	2.24. 7,8	—0. 8,0	2.23.59,8	15. 4.31,4
	10.	DM + 25° 684	9,3	Réap.	Obsc.	2.31. 0,1	—0. 8,0	2.30.52,1	15.11.22,6
	10.	DM + 25° 685	7,6	Réap.	Obsc.	2.48.36,3	—0. 8,0	2.48.28,3	15.28.55,9
	11.	DM + 27° 734	7,3	Réap.	Obsc.	0.54.15,4	—0. 8,0	0.54. 7,4	13.30.57,8
	11.	DM + 27° 733	8,9	Réap.	Obsc.	1. 1.56,4	—0. 8,0	1. 1.48,4	13.38.37,5
	11.	DM + 27° 738	9,1	Réap.	Obsc.	2.28.37,3	—0. 8,0	2.28.29,3	15. 5. 4,2
	12.	DM + 28° 1033	9,3	Réap.	Obsc.	0.57.43,9	—0. 7,9	0.57.36,0	13.30.29,9
	12.	DM + 27° 1011	9,3	Réap.	Obsc.	1. 4.48,6	—0. 7,9	1. 4.40,7	13.37.33,5
(i_1)	12.	DM + 27° 1014	9,4	Réap.	Obsc.	1.30.57,7	—0. 7,9	1.30.49,8	14. 3.38,3
	12.	DM + 28° 1041	9,4	Réap.	Obsc.	1.51. 2,5	—0. 7,9	1.50.54,6	14.23.39,8
(j_1)	12.	DM + 28° 1043	9,5	Réap.	Obsc.	1.51.43,3	—0. 7,9	1.51.35,4	14.24.20,5
(k_1)	12.	DM + 27° 1020	9,5	Réap.	Obsc.	2. 5.25,0	—0. 7,9	2. 5.17,1	14.37.59,9
	12.	DM + 28° 1052	8,7	Réap.	Obsc.	2.41. 5,5	—0. 7,9	2.40.57,6	15.13.34,6
	12.	DM + 27° 1032	8,8	Réap.	Obsc.	2.51.52,6	—0. 7,9	2.51.44,7	15.24.19,9
	12.	DM + 28° 1055	9,3	Réap.	Obsc.	3. 3.15,1	—0. 7,9	3. 3. 7,2	15.35.40,6
	12.	DM + 28° 1058	7,8	Réap.	Obsc.	3.26.28,2	—0. 7,9	3.26.20,3	15.58.49,9
	12.	DM + 28° 1060	8,8	Réap.	Obsc.	3.27. 6,9	—0. 7,9	3.26.59,0	15.59.28,4
	12.	DM + 27° 1041	9,0	Réap.	Obsc.	3.45.25,5	—0. 7,9	3.45.17,6	16.17.44,0
	13.	DM + 26° 1493	9,3	Réap.	Obsc.	1.45.57,9	—0. 7,7	1.45.50,2	14.14.40,3
(l_1)	13.	DM + 26° 1502	9,1	Réap.	Obsc.	2.15.12,2	—0. 7,7	2.15. 4,5	14.43.49,8
(m_1)	13.	DM + 26° 1506	9,3	Réap.	Obsc.	2.31. 6,6	—0. 7,7	2.30.58,9	14.59.41,6
	13.	DM + 26° 1509	9,5	Réap.	Obsc.	2.47.39,0	—0. 7,7	2.47.31,3	15.16.11,3
	13.	DM + 26° 1510	7,5	Réap.	Obsc.	2.58.27,3	—0. 7,7	2.58.19,6	15.26.57,8
	13.	DM + 26° 1514	9,1	Réap.	Obsc.	3.10. 0,3	—0. 7,7	3. 9.52,6	15.38.28,9
	13.	DM + 26° 1512	7,6	Réap.	Obsc.	3.16.21,0	—0. 7,7	3.16.13,3	15.44.48,6
	14.	DM + 23° 1924	8,5	Réap.	Obsc.	2. 8.26,4	—0. 7,6	2. 8.18,8	14.33. 9,3
	14.	DM + 23° 1927	9,3	Réap.	Obsc.	2.27.49,8	—0. 7,6	2.27.42,2	14.52.29,5
	24.	Cordoba — 29° 13382	8,4	Disp.	Obsc.	19.15. 3,8	—0. 7,5	19.14.56,3	7. 1.35,5
	24.	Cordoba — 29° 13412	8,4	Disp.	Obsc.	19.49.44,1	—0. 7,5	19.49.36,6	7.36.10,1
	24.	Cordoba — 29° 13411	7,1	Disp.	Obsc.	19.52.18,3	—0. 7,5	19.52.10,8	7.38.43,9
	25.	Cordoba — 29° 14475	8,4	Disp.	Obsc.	19. 7.35,8	—0. 7,6	19. 7.28,2	6.50.12,7
(n_1)	25.	Cordoba — 29° 14794	9,3	Disp.	Obsc.	20. 3.43,5	—0. 7,6	20. 3.35,9	7.46.11,2
	25.	Cordoba — 29° 14804	8,4	Disp.	Obsc.	20.11.45,9	—0. 7,6	20.11.38,3	7.54.12,3
	25.	Cordoba — 29° 14813	8,9	Disp.	Obsc.	20.22.27,3	—0. 7,6	20.22.19,7	8. 4.51,9

Digitized by Google

Dates. 1895.	Étoiles.	Gr.	Phénomène.	Bord de la Lune.	T. observé à la pendule. h m s	Correct. de la pendule. m s	Temps sid. de Nice. h m s	Temps moy. de Nice. h m s
(o_1)Sep 25.	Cordoba — 29° 14821	9,3	Disp.	Obsc.	20.35.34,4	—0. 7,6	20.35.26,8	8.17.56,9
25.	Cordoba — 29° 14823	7,3	Disp.	Obsc.	20.38.31,6	—0. 7,6	20.38.24,0	8.20.53,6
26.	Cordoba — 27° 13728	9,0	Disp.	Obsc.	19.53.30,9	—0. 7,8	19.53.23,1	7.32. 4,1
26.	Cordoba — 27° 13779	9,3	Disp.	Obsc.	21. 9.45,2	—0. 7,8	21. 9.37,4	8.48. 6,0
26.	Cordoba — 27° 13791	9,1	Disp.	Obsc.	21.27.46,6	—0. 7,8	21.27.38,8	9. 6. 4,4
28.	DM — 20° 6102	8,5	Disp.	Obsc.	23.23.25,0	—0. 8,6	23.23.16,4	10.53.31,2
29.	δ Capricorne	3	Disp.	Obsc.	21 57. 6,3	—0. 9,1	21.56.57,2	9.23.30,3
Oct. 10.	DM + 27° 1280	9,0	Réap.	Obsc.	4.15. 1,0	—0.10,1	4.14.50,9	14.57. 7,1
10.	DM + 27° 1287	9,4	Réap.	Obsc.	5.15.16,1	—0.10,1	5.15. 6,0	15.57.12,3
10.	DM + 27° 1292	7,8	Réap.	Obsc.	5.41.48,6	—0.10,1	5.41.38,5	16.23.40,5
11.	DM + 24° 1802	8,2	Réap.	Obsc.	3.13.17,2	—0.11,9	3.13. 5,3	13.51.35,7
11.	DM + 24° 1803	8,9	Réap.	Obsc.	3.20.27,1	—0.11,9	3.20.15,2	13.58.44,4
11.	DM + 24° 1804	8,6	Réap.	Obsc.	3.21.49,2	—0.11,9	3.21.37,3	14. 0. 6,3
11.	DM + 24° 1811	8,7	Réap.	Obsc.	3.50.43,4	—0 11,9	3.50.31,5	14.28.55,8
(p_1) 11.	DM + 24° 1810	9,5	Réap.	Obsc.	4. 2.12,3	—0.11,9	4. 2. 0,4	14.40.22,8
(q_1) 11.	DM + 24° 1816	9,0	Réap.	Obsc.	4.54.28,7	—0.11,9	4.54.16,8	15.32.30,6
11.	DM + 24° 1815	9,0	Réap.	Obsc.	4.58.29,7	—0.11,9	4.58.17,8	15.36.31,0
(r_1) 14.	DM + 8° 2414	9,1	Réap.	Obsc.	5.30.51,0	—0.11,8	5.30.39,2	15.56.59,3
(s_1) 14.	DM + 8° 2416	9,0	Réap.	Obsc.	5.32. 6,2	—0.11,8	5.31.54,4	15.58.14,3

REMARQUES SUR L'INCERTITUDE DES OBSERVATIONS.

Les erreurs sont, en valeur absolue, inférieures aux nombres donnés.

Le signe + est relatif à une observation faite trop tôt et le signe — à une observation faite trop tard.

Le double signe ± se rapporte à une observation dont on ne connaît pas le sens de l'incertitude.

	s		s		s		s
(*a*)	± 0,4	(*n*)	— 0,5	(a_1)	— 0,2	(n_1)	— 0,4
(*b*)	— 0,3	(*o*)	— 0,5	(b_1)	— 0,5	(o_1)	± 0,5
(*c*)	— 0,3	(*p*)	— 0,3	(c_1)	— 0,4	(p_1)	± 0,3
(*d*)	— 0,4	(*q*)	± 1,0	(d_1)	— 0,2	(q_1)	— 0,2
(*e*)	— 0,3	(*r*)	± 0,5	(e_1)	— 0,3	(r_1)	— 0,8
(*f*)	— 0,2	(*s*)	— 0,5	(f_1)	— 0,4	(s_1)	— 0,3
(*g*)	— 0,2	(*t*)	— 0,4	(g_1)	± 0,3		
(*h*)	— 0,2	(*u*)	— 0,3	(h_1)	— 0,3		
(*i*)	— 0,2	(*v*)	— 0,3	(i_1)	— 0,2		
(*j*)	— 0,3	(*x*)	— 0,5	(j_1)	— 0,2		
(*k*)	— 0,5	(*y*)	— 0,3	(k_1)	— 0,4		
(*l*)	— 0,4	(*z*)	— 0,5	(l_1)	— 0,5		
(*m*)	— 0,2			(m_1)	— 0,3		

Les observations ont été faites avec un grossissement de 140 fois.

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

MÉDAILLE D'OR DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ASTRONOMIQUE, DÉCERNÉE A M. W.-F. DENNING.

Cette haute distinction a été accordée à M. Denning pour ses découvertes de comètes (au nombre de cinq, dont deux périodiques), pour ses observations des surfaces des planètes et surtout pour ses recherches sur les météores. Nous reproduisons ci-dessous quelques passages de l'allocution du Président, Sir Robert Ball.

Les Notes sur les météores lumineux, communiquées à la Société Royale astronomique par M. Denning, et imprimées dans les *Monthly Notices*, sont au nombre de quarante-deux. Beaucoup de ces Mémoires contiennent d'importantes listes de radiants déduits soit des propres observations de M. Denning, à Bristol, soit de ses observations combinées avec celles d'autres astronomes.

La première liste de radiants a été publiée par M. Denning en 1876. Elle contient la détermination de 27 points radiants déduits de ses observations concernant environ 900 trajectoires météoriques de 1871 à 1876. Dans cette première liste, les périodes d'activité des essaims sont parfois précisées par l'indication des jours; mais d'ordinaire le mois est seulement donné. La liste contient des déterminations soignées des points radiants des principaux essaims annuels, comme les Quadrantides en 1873, les Lyrides en 1873 et 1874, les Perséides en 1871 et 1874, les Orionides en 1874, et les Andromédides en 1872. Il est intéressant de noter que les essaims se trouvèrent correspondre tous sauf quatre avec le premier Catalogue général d'étoiles filantes, dû à M. Greg. Ce Catalogue et une liste analogue du Dr Heis font partie des *Reports* de l'Association britannique pour l'année 1874. Les quatre radiants non confirmés par M. Denning étaient d'ailleurs notés douteux par M. Greg.

La dernière liste de radiants publiée par M. Denning date de 1890. Elle renferme 918 points radiants déduits des observations de près de 10000 météores, observés à Bristol de 1873 à 1889. Cette liste, il faut le remarquer, renferme des observations répétées des mêmes radiants : non seulement en ce qui concerne les essaims principaux, mais aussi divers essaims secondaires, dont l'époque ne peut être assignée avec certitude dans l'état actuel de nos connaissances. Le Catalogue a pour objet de représenter l'ensemble de ces déterminations individuelles.

Pour les neuf essaims annuels principaux, un Mémoire, publié en 1887, en donne les positions moyennes, pour 1880, déduites de quinze années d'observations.

Digitized by Google

Les contributions les plus importantes de M. Denning à l'Astronomie météorique en général concernent la longue durée de certains radiants. Le fait de la persistance prolongée de certains points radiants, et de la condensation vers ces points de groupes ou de familles compactes de courants météoriques simultanés ou successifs, est aussi ancien que les premiers essais de Heis sur les essaims de météores. Mais c'est cependant aux recherches persévérantes de M. Denning que nous devons nos connaissances sur ce sujet. Dans son important travail du mois de décembre 1884, M. Denning écrivait :

« Le fait de radiants stationnaires offrant une activité visible pendant plusieurs mois est un phénomène si inexplicable et si manifestement opposé aux théories adoptées sur les orbites des étoiles filantes, qu'il doit être soumis au contrôle le plus rigoureux avant de pouvoir être accepté. »

Les travaux persévérants de M. Denning sur ce sujet important ont démontré l'existence de ces radiants vivaces. Les difficultés théoriques qu'ils font naître ne sont pas encore écartées; mais nous pouvons difficilement refuser notre assentiment à ces paroles de M. Denning : « On doit reconnaître qu'un fait d'observation bien établi, quelque difficulté qu'on éprouve à le faire cadrer avec les théories connues, ne doit pas être mis de côté par ce motif. »

En ce qui concerne les Perséides, M. Denning a trouvé des météores de ce groupe pendant 26 nuits du 25 juillet au 19 août, et leur radiant avance dans cet intervalle de près de 40°. Dans l'un des Tableaux, qui donnent tant d'intérêt aux Mémoires de M. Denning, on trouve une courbe du nombre des Perséides allant de 1 pour le 25 juillet au maximum 57, le 10 août, et déclinant ensuite jusqu'à 1, le 19 août. Dans son Mémoire de 1890, M. Denning montre que l'étendue du courant des Perséides est encore plus grande.

Le fait encore plus extraordinaire est que certains essaims sont actifs pendant des semaines et des mois sans que la position du radiant change d'une manière appréciable. M. Denning a cité comme types, dans son Mémoire de 1884, plusieurs essaims, en particulier les α-β Perséides, qui offrent une radiation constante du 6 juillet au 30 novembre. Le Mémoire dont il s'agit doit être regardé comme classique pour tous ceux qui s'occupent d'Astronomie météorique. Il est plein de faits intéressants et de suggestions.

Dans l'Introduction de son grand Catalogue de 1890, M. Denning a décrit ses méthodes de travail. L'année passée, dans l'*Observatory*, M. Denning a publié une monographie excellente sur le grand essaim des Léonides dont le maximum est attendu prochainement.

O. C.

Digitized by Google

HALL (A.). — Sur les vitesses des étoiles [1].

Dans la circulaire n° 21 de l'observatoire d'Harvard, le Professeur Pickering donne pour les vitesses orbitales de μ^1 Scorpion, reconnue comme double par le Professeur Baily et de *Cord. G. C.* 10534, découverte par lui-même, les nombres respectifs de 460^{km} et 610^{km} par seconde. Il est intéressant de comparer ces résultats avec ce qui existe dans notre système solaire, et avec les mouvements des étoiles qui ont des mouvements propres considérables.

La formule pour la vitesse, dans le cas de la loi de Newton, est

$$V^2 = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right); \tag{1}$$

elle donne, pour les vitesses moyennes de Mercure, de la Terre et de Neptune : 48^{km}, 30^{km} et 5^{km}; et pour les vitesses au périhélie des grandes comètes de 1843, 1880 et 1882 : 565^{km}, 544^{km} et 475^{km}. Ces vitesses sont comparables à celles des étoiles indiquées ci-dessus, mais elles ne se maintiennent que pendant un court espace de temps. Ces comètes ont passé à peu de distance de la surface du Soleil, mais les mouvements ont été conformes à la loi de gravitation. Dans quelques cas le noyau de la comète a été brisé en plusieurs morceaux, probablement par l'action du Soleil, et cela est arrivé avec quelques autres comètes. Les grandes vitesses stellaires dans le mouvement orbital indiqueraient une distance relativement petite pour les deux composantes et peut-être aussi la prépondérance de la masse du système. Il ne paraît pas y avoir défaut de stabilité dans de telles orbites.

La découverte par Kapteyn d'une étoile avec un mouvement propre de $8'',7$, supérieur à celui de 1830 Groombridge, appelle l'attention sur ces vitesses. Dans ce cas on n'a pas observé de mouvement s'écartant du mouvement rectiligne. La formule montre que, si un corps se meut dans une hyperbole ayant un grand axe relativement petit, la vitesse peut être grande. Ainsi pour $a = -0,1$, $r = 1$ et $f\mu = 9$, la vitesse est de 308^{km} et après un intervalle de temps infini la vitesse serait de 282^{km}. Bien que, avec de telles orbites, les étoiles doivent finalement disparaître, elles peuvent continuer à être à peu près de la même grandeur pendant longtemps. Si nous admettons une parallaxe de $0'',1$ pour l'étoile, et si nous supposons qu'elle s'éloigne du Soleil avec une vitesse de 322^{km}, la lumière de l'étoile dans un siècle diminuera dans le rapport de 1007 à 1000.

Dans les *Mémoires de Berlin* pour 1760, Euler a considéré le mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, problème que Lagrange

---

[1] Extrait de l'*Astronomical Journal*, n° 426. O. C.

Digitized by Google

et Legendre ont ensuite repris. Bien que ce problème ne paraisse pas avoir d'application immédiate dans la Mécanique céleste on peut croire que les conditions qu'il implique se trouvent, dans certains cas, à peu près réalisées.

L'intégrale des forces vives qui existe alors s'écrit

$$V^2 = \frac{2A}{r} + \frac{2B}{s} + \frac{2C}{a}; \tag{2}$$

A et B sont les masses des corps attirants A et B; a leur distance; r et s les distances du mobile aux centres d'attraction, C la constante d'intégration. La formule donne la possibilité d'obtenir, dans des circonstances plus variées que (1), de grandes valeurs pour la vitesse V.

La question si intéressante touchée par M. Hall nous remet en mémoire que Tisserand avait pensé à invoquer la même formule (2) à propos de l'origine des comètes : les vitesses hyperboliques, si les comètes étaient soumises à un autre centre d'attraction que le Soleil (ce qui toutefois ne paraît pas être le cas), n'impliqueraient pas nécessairement une origine extrasolaire. La même chose serait à dire des météores à orbite hyperbolique.

Gyldén, dans le Préambule du Tome I des *Annales de l'observatoire de Stockholm* (voir *Bulletin*, t. I, p. 341), expose l'objet que doit se proposer l'Astronomie sidérale de distribuer les étoiles en groupes ou en systèmes, suivant le terme usité en Mécanique. Il indique les motifs qu'on a de penser que des groupes d'étoiles mériteraient le nom de comètes de notre système d'étoiles.

CALENDRIER UNIVERSEL, D'APRÈS LES CALCULS AUTOGRAPHES ET LES MANUSCRITS DE FEU MICHEL-I. DUBARRÉ. (Le Caire, Georges Zaidan, 1896; 1054 pages in-8).

On sait quelle perte de temps fait éprouver l'identification de dates données suivant des computs différents, particulièrement en ce qui concerne les calendriers encore usités en Orient. Frappé de la longueur des calculs et des sources d'erreurs qu'ils peuvent entraîner, M. Dubarré ancien chef du Bureau de traduction au secrétariat du Ministère des Finances du Gouvernement égyptien, entreprit un travail d'ensemble de comparaison des divers calendriers employés en Égypte avec le calendrier grégorien. Ce n'est qu'après un labeur assidu de plus de dix années que M. Dubarré parvint à établir, sur des bases réellement simples, son *Calendrier universel*, que sa veuve offre au public, la mort ayant frappé l'auteur avant l'impression de l'Ouvrage.

Digitized by Google

Le *Calendrier universel* renferme, pour chacune des années, depuis l'an 1 jusqu'à l'an 5000 de notre ère, la comparaison entre eux des quatre calendriers grégorien, musulman, copte et israélite; il donne, en outre, de l'an 1 à l'an 2099, la concordance des calendriers grégorien et julien. Enfin le Volume se termine par deux calendriers perpétuels, donnés sous une forme nouvelle, l'un solaire et l'autre lunaire.

La disposition générale des Tableaux est simple et supprime les calculs auxiliaires nécessités par les méthodes généralement en usage. En effet, on trouve d'abord, dans l'*index*, la correspondance des années grégorienne, musulmane, copte et israélite, ainsi que des renvois, pour chaque calendrier, aux pages correspondantes. En se reportant à celles-ci, on trouve, pour chaque jour, à l'aide d'un ingénieux système de *clefs*, la concordance cherchée. Nul doute que, par suite de la simplicité de son emploi, l'Ouvrage de M. Dubarré ne soit d'un grand secours dans beaucoup de recherches chronologiques.

L'Auteur, mû par un sentiment d'uniformité, fait remonter l'origine du calendrier grégorien à l'an 1 de notre ère et il donne, à partir de cette même époque, les concordances relatives aux calendriers copte et musulman. Pour ces derniers, cette disposition ne présente que le léger inconvénient de grossir le Volume, le calendrier copte actuel ne commençant qu'avec l'*ère des Martyrs* (284 après J.-C.) et le calendrier musulman datant de l'*hégire* (623 après J.-C.).

Mais pour notre calendrier la disposition adoptée ne paraît pas pratique, puisque, jusqu'à la réforme grégorienne, toutes les dates européennes sont exprimées suivant le calendrier julien. On se trouve donc obligé, jusqu'en 1582, de transformer les dates juliennes en dates grégoriennes pour pouvoir faire usage du *Calendrier universel*. De là un surcroît de travail, qui se trouve diminué, il est vrai, par l'emploi de Tables de concordances données à la fin du Volume, et aussi l'introduction possible d'erreurs. Il eût été plus simple de rapporter les comparaisons au calendrier réellement en usage avant la réforme grégorienne, c'est-à-dire au calendrier julien.

Malgré ce léger défaut, compensé en partie par l'uniformité des Tableaux, l'Ouvrage de M. Dubarré, qui, dans son ensemble, renferme des données très variées et très utiles, est certainement appelé à rendre de très grands services. La suppression des calculs auxiliaires est un très réel avantage, le travail de comparaison se trouvant, par cela même, très notablement diminué. Nul doute que cet avantage ne soit vivement apprécié par tous ceux qui s'occupent de questions touchant à la Chronologie. R. D.

Digitized by Google

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

T. CXXIV, nos 9-26. (*Suite et fin.*)

Heen (*P. de*). — Photographie des radiations électriques du Soleil et l'atmosphère de cet astre (p. 459).

M. de Heen aurait reconnu que l'impression produite par l'électricité ou l'infra-électricité sur une plaque voilée pourrait, dans certaines circonstances, diminuer le voile, c'est-à-dire *dévoiler* la plaque. Guidé par cette considération, il a photographié le Soleil au moyen d'une plaque photographique très fortement voilée et il trouve que le pouvoir dévoilant du Soleil s'accentue du centre vers la périphérie : le bord est représenté par un anneau dévoilé. Il en résulterait que les radiations qui déterminent les phénomènes électriques émanent de l'atmosphère solaire; et on aurait par là un moyen de photographier l'atmosphère solaire en dehors des éclipses.

Bourgeois (*R.*). — Travaux exécutés par le Service géographique du Corps expéditionnaire de Madagascar, pendant la campagne de 1895 (p. 636).

Deslandres (*H.*). — Actions mutuelles des électrodes et des rayons cathodiques dans les gaz raréfiés. Propriété nouvelle des rayons cathodiques (p. 678, 945, 1297).

Baillaud (*B.*). — Sur les quadratures mécaniques (p. 737).

Hamy (*Maurice*). — Nouvelle lampe à cadmium pour la production des franges d'interférence, à grande différence de marche (p. 749).

Le Cadet (*G.*). — Sur la variation de l'état électrique des hautes régions de l'atmosphère, par beau temps (p. 761).

Entre les altitudes de 1680m et 2300m, la valeur du champ magnétique a été trouvée sensiblement constante, et ce champ était certainement plus faible que sur le sol inférieur, supposé plan.

Faye (*H.*). — Sur l'observatoire de l'Etna, d'après les observations de M. Riccò (p. 797).

Digitized by Google

Cet observatoire, situé à 2942^m d'altitude, est aujourd'hui muni d'un équatorial de $5^m,50$ de long et de divers instruments météorologiques. L'hiver, il est enterré sous 2^m et même 5^m de neige. La température moyenne de l'année est $+0^\circ,4$; les températures moyennes des quatre saisons (hiver, printemps, été, automne) sont respectivement $-6^\circ,6$, $-1^\circ,5$, $+7^\circ,3$, $+2^\circ,7$.

Les manifestations électriques sur l'Etna sont rares : le grand panache de fumée et de vapeur chaude du cratère central paraît agir comme un gigantesque paratonnerre.

Vénukoff. — Sur les attractions locales observées dans la Fergana (p. 815).

La vallée de la Fergana, située au nord du Pamir, présente des attractions locales remarquables : la différence entre les latitudes géodésiques et les latitudes astronomiques atteint jusqu'à 50".

Garrigou-Lagrange (*P.*). — L'action du Soleil et de la Lune sur l'atmosphère, et les anomalies de la pression (p. 914).

Faye. — Présentation du sixième Volume des *Annales de l'observatoire de Nice* (p. 935).

Outre des observations méridiennes, ce volume renferme les observations de nébuleuses nouvelles de M. Javelle et la thèse de M. Simonin sur l'étude des mouvements de la planète Hécube (voir *Bulletin*, XIV, p. 224).

Gonnessiat (*F.*). — Sur la loi des variations de latitude (p. 938).

Cette Note n'est qu'un court extrait d'un Mémoire sur lequel nous aurons, sans doute, l'occasion de revenir.

Lallemand (*Ch.*). — Sur la précision comparée de divers modes de repérage de la verticale dans les observations astronomiques, géodésiques ou topographiques (p. 941).

Résumé des expériences faites pour comparer l'emploi du niveau à la méthode qui détermine la direction de la verticale par le contact de trois points avec la surface libre d'un bain de mercure : ces expériences montrent que le niveau, dont l'emploi est plus commode, donne, en outre, des résultats plus précis.

Digitized by Google

Charpy (*Georges*). — Sur la constitution des alliages métalliques (p. 957).

Voir aussi p. 1094, 1234.

Angot (*Alfred*). — Sur la variation diurne de la direction du vent (p. 1020).

Dechevrens (le P. *M.*). — Le mouvement oscillatoire diurne de l'atmosphère (p. 1479).

Lœwy et *Puiseux*. — Sur l'Atlas photographique de la Lune publié par l'Observatoire de Paris (second fascicule) (p. 1055, 1187).

Voir *Bulletin*, XIV, p. 340.

Collet (*J.*). — Nouvelles déterminations de la pesanteur (p. 1088).

Déterminations faites à Saint-Pierre-le-Chastel, à Aurillac et à Turin. Dans chacune de ces stations, on a constaté un déficit dans la pesanteur.

Callandreau (*O.*). — Sur la désagrégation des comètes. Rôle de Jupiter à l'égard des comètes à courte période (p. 1193).

Voir *Bulletin*, XIV, p. 326.

Vénukoff (*Michel*). — Sur les résultats d'observations météorologiques faites en Mandchourie et dans les pays limitrophes (p. 1402).

Jaubert (*Joseph*). — Sur la variation de la température à la surface de sols de différentes natures (p. 1405).

Afin de déterminer la variation de la température à l'air libre au-dessus de différents sols, on a établi, dans le parc de Montsouris, de petites surfaces de 4^{mq}, analogues à celles qui forment les principales chaussées de Paris; et au-dessus de ces surfaces on a placé des thermomètres à maxima et à minima dont les réservoirs sont seulement à $0^{m},03$ au-dessus du sol.

Les observations faites pendant une année (1er mai 1896-30 avril 1897) montrent qu'en été la température est plus élevée sur les pavages en

Digitized by Google

bois et sur le sol bitumé que sur le gazon. En toute saison, c'est sur le pavage en grès que l'amplitude de la température est plus faible.

Simonin. — Sur le mouvement des périhélies de Mercure et de Mars et du nœud de Vénus (p. 1423).

M. Simonin montre qu'en admettant que le centre de gravité du Soleil diffère de son centre de figure, on explique les différences entre les valeurs observées et les valeurs théoriques des longitudes des périhélies ou des nœuds de certaines planètes sans introduire, pour les autres planètes, une perturbation périodique variable. Malheureusement l'hypothèse qui sert de base à cette explication est en contradiction avec tout ce que l'on sait de la constitution du Soleil.

Lumière (*Auguste* et *Louis*). — Application de la Photographie à la mesure des indices de réfraction (p. 1538).

Jaubert (*Joseph*). — *Teisserenc de Bort.* — Sur la trombe du 18 juin 1897 (p. 1480, 1483).

Comète Perrine (*f* 1896 = 1897 I). — Observations par Rayet.

Comète Perrine (*g* 1896 = 1896 VII). — Observations par Courty, Rambaud, Rayet, Rossard, Sy.

Comète périodique Brooks (1889 V = 1896 VI). — Observations par Picart.

Comète Giacobini (*d* 1896 = 1896 V). — Observations par Picart.

Comète Sperra-Brooks (*e* 1896 = 1896 IV). — Observations par Rayet.

G. B.

MONTHLY NOTICES, t. LVII.

(*Suite et fin.*)

L'Astronome Royal. — La lunette photographique Thompson à l'observatoire de Greenwich.

Présentation de photographies de la Lune obtenues avec l'instrument. Diverses remarques ont été faites par MM. Common et Taylor.

Digitized by Google

Swasey. — Remarques sur la grande lunette de l'observatoire Yerkes.

Le constructeur américain, M. Swasey, a donné, à la séance du 14 mai, quelques détails sur la grande lunette. Mentionnons que le micromètre a été construit suivant les idées de M. Burnham, en ajoutant toutefois à l'éclairage à l'huile, employé par M. Burnham, l'éclairage électrique.

Newall (*H.-F.*). — Sur quelques déterminations spectroscopiques de vitesses radiales à l'observatoire de Cambridge (p. 567-577).

Après une période d'essais qui a demandé dix-huit mois, M. Newall est à même de publier des résultats dont l'intérêt nous engage à en donner quelques-uns, rapprochés de ceux de MM. Vogel et Scheiner :

Étoiles.	Newall.	Vogel	Scheiner.
	km	km	km
α Taureau	+49,2	+47,6	+49,4
α Orion	+10,6	+15,6	+18,8
α Petit Chien	— 4,2	— 7,9	—10,5
β Gémeaux	— 0,7	+ 1,9	+ 0,4
γ Lion	—39,9	—36,5	—40,5

Comme spectre de comparaison, on s'est surtout servi du spectre du fer.

Des études détaillées de α Bouvier et de α Gémeaux (Castor) montrent également la haute valeur des mesures de M. Newall. Combinées avec les mesures de M. Belopolsky, celles de M. Newall compléteront la détermination du compagnon de Castor comme double spectroscopique.

See (*T.-J.-J.*). — Sur un nouveau couple avec une période de cinq ans et demi (β 883).

C'est la plus courte révolution qu'on connaisse aujourd'hui, κ Pégase et δ Petit Cheval ayant des révolutions de onze ans et demi.

A la séance du 14 mai, M. Lewis, de l'observatoire de Greenwich, auquel on doit de belles séries de mesures d'étoiles doubles, a fait ressortir l'importance et l'utilité des travaux du Dr See dans l'hémisphère austral encore peu exploré.

Tebbutt (*J.*). — Mesures d'étoiles doubles, en 1896.

Objets mesurés : *p* Éridan, Lacaille 2145, V Poupe, γ Poisson volant, γ Centaure, β Mouche, α Centaure, A Scorpion.

Naegamvala (*K.-D.*). — Présentation de photographies de nébuleuses.

Digitized by Google

A propos de cette présentation dans la séance du 11 juin, des remarques sont échangées entre le Dr Spitta et le Dr Common, président, sur l'usage de la formaline. Le Dr Common la considère comme une substance dangereuse.

Wadsworth (*F.-L.-O.*). — Effet de l'illumination générale du Ciel sur l'éclairement du champ au foyer d'une lunette.

L'Auteur part de ce principe, qu'il démontre, que l'intensité de l'éclairement dans le plan focal de la lunette, dû à la lumière du ciel, est simplement proportionnelle à l'aire de l'ouverture et entièrement indépendante de la longueur focale. Ce point, d'une importance capitale dans la Photographie astronomique, a été méconnu jusqu'ici; aussi l'Auteur s'est-il attaché à développer l'analyse des conditions les plus favorables pour la Photographie et la Spectroscopie céleste.

On trouvera le Mémoire détaillé de M. Wadsworth dans l'*Astronomical Journal*. Nous nous dispenserons donc de reproduire le présent résumé.

Wadsworth (*F.-L.-O.*). — Note sur la substitution aux fils d'araignée de fils de quartz argentés.

Il paraît désirable de suivre les indications de l'astrophysicien de l'observatoire Yerkes. Il recommande, pour étirer les fils, de suivre le procédé du professeur Boys (*Philosophical Magazine*, juin 1887) et, pour l'argenture, la méthode de Brashear (*Astrophysical Journal*, t. I, p. 252).

Outre leurs avantages déjà signalés, les fils de quartz assurent, suivant l'opinion de M. Burnham communiquée à l'Auteur, quand on s'en sert comme fils brillants, une illumination parfaite et uniforme. Pour obtenir le meilleur résultat, il suffirait de placer parallèlement au fil un miroir cylindrique, un peu en arrière du fil, du côté opposé à la source de lumière.

Rambaut (*A.-A.*). — Sur la réduction des photographies stellaires (p. 591-605).

M. Rambaut, qui s'occupe de la détermination photographique des parallaxes, considère surtout le cas où les mesures sont limitées à un espace de 1° carré. Alors beaucoup de petits termes, gênant la réduction dans les formules générales servant au rattachement des plaques, deviennent inutiles à considérer.

Digitized by Google

Turner (*H.-H.*). — Équation personnelle dans la mesure des plaques photographiques d'Oxford (p. 621-629).

La Note de M. Turner est importante en ce qu'elle montre que la précision obtenue avec son micromètre simplifié rentre dans les limites assignées par le Comité permanent au Congrès de 1896; l'erreur probable de la moyenne de deux mesures, en retournant la plaque de 180°, est de $\pm 0'',17$. Il y a naturellement une petite différence quand on change d'instrument de mesure, ou que l'opérateur n'est pas le même; mais elle est insignifiante. Insignifiante aussi est l'équation personnelle dépendant de la grandeur de l'étoile mesurée, de sorte que les plaques photographiques nous donnent le moyen (*voir* plus haut) d'assigner cette équation dans les observations de passages.

Downing (*A.-M.-W.*). — Prédiction de l'occultation de Cérès par la Lune, le 13 novembre 1897.

Swift (*L.*). — Catalogue de nébuleuses découvertes à l'observatoire Lowe, Echo Mountain, Californie.

En tout 55 objets appartenant presque tous au Ciel austral.

Gledhill (*J.*). — Notes sur les observations des planètes Vénus, Mars et Jupiter (p. 633-654).

Ces Notes extrêmement détaillées, surtout pour Jupiter, font suite à celles que M. Gledhill publie chaque année. Les observations ont été faites avec un objectif de 9 pouces, un triplet travaillé par M. T. Cooke et fils, d'York. Les images ont été trouvées excellentes, sans coloration aucune.

Les observations de comètes et de petites planètes n'ont pas été mentionnées.

O. C.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, n°s 3422-3432.

Deichmüller. — Sur une méthode nouvelle pour déterminer directement l'horizon vrai.

L'emploi du bain de mercure, qui permet d'associer à la visée directe la visée par réflexion, aussi bien que celui des collimateurs horizon-

Digitized by Google

taux, présente des inconvénients qui font que l'on revient toujours à la détermination directe du nadir ou du zénith, par des miroirs appropriés. On pourrait aussi déterminer, d'une manière analogue, la direction de l'horizon; il suffirait pour cela de faire usage d'un miroir vertical, fixé sur le flotteur que M. Deichmüller a décrit sous le nom de *miroir nadiral* (voir *Bull.*, t. XIV, p. 319). La coïncidence des fils avec leur image réfléchie fait reconnaître la direction de l'horizon, qui est perpendiculaire au plan du miroir. L'auteur explique les précautions nécessaires pour s'affranchir de toute erreur.

Deichmüller. — Méthode nouvelle pour déterminer l'erreur de collimation qui affecte les ascensions droites fondamentales.

La réduction des ascensions droites observées se fait toujours en supposant que l'inclinaison de l'axe optique, par rapport à l'axe de rotation, reste la même dans toutes les positions de la lunette, ce qui est loin d'être prouvé. Il peut y avoir une flexion latérale, qui atteindra son maximum quand la lunette sera dirigée vers le zénith. Pour l'étudier, on pourra faire usage du miroir zénithal (*Bull.*, t. XIV, p. 276), combiné avec des collimateurs horizontaux, ou, mieux encore, avec le miroir nadiral. On trouvera souvent que, dans la position nadirale de la lunette, cette flexion latérale est insensible, comme dans la position horizontale, de sorte que l'erreur de collimation est la même pour les deux positions. Il est probable qu'en tenant compte de la flexion latérale, on rendra plus concordantes les déterminations de l'inclinaison, obtenues par des procédés différents. On arrivera ainsi, peu à peu, à se rendre compte de beaucoup de divergences encore inexpliquées.

Anding (*E.*). — Démonstrations élémentaires de quelques théorèmes connus.

Les théorèmes dont s'occupe M. Anding sont les suivants : 1° les distances géocentriques d'un astre ne peuvent être déterminées par trois observations en supposant que les aires des triangles sont proportionnelles aux intervalles des temps; 2° théorème de Lambert sur la courbure de l'orbite; 3° théorème concernant la concavité de l'orbite héliocentrique de la Lune. Il en donne des démonstrations nouvelles et assez simples.

Stratonoff. — Les Léonides du 13 novembre 1896.

On n'a pu les observer, à Tachkent, que dans la soirée du 13.

Digitized by Google

Pickering (*E.-C.*). — Étoiles ayant des spectres particuliers.

La plupart des spectres dont cette liste contient l'indication ont été reconnus par Mme Fleming en continuant l'examen des clichés qui lui sont confiés.

Pickering. — Distribution des étoiles dans les amas.

Des dénombrements entrepris par M. Bailey sur une photographie des Pléiades montrent que les étoiles faibles sont moins nombreuses dans cette région que dans les régions voisines. D'autres clichés conduisent à une conclusion analogue : il semble que les étoiles faibles se fassent rares dans le voisinage des amas enveloppés de nébuleuses diffuses. S'agit-il de formations en retard, ou bien les étoiles sont-elles voilées par la nébulosité?

Wassilief (*A.*). — Orbite définitive de la comète 1895 III.

La comète a été découverte par M. Brooks, en novembre 1895. L'orbite trouvée par M. Wassilief ne diffère pas beaucoup de l'orbite parabolique, calculée par M. Berberich, et qu'il a prise pour point de départ.

Berberich. — Éléments provisoires de trois petites planètes.

Russell (*H.-C.*). — Mesures d'étoiles doubles, faites à Sydney en 1896 et au commencement de 1897.

Les mesures ont été faites par M. Sellors, avec le réfracteur de 11p,5. Il y a, dans le nombre, quelques couples nouveaux.

Riccò. — Sur la théorie des taches solaires de Wilson.

Les taches sont-elles des cavités, comme beaucoup d'astronomes l'admettent avec Wilson? Howlett, Sidgreaves, Edwin Frost sont d'un avis contraire. Les nombreux dessins faits par M. Riccò depuis onze ans sont, en somme, favorables à l'hypothèse de Wilson.

Kobold, Schorr, Stuyvaert, Tebbutt. — Observations de comètes, de petites planètes, d'occultations et d'éclipses, faites à Strasbourg, Hambourg, Bruxelles, Windsor (N. S. W.).

Lewitzky. — Observations d'une occultation des Pléiades; dé-

Digitized by Google

nombrements de taches solaires, effectués à l'observatoire Yourief (Dorpat).

Hisgen (*J.*). — Maxima et minima d'étoiles variables, observés en 1895 et 1896.

Observations faites au Georgetown College, par la méthode d'Argelander.

Gill (*D.*). — Nouvelles variables australes.

Beaucoup d'étoiles, dont M. Kapteyn a soupçonné la variabilité au cours de la discussion des clichés du Cap, ont été photographiées ou observées à nouveau, et dans certains cas la variabilité s'est trouvée confirmée. Les recherches de cette nature sont continuées par M. Innes.

Nyland. — Le maximum de Mira Ceti, constaté en janvier 1897 (avec un diagramme).

Wellmann (*V.*). — Sur les éclipses des satellites de Jupiter.

L'observation photométrique des éclipses des satellites a fait le sujet d'une thèse de M. Obrecht, en 1884; M. Wellmann a, lui aussi, publié des recherches sur cette matière, en s'appuyant sur la loi de Lambert (1887). Il y revient aujourd'hui, en partant d'une combinaison de cette loi et de l'hypothèse de l'éclairement uniforme des disques, adoptée par M. Obrecht (voir *Bull.*, t. I, p. 392 et t. III, p. 280). L'auteur développe les formules qui résolvent le problème et donne quelques indications sur le meilleur procédé d'observation.

Küstner. — Remarques relatives à certaines étoiles des Catalogues de Bonn (B. D.).

Il s'agit d'étoiles qui, d'après les observateurs de Vienne, manquent à l'appel. On a vérifié avec soin les notes des premiers observateurs.

Douglass. — Rotation de deux satellites de Jupiter (avec une planche).

M. A.-E. Douglass, astronome de l'observatoire Lowell (Flagstaff, Arizona), a fait de nombreux dessins du 3e satellite de Jupiter (Ganimède) avec le réfracteur de 24p au commencement de l'année 1897. Ces dessins paraissent indiquer un temps de rotation de 7j5h, qui coïn-

Digitized by Google

cide, à très peu près, avec le temps de révolution du satellite. Il est vrai qu'il est possible de les interpréter autrement et d'obtenir un temps de rotation beaucoup plus court; mais la première hypothèse paraît la plus plausible. M. Douglass a aussi trouvé pour le 4e satellite (Callisto) une durée de rotation de $16^{j}17^{h}$, qui coïncide également avec la révolution du satellite. Engelmann avait constaté cette coïncidence en 1871.

Guillaume (*J.*). — Observations du Soleil, faites à Lyon en 1896.

Dénombrements de taches et facules.

Lovett. — Observations d'Encelade, faites à l'observatoire L. Mc Cormick.

Gale (*W.-F.*). — Nouvelles étoiles doubles et nébuleuses annulaires, découvertes à Newcastle (N. S. W.).

Mort de M. E.-J. Stone.

M. Edward-James Stone, directeur de l'observatoire Radcliffe (Oxford), est mort le 9 mai 1897, après une courte maladie. Il était né à Londres, le 28 février 1831. De 1860 à 1870, il avait été astronome titulaire (*chief assistant*) à l'observatoire de Greenwich, puis de 1870 à 1879 directeur de l'observatoire du Cap, et depuis 1879 « Radcliffe Observer » à Oxford, où il remplaçait le Rév. R. Main. Il avait été aussi chargé de préparer les expéditions anglaises pour l'observation du passage de Vénus en 1882. On lui doit la publication de plusieurs Catalogues d'étoiles. Dans les dernières années de sa vie, il avait soutenu d'interminables discussions au sujet des effets d'un changement de l'unité de temps qui, suivant lui, avait eu lieu en 1864, par suite de l'adoption des Tables solaires de Le Verrier par les calculateurs du *Nautical Almanac*.

Lockyer (*J.-N.*). — Sur la constitution chimique des étoiles les plus chaudes.

Voir *Bull.*, t. XIV, p. 363.

Nyland. — Les Lyrides de 1897.

On les a vainement attendues pendant une semaine (12-18 avril).

Abetti. — Corrections de quelques éphémérides planétaires.

Digitized by Google

Brenner (*L.*). — Nouvelle division de l'anneau de Saturne.

Steinbrink (*G.*). — Sur la détermination de la latitude par les hauteurs de la Polaire.

L'auteur développe un système de formules dont l'application est facilitée par des Tables numériques qu'il a calculées.

Weinek (*L.*). — Sur les détails que peuvent révéler les photographies lunaires.

C'est une réponse aux remarques de M. W. Prinz, qui veut que la limite de définition des photographies lunaires soit représentée par les objets de $1^{km},6$ de diamètre. M. Weinek a pu reconnaître, sur un cliché de Paris, un cratère de 1^{km} de diamètre; MM. Lœwy et Puiseux adoptent, comme limite inférieure, $0'',5$, soit $0^{km},93$.

Schur (*W.*). — Étoiles de comparaison pour les grosses planètes.

Roberts (*Isaac*). — Nouvelles nébuleuses, découvertes par la Photographie.

Elles ont été relevées sur des clichés obtenus à Crowborough Hill, avec le réflecteur de 20^{po}. Quelques-unes sont de petites nébuleuses circulaires, à noyau stellaire : il y en a tant qu'il faut renoncer à les enregistrer.

Fontseré (*E.*). — Observations de Vénus (avec une planche).

MM. E. Fontseré et F. Novellas ont exécuté une série de dessins de la planète, en janvier, février et mars 1897, à l'observatoire de Barcelone, avec un réfracteur de $0^{m},11$. Ces dessins montrent que Vénus n'a pas tourné par rapport au Soleil depuis la première observation. Ils font soupçonner l'existence d'un atmosphère assez dense, et chargée de nuages blancs.

See (*T.-J.-J.*). — Nouvelles étoiles doubles du Ciel austral, découvertes à l'observatoire Lowell (Flagstaff).

Bruns (*H.*). — Sur la représentation de lois des erreurs.

Dans le Calcul des probabilités, on peut se trouver amené à repré-

Digitized by Google

senter par une formule d'interpolation une fonction de fréquence ou loi des erreurs $\varphi(x)$, continue ou discontinue, fondée sur des vues théoriques ou fournie par l'expérience. La loi de Gauss ne peut être acceptée que comme une sorte d'approximation provisoire. M. Bruns a cherché à résoudre les problèmes de ce genre par des développements qui pourront remplacer les séries trigonométriques et qui reposent sur les propriétés des fonctions telles que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{+x} \frac{dv}{v} \sin v,$$

ou bien

$$f(x, a) = f(xa) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{+x} \frac{dv}{v} \sin av,$$

qui s'annule pour $a = 0$ et devient égale à ± 1 pour $a \gtrless 0$, quand x est très grand. Cette Note, qui ne peut guère être résumée ici, est comme la préface d'un Mémoire plus étendu que l'auteur se propose de publier prochainement.

Helmert. — Influence de l'élasticité des pendules sur les déterminations de la gravité absolue.

Les recherches de M. Helmert ont été motivées par l'écart considérable des longueurs du pendule à secondes, obtenues avec un pendule raide et un pendule trop flexible, qui avait donné un nombre trop fort d'environ $0^{mm},4$. La théorie de l'élasticité permet de rendre compte des écarts observés et d'expliquer ainsi les divergences de certains résultats. M. Helmert a aussi traité le cas d'un pendule qui n'est flexible qu'en un seul point de sa longueur, et il a montré d'où vient le désaccord des formules théoriques de Peirce et de Lorenzoni, qui se sont occupés du même problème.

Battermann. — Sur l'usage des facteurs de projection dans l'investigation des erreurs systématiques des mesures de distances héliométriques.

M. Battermann revient encore une fois sur les remarques qu'il a cru devoir faire touchant l'incertitude des facteurs de projection, qui se déduisent d'observations méridiennes. Il préférerait les éviter, en comparant directement la somme des distances héliométriques à la somme des distances déduites des observations méridiennes; on arriverait ainsi au même résultat par un chemin plus court.

Digitized by Google

Battermann. — Sur un moyen d'empêcher les erreurs de signe dans le calcul des éclipses et des occultations.

Il s'agit d'une équation de contrôle, dont l'emploi ferait éviter certaines erreurs de signe, souvent commises.

Auwers. — Catalogue fondamental pour les observations de zones australes. Catalogue de circompolaires australes.

Les 480 fondamentales australes, dont M. Auwers avait publié les positions provisoires en 1887, ont été depuis lors observées avec soin au Cap et à Cordoba, de sorte qu'il est devenu possible d'en donner aujourd'hui un Catalogue presque définitif, qui ne laisse plus à désirer que sous le rapport des mouvements propres; on les connaîtra mieux dans vingt ans. Le Catalogue comprend maintenant 499 étoiles, par suite de l'adjonction des étoiles les plus brillantes, omises à dessein dans le Catalogue précédent, où ne devaient figurer que des étoiles de repère. Il s'étend de — 20° à — 82°,6, et il est suivi d'un Catalogue de 24 circompolaires australes, fondé principalement sur les observations de M. Gill. On rencontre, dans le nouveau Catalogue, une cinquantaine d'étoiles qui sont déjà contenues dans les Catalogues bien connus, antérieurement publiés par M. Auwers, et il resterait à unifier les positions attribuées à ces astres par ces déterminations successives, qui ne concordent pas toujours, étant fondées sur des matériaux différents. En dehors des nombreux Catalogues dont l'ensemble a servi à établir le système moyen que représente le Catalogue austral de M. Auwers, et dont il a déjà été question ici à propos des Tables de réduction publiées dans les *Astronomische Nachrichten* (voir *Bull.*, t. XIV, p. 411), on a encore comparé à ce système un certain nombre de Catalogues anciens ou récents où figurent au moins quelques-unes des étoiles qu'il contient. M. Auwers explique longuement de quelle manière ce système moyen a été formé par des approximations successives, en s'appuyant sur les meilleurs Catalogues disponibles, et comment il a été possible d'obtenir les mouvements propres avec quelque certitude; il indique aussi les écarts moyens qui subsistent pour les divers Catalogues employés. Toutes les positions sont rapportées à l'époque 1900.

R. R.

Digitized by Google

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

BERLIN. — *Veröffentlichungen des K. Astronomischen Rechen-Institut zu Berlin*, ... herausgegeben von J. Bauschinger, n° 6. Berlin, 1898.

BRUXELLES. — *Académie R. de Belgique.*

— Mémoires couronnés et des Savants étrangers. Vol. 54. 1 vol. in-4.

— Mémoires couronnés et autres Mémoires. Tomes 48, 49, 50, 53, 54. 5 vol. in-8.

— Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 1898. Bruxelles, 1898.

— Annuaire de l'observatoire royal de Belgique, 1898 (65e année). Bruxelles, 1898.

— Annales de l'observatoire royal de Bruxelles. Nouv. série, Tome VII. Bruxelles, 1896.

CANADA. — *Royal Society of Canada.* Proceedings and Transactions, second series. Vol. II. Meeting of mai 1896, 1896.

GREENWICH. — *Astronomical and magnetical and meteorological Observations,* 1894. 1 vol., 1897.

— *Spectroscopic and photographic Results* 1894. 1 vol., 1897.

HARTWIG (E.). — *Ephemeriden veränderlicher Sterne* für 1898.

HARVARD COLLEGE. — *Fifty-second Annual Report* of the Director of the Astronomical Observatory of Harvard College for the year ending september 30, 1897. Cambridge, Mass., 1897.

IVANOV (A.). — Déclinaisons moyennes de 338 étoiles pour l'époque 1892,0.

MELBOURNE. — *Thirty-first Report* of the Board of Visitors to the Observatory together with the Report of the Government Astronomer for the period 1 july 1896-30 june 1897.

MOUCHEZ (E.-A.-B.). — *Hydrographia pratica.* Traduction par J.-J. Pinheiro de Vasconcellos. Rio de Janeiro, 1897.

NEW-YORK. — *Annals of the New-York Academy of Sciences.* Vol. IX. August 1897, nos 6-12.

NIJLAND (A.-A.). — *Uitmeting van den Sterrenhoop* G. C. 4410. Utrecht, 1897.

NYRÉN (M.). — *Déclinaisons moyennes de* 135 *étoiles circompolaires,* pour l'époque 1895,0.

PARIS. — *Annuaire statistique de la Ville de Paris.* 16e année, 1895. 1 vol. Paris, 1897.

PICKERING (E.-C.). — *Spectra of bright southern stars.* Chicago, 1897.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR L'ÉQUATION DE GYLDÉN-LINDSTEDT GÉNÉRALISÉE;

PAR L. PICART.

L'équation que nous envisagerons est la suivante

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x + x\varphi(t) = 0, \tag{1}$$

où l'on a

$$\varphi(t) = q_1 \cos 2t + q_2 \cos 4t + \ldots + q_n \cos 2nt,$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant des constantes très petites.

Lorsque n est égal à 1, cette équation se réduit à l'équation de Gyldén-Lindstedt. On sait que Tisserand a montré (*Bull. Astr.*, t. IX) qu'il y a stabilité dans cette dernière équation lorsque le nombre q (que l'on peut toujours supposer *positif, ce que nous ferons désormais*) est différent de 1 ou 2.

C'est le même problème que nous nous proposons de résoudre dans l'équation plus générale (1).

Rappelons d'abord brièvement en quoi consiste cette question de stabilité :

D'après la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, la solution générale de l'équation (1) peut s'écrire

$$x = \mathrm{A}e^{h\sqrt{-1}}f(t) + \mathrm{B}e^{-h\sqrt{-1}}f_1(t), \tag{2}$$

h étant une constante, $f(t)$ et $f_1(t)$ deux fonctions périodiques de période π, et A et B deux constantes arbitraires.

$h\sqrt{-1}$ et $-h\sqrt{-1}$ sont les exposants caractéristiques de l'équation.

On dit qu'il y a *stabilité* lorsque h est réel, la valeur de l'expression (2) restant alors finie quel que soit t.

Pour calculer h, on considère la solution paire $\mathrm{F}(t)$ de l'équation (1) qui se réduit à l'unité pour $t = 0$. Cette solution peut s'écrire

$$\mathrm{F}(t) = \Sigma \mathrm{A}_m \cos(h + 2m)t,$$

Digitized by Google

m étant un entier qui prend toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$.

On en déduit facilement que l'on a

$$F(\pi) = \cos h\pi.$$

Il faut alors calculer $F(\pi)$. Pour cela, on suppose la fonction $F(t)$ développée suivant les puissances de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. On sait, d'après un théorème de M. Poincaré, que ce développement est possible, F étant une fonction entière de ces dernières quantités. On aura alors

$$F(t) = F_0(t) + F_1(t) + \ldots + F_p(t) + \ldots,$$

F_p désignant l'ensemble des termes de degré p par rapport aux q_i. Pour déterminer les F, on aura les équations

$$(3) \qquad \frac{d^2 F_0}{dt^2} + q^2 F_0 = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{d^2 F_p}{dt^2} + q^2 F_p + F_{p-1}\varphi = 0.$$

Étant donné que F_0 doit se réduire à 1, et les autres fonctions F_p à zéro pour $t = 0$, que toutes ces fonctions doivent être paires, on aura

$$F_0 = \cos qt.$$

$$(5) \qquad F_p = \frac{1}{q}\int_0^t F_{p-1}\varphi \sin q(t - \bar{t})\, dt.$$

Dans cette formule (5), on doit, pour effectuer l'intégration, considérer la quantité t comme une constante; une fois l'intégration effectuée, on doit faire $\bar{t} = t$.

Le calcul des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, ou plutôt des termes de ces fonctions qui contiennent le temps t en dehors des signes sin et cos est, comme nous le verrons, seul nécessaire pour l'objet que nous poursuivons. Ce calcul peut s'effectuer assez simplement à l'aide de la formule (5) dans les deux premiers des trois cas suivants, que la suite des opérations conduit à distinguer.

PREMIER CAS.

q n'est pas égal à l'un des nombres de la suite

$$(s) \qquad 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ \ldots 2n.$$

Digitized by Google

On peut écrire

$$\varphi(t)\sin q(t-\bar{t})$$
$$=\sum\frac{q_i}{2}\sin[(q+2i)t-q\bar{t}] \qquad (i=-n,\,-n+1,\,\ldots-1,\,1,\,2\ldots n),$$

en supposant que l'on a $q_{-i}=q_i$. Les signes Σ que nous emploierons auront, sauf indication contraire, même sens que celui-ci.

On a ensuite

$$\varphi\sin q(t-\bar{t})\cos qt=\sum\frac{q_i}{4}\left\{\sin[(2q+2i)t-q\bar{t}]+\sin(2it-q\bar{t})\right\}.$$

Sous l'hypothèse faite, aucun des coefficients de t dans les arguments du second membre ne s'annulera; F_1 sera une fonction périodique de t, et l'on aura

$$(6)\qquad F_1=\frac{1}{q}\int_0^t\varphi\sin q(t-\bar{t})\cos qt\,dt=\sum\frac{q_i}{8}\,\frac{\cos(q+2i)t-\cos qt}{i(q+i)}.$$

Pour calculer F_2, nous partirons de la formule

$$(7)\left\{\begin{aligned}&\varphi\sin q(t-\bar{t})\cos mt\\&\quad=\sum\frac{q_i}{4}\left\{\sin[(q+m+2i)t-q\bar{t}]+\sin[(q-m+2i)t-q\bar{t}]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Nous devons, d'après l'expression (6) de F_1, prendre $m=q$ ou $m=q+2j$, j étant un entier positif ou négatif dont la valeur absolue est au plus égale à n. Le calcul fait pour trouver F_1 nous montre déjà que le terme $\cos qt$ n'introduira pas dans F_2 de termes contenant le temps en dehors des signes sin et cos. Si l'on fait $m=q+2j$, les coefficients de t dans les arguments du second membre de (7) sont

$$q+2i+2j,\quad 2i-2j.$$

Le premier de ces coefficients ne s'annule pas lorsque q est différent des nombres de la suite (s).

Le second s'annule pour $i=j$. A chaque terme de F_1, autre que $\cos qt$, correspondra donc un terme non périodique de F_2 et un seul. Tous ces termes seront de la forme $\alpha t\sin qt$, et on pourra les grouper.

Si l'on remarque d'autre part que l'on a, m étant différent de

Digitized by Google

zéro

$$\int_0^t \sin(mt - q\bar{t})\,dt = -\frac{1}{m}[\cos(m-q)t - \cos qt],$$

on voit qu'on aura finalement

$$F_2 = \Phi - At\sin qt,$$

où l'on a posé

$$A = \frac{1}{32q}\sum \frac{q_i^2}{i(q+i)}$$

et où Φ désigne une somme de termes de la forme

$$A_m(\cos mt - \cos qt),$$

dans laquelle l'indice m reçoit toutes les valeurs $q + 2i + 2j$ et $q + 2i$ qui ne sont pas nulles.

On remarquera que cette fonction Φ, qui s'annule pour $t = 0$, s'annule aussi pour $t = \pi$.

Si l'on passe maintenant au calcul de F_3, on voit d'abord que la substitution de Φ à la place de F_{p-1} dans la formule (5) conduira à une somme de termes analogues à ceux de Φ, augmentée d'un terme en $t\sin qt$.

Substituons maintenant $t\sin qt$. On a

$$t\varphi\sin q(t-t)\sin qt = t\sum \frac{q_i}{4}\left\{\cos(2it - q\bar{t}) - \cos[(2q+2i)t - q\bar{t}]\right\}.$$

Aucun des coefficients de t dans les arguments du second membre ne s'annule, et l'on trouve

$$\frac{1}{q}\int_0^t t\varphi\sin q(t-t)\sin qt\,dt = t\sum \frac{q_i}{8}\,\frac{\sin(q+2i)t}{i(q+i)} + \Phi'.$$

Nous aurons donc

$$(9)\qquad F_3 = \Phi_1 + \alpha t\sin qt - At\sum \frac{q_i}{8}\,\frac{\sin(q+2i)t}{i(q+2i)},$$

Φ_1 étant une somme analogue à Φ, et α une constante.

Calculons enfin F_4. Nous connaissons déjà la nature des termes de cette fonction qui proviennent de la substitution dans (5), à la place de F_{p-1}, de Φ_1 et de $At\sin qt$. Si ensuite, dans la formule

$$(10)\left\{\begin{aligned} &t\varphi\sin q(t-\bar{t})\sin mt \\ &= t\sum \frac{q_i}{4}\left\{\cos[(q+2i-m)t - q\bar{t}] - \cos[(q+2i+m)t - q\bar{t}]\right\},\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

on fait $m = q + 2j$, on voit qu'à chaque valeur de j, différente de zéro, correspondra dans le second membre de cette formule un terme, et un seul, de la forme $t \cos q\bar{t}$.

Il résulte de là que F_4 se compose d'une somme de termes analogues à ceux de F_4 et d'un terme en $t^2 \cos qt$ qui aura pour coefficient

$$-\frac{1}{2q} A \sum \frac{q_i^2}{32i(q+i)} = -\frac{A^2}{2}.$$

Ceci posé, on aura (¹)

$$(11) \qquad F(\pi) = \cos q\pi \left(1 - \frac{\pi^2}{2} A^2 + \ldots\right) + \sin q\pi(-A\pi + \ldots),$$

les termes non écrits dans la première et la seconde parenthèses étant, par rapport aux q_i, d'ordres supérieurs à 4 et 2 respectivement.

On en conclut facilement que la valeur absolue de $F(\pi)$ est inférieure à l'unité lorsque les quantités q_i sont assez petites.

Lorsqu'en effet q n'est pas un nombre entier, $F(\pi)$ se réduit à $\cos q\pi$ pour

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0;$$

sa valeur absolue est alors inférieure à l'unité; comme, d'autre part, $F(\pi)$ est une fonction entière des q_i, il en sera de même pour les petites valeurs de ces quantités.

Quand au contraire q est un entier positif [différent de la suite (s)], on a

$$F(\pi) = (-1)^q \left(1 - \frac{\pi^2}{2} A^2 + \ldots\right).$$

Le coefficient A^2 étant positif, la valeur absolue de $F(\pi)$ sera, pour les valeurs des q_i assez petites, inférieure à l'unité.

A est d'ailleurs une quantité négative, qui ne peut s'annuler lorsque q est un entier différent de la suite (s). En réunissant les termes correspondant aux valeurs i et $-i$ de l'indice, on a, en

(¹) On aurait pu démontrer, en calquant la démonstration sur celle donnée par M. Poincaré pour l'équation de Gyldén-Lindstedt (*Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. II, p. 231) que $F(\pi)$ ne doit pas changer quand on change le signe de tous les q_i.

Digitized by Google

effet,

$$A = \frac{-1}{16q}\left(\frac{q_1^2}{q^2-1^2} + \frac{q_2^2}{q^2-2^2} + \ldots + \frac{q_n^2}{q^2-n^2}\right),$$

et la forme quadratique qui figure dans la parenthèse est définie positive.

L'équation

$$\cos h\pi = F(\pi)$$

donnera alors pour h une valeur réelle, positive et inférieure à 2.

Donc, dans le cas où q ne fait pas partie de la suite (s), *il y a stabilité dans l'équation proposée.*

DEUXIÈME CAS.

q fait partie de la suite

$$n+1, \quad n+2, \quad \ldots, \quad 2n.$$

La fonction F_1 est toujours donnée par la formule (6).

Mais, dans F_2, s'introduisent de nouveaux termes en $t \sin qt$. En effet, le premier argument $(q+m+2i)t$ qui figure dans le second membre de (7) s'annule, lorsqu'on fait $m = q + 2j$, pour

$$j = -q - i.$$

i et j, on se le rappelle, doivent prendre seulement les valeurs

$$-n, \quad -n+1, \quad \ldots -1, \quad +1, \quad 2, \ldots, \quad n;$$

à chaque valeur de i ne correspondra donc pas forcément un nouveau terme du genre de ceux que nous considérons. Néanmoins, nous pourrons écrire l'ensemble de ces nouveaux termes sous la forme

$$-\frac{t \sin qt}{32q} \sum \frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)},$$

en nous souvenant que l'on a $q_{-q-i} = q_{q+i}$, et en convenant d'annuler tous les q_p dont l'indice p sera supérieur à n en valeur absolue.

Nous aurons donc pour F_2 l'expression (8), où A est remplacé par

$$A_1 = A + \frac{1}{32q} \sum \frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}.$$

Digitized by Google

Le calcul de F_3 se présente de la même façon que dans le cas précédent, et l'on a

$$(9') \qquad F_3 = \Phi'_1 + \alpha_1 t \sin qt - A_1 t \sum \frac{q_i}{8} \frac{\sin(q+2i)t}{i(q+i)}.$$

Reprenant maintenant la formule (10), on voit qu'il s'introduit dans F_4 deux sortes de termes en $t^2 \cos qt$, l'argument du second cosinus qui figure dans cette formule pouvant être indépendant de t, aussi bien que le premier. La modification à effectuer au calcul de F_4 sera toute semblable à celle que nous venons de faire pour F_2. Posant

$$A_2 = A - \frac{1}{32q} \sum \frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)},$$

on voit immédiatement que l'on aura

$$(11') \qquad F(\pi) = (-1)^q \left(1 - \frac{\pi^2}{2} A_1 A_2 + \ldots\right);$$

on a d'ailleurs

$$1024\, q^2 . A_1 A_2 = \left[\sum \frac{q_i^2}{i(q+i)}\right]^2 - \left[\sum \frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}\right]^2.$$

Il y aura *stabilité pour les petites valeurs des q_i telles que le produit $A_1 A_2$ soit positif, instabilité si ce produit est négatif.*

Supposons par exemple $n = 1$; pour rester dans le cas actuel, nous devons faire $q = 2$.

La somme $\sum \frac{q_i^2}{i(q+i)}$ se réduit alors à $\frac{-2q_1^2}{3}$.

Dans la somme $\sum \frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}$, on doit donner seulement à i la valeur -1; elle se réduira à $-q_1^2$. On aura

$$A_1 A_2 = \frac{q_1^4}{64^2} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1\right] = \frac{-5q_1^4}{36864}.$$

Ce résultat coïncide avec celui de Tisserand. Il y a, dans ce cas, instabilité.

Examinons encore le cas où $n = 2$. Nous sommes conduit à faire $q = 3$ ou $q = 4$, pour pouvoir appliquer la formule (11').

Digitized by Google

Soit d'abord $q = 3$, on a

$$\sum \frac{q_i^2}{i(q+i)} = \frac{-q_1^2}{4} - \frac{2q_2^2}{5},$$
$$\sum \frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)} = -q_1 q_2.$$

Il y aura stabilité si l'expression $\left(\frac{q_1^2}{4} + \frac{2q_2^2}{5}\right)^2 - q_1^2 q_2^2$ est positive, c'est-à-dire si le rapport $\frac{q_1}{q_2}$ est, en valeur absolue, supérieur à $2 + 2\sqrt{\frac{3}{5}}$, ou si ce rapport est compris entre $-2 + 2\sqrt{\frac{3}{5}}$ et $2 - 2\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Soit ensuite $q = 4$; il vient

$$\sum \frac{q_i^2}{i(q+i)} = -\frac{2q_1^2}{15} - \frac{q_2^2}{6},$$
$$\sum \frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)} = -\frac{q_2^2}{4}.$$

Pour qu'il y ait stabilité, il faut que l'on ait

$$\left(\frac{2q_1^2}{15} + \frac{q_2^2}{6}\right)^2 - \frac{q_2^2}{4} > 0,$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{q_1}{q_2}$, soit, en valeur absolue, supérieur à $\sqrt{\frac{5}{8}}$.

TROISIÈME CAS.

q est l'un des nombres de la suite (¹) $1, 2, 3, \ldots, n$.

Le procédé de calcul que nous avons employé précédemment offrirait de considérables difficultés. Aussi en adopterons-nous un autre, celui des coefficients indéterminés, qui pourrait servir d'ailleurs dans les deux premiers cas : la fonction F_{p-1} étant connue, on en déduira, par la considération de la formule (5), la forme de la fonction F_p que l'on écrira en introduisant un

(¹) Il y aurait lieu de traiter à part le cas de $q = 0$; mais le criterium de M Liapounoff, que nous rappellerons tout à l'heure, montre tout de suite que, dans ce cas, il y a toujours stabilité, même pour des valeurs finies des quantités q_i.

Digitized by Google

certain nombre de coefficients inconnus; on déterminera ensuite ces coefficients en substituant dans l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2 F_p}{dt^2} + q^2 F_p + F_{p-1}\varphi = 0.$$

Ainsi, prenant toujours $F_0 = \cos qt$, nous écrirons

$$(12) \qquad F_1 = \Sigma A_i[\cos(q+2i)t - \cos qt] + \alpha t \sin qt,$$

le signe Σ n'ayant plus nécessairement, dans cette formule et les suivantes, la signification que nous avions précisée plus haut.

Substituons dans l'équation (4); nous aurons

$$(13) \quad -4\Sigma A_i i(q+i)\cos(q+2i)t + 2\alpha q \cos qt + \sum \frac{q_i}{2}\cos(q+2i)t = 0.$$

Les coefficients des divers cosinus qui figurent dans (13) doivent être nuls; ceci montre d'abord que, dans A_i, l'indice i doit prendre les valeurs

$$(a) \qquad -n, \quad -n+1, \quad \ldots -1, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n$$

On peut d'autre part supposer que A_{-q} est nul, et l'on aura

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha q + \dfrac{q_q}{2} = 0, \\ A_i = \dfrac{q_i}{8i(q+i)} \qquad (i \neq -q), \\ A_{-q} = 0. \end{array} \right.$$

Nous poserons ensuite

$$(14) \quad F_2 = \Sigma B_i^0[\cos(q+2i)t - \cos qt] + t\Sigma B_i^1 \sin(q+2i)t + \beta t^2 \cos qt.$$

Nous aurons, en substituant dans (4),

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} -4\Sigma B_i^0 i(q+i)\cos(q+2i)t + 2\Sigma B_i^1(q+2i)\cos(q+2i)t \\ \quad + 2\beta\cos qt - 4t\Sigma B_i^1 i(q+i)\sin(q+2i)t - 4\beta t \sin qt \\ \quad + \sum_i \sum_j \dfrac{A_i q_j}{2}[\cos(q+2i+2j)t - \cos(q+2j)t] + \alpha t \sum \dfrac{q_i}{2}\sin(q+2i)t = 0. \end{array} \right.$$

Dans le signe $\Sigma_i \Sigma_j$, i et j ont les valeurs (a); donc :

1° Dans B_i^1, i a les valeurs (a).

2° Dans B_i^0, i a les valeurs

$$(b) \qquad -2n, \quad -2n+1, \quad \ldots, \quad -1, \quad +1, \quad \ldots, \quad 2n.$$

Digitized by Google

On aura, en annulant successivement dans (15) les coefficients de $t\sin qt$, $t\sin(q+2i)t$, $\cos qt$, $\cos(q+2i)t$,

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{aligned}
&4\beta q+\frac{\alpha q_q}{2}=0,\\
&-4\mathrm{B}_i^1 i(q+i)+\frac{\alpha q_i}{2}=0 \qquad (i\neq -q),\\
&-2q\mathrm{B}_{-q}^1+2\beta+\sum\frac{\mathrm{A}_i q_{q+i}}{2}+\sum\frac{\mathrm{A}_i q_i}{2}-q_q\sum\frac{\mathrm{A}_i}{2}=0,\\
&\mathrm{B}_{-q}^0=0,\\
&-4i(q+i)\mathrm{B}_i^0+2\mathrm{B}_i^1(q+2i)+\sum_j\frac{\mathrm{A}_j q_{i-j}}{2}-q_i\sum\frac{\mathrm{A}_j}{2}=0 \qquad (i\neq -q).
\end{aligned}\right.$$

On obtient facilement

$$\beta=\frac{q_q^2}{32q^2}.$$

On voit que β ne sera pas nul, si q_q ne l'est pas; alors $\mathrm{F}(\pi)$ ne s'annulera pas non plus.

Lorsque q_q est un infiniment petit de même ordre que les autres quantités q_i, on aura alors

$$\mathrm{F}(\pi)=(-1)^q\left(1+\pi^2\frac{q_q^2}{32q^2}+\ldots\right),$$

les termes non écrits pouvant être négligés lorsque les quantités q_i sont très petites; ainsi, *si parmi les quantités très petites q_i, il n'en existe pas d'ordre inférieur à celui de q_q, il y a instabilité.*

Mais, si q_q est un infiniment petit d'ordre supérieur à certaines des quantités q_i, on doit pousser plus loin le calcul. Posant

$$(16)\left\{\begin{aligned}
\mathrm{F}_3=&\,\Sigma\mathrm{C}_i^0[\cos(q+2i)t-\cos qt]\\
&+\Sigma\mathrm{C}_i^1 t\sin(q+2i)t+\Sigma\mathrm{C}_i^2 t^2\cos(q+2i)t+\gamma t^3\sin qt,
\end{aligned}\right.$$

et, substituant dans l'équation (4), on obtient

$$(17)\left\{\begin{aligned}
&-4\Sigma i(q+i)\mathrm{C}_i^0\cos(q+2i)t\\
&\quad+\Sigma\mathrm{C}_i^1[-4i(q+i)t\sin(q+2i)t+2(q+2i)\cos(q+2i)t]\\
&\quad+\Sigma\mathrm{C}_i^2[-4i(q+i)t^2\cos(q+2i)t\\
&\qquad\qquad-4(q+2i)t\sin(q+2i)t+2\cos(q+2i)t]\\
&\quad+\gamma[6qt^2\cos qt+6t\sin qt]\\
&\quad+\Sigma_i\Sigma_j\frac{\mathrm{B}_i^0 q_j}{2}[\cos(q+2i+2j)t-(\cos q+2j)t]\\
&\quad+\Sigma_i\Sigma_j\frac{\mathrm{B}_i^1 q_j}{2}t\sin(q+2i+2j)t+\beta t^2\sum\frac{q_i}{2}\cos(q+2i)t=0.
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Dans le premier signe $\Sigma\Sigma$, i a les valeurs (b) et j les valeurs (a); dans le second, i et j sont les nombres de la suite (a). Il en résulte que

1° Dans C_i^2, i a les valeurs (a);

2° Dans C_i^1, i a les valeurs (b);

3° Dans C_i^0, i a les valeurs

$$(c) \qquad -3n,\quad -3n+1,\quad \ldots -1,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad 3n.$$

Pour déterminer les quantités C, on a le système d'équations suivant, obtenu en annulant dans (17) successivement les coefficients de $t^2\cos qt$, $t^2\cos(q+2i)t$, $t\sin qt$, $t\sin(q+2i)t$, $\cos qt$, $\cos(q+2i)t$,

$$(C)\left\{\begin{aligned}
&6\gamma q+\frac{\beta q_q}{2}=0,\\
&-4i(q+i)C_i^2+\frac{\beta q_i}{2}=0 \qquad (i\neq -q),\\
&-4qC_{-q}^2+6\gamma+\sum\frac{B_i^1 q_i}{2}-\sum\frac{B_i^1 q_{q+i}}{2}=0,\\
&-4(q+2i)C_i^2-4i(q+i)C_i^1+\sum_j\frac{B_j^1 q_{i-j}}{2}=0 \qquad (i\neq -q),\\
&-2qC_{-q}^1+2C_{-q}^2+\sum\frac{B_i^0 q_i}{2}+\frac{B_i^0 q_{q+i}}{2}-q_q\sum\frac{B_i^0}{2}=0,\\
&-4i(q+i)C_i^0+2C_i^1(q+2i)+2C_i^2+\sum_j\frac{B_j^0 q_{i-j}}{2}-q_i\sum\frac{B_i^0}{2}=0 \quad (i\neq -q),\\
&C_{-q}^0=0.
\end{aligned}\right.$$

Un moyen s'offre de vérifier l'exactitude des premières de ces équations. Nous avons dit en effet que $F(\pi)$ ne doit pas changer de valeur quand on change le signe de tous les q_i; c'est dire que $F_3(\pi)$ doit s'annuler, ou qu'on doit avoir

$$\Sigma C_i^2=0;$$

or si, dans cette somme, on laisse de côté le terme C_{-q}^2, on obtient

$$\frac{\beta}{8}\sum\frac{q_i}{i(q+i)}=\frac{q_q^2}{8.32q^2}\sum\frac{q_i}{i(q+i)}.$$

Les formules (B) donnent ensuite aisément

$$\sum\frac{B_i' q_i}{2}=\frac{q_q^3}{64q^3}+\frac{q_q}{64q^2}\sum\frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}-\frac{q_q^2}{64q}\sum\frac{q_i}{i(q+i)},$$

$$\sum\frac{B_i' q_{q+i}}{2}=\frac{q_q}{64q^2}\sum\frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}.$$

Digitized by Google

Portant ces expressions dans la troisième des formules (C), on obtient

$$C^2_{-q} = -\frac{q_q^2}{4.64q^2}\sum\frac{q_i}{i(q+i)},$$

ce qui vérifie bien le fait annoncé.

Posons enfin

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} F_4 = {} & \Sigma D_i^0[\cos(q+2i)t - \cos qt] + \Sigma D_i^1 t\sin(q+2i)t \\ & + \Sigma D_i^2 t^2\cos(q+2i)t + \Sigma D_i^3 t^3\sin(q+2i)t + dt^4\cos qt; \end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} & -4\Sigma D_i^0 i(q+i)\cos(q+2i)t \\ & + \Sigma D_i^1[-4i(q+i)t\sin(q+2i)t + 2(q+2i)\cos(q+2i)t] \\ & + \Sigma D_i^2[-4i(q+i)t^2\cos(q+2i)t \\ & \qquad -4(q+2i)t\sin(q+2i)t + 2\cos(q+2i)t] \\ & + \Sigma D_i^3[-4i(q+i)t^3\sin(q+2i)t \\ & \qquad +6(q+2i)t^2\cos(q+2i)t + 6t\sin(q+2i)t] \\ & + d(-8qt^3\sin qt + 12t^2\cos qt) \\ & + \sum_i\sum_j \frac{C_i^0 q_j}{2}[\cos(q+2i+2j)t - \cos(q+2j)t] \\ & + \sum_i\sum_j \frac{C_i^1 q_j}{2} t\sin(q+2i+2j)t \\ & + \sum_i\sum_j \frac{C_i^2 q_j}{2} t^2\cos(q+2i+2j)t + \gamma t^3\sum\frac{q_i}{2}\sin(q+2i)t = 0. \end{aligned}\right.$$

On verrait, comme précédemment, que dans D_i^3, i a les valeurs (a), dans D_i^2 les valeurs (b), dans D_i^1 les valeurs (c) et dans D_i^0 les valeurs

$$(d)\qquad -4n,\quad -4n+1,\quad \ldots,\quad -1,\quad +1,\quad 2,\quad \ldots,\quad 4n.$$

Cette équation (19) fournit des relations de récurrence entre les quantités C et D analogues aux équations (C). Comme nous cherchons seulement à calculer $F_4(\pi)$, il nous suffira de considérer celles de ces relations qui donnent d et D_i^2. Ce sont

$$(D)\quad \left\{\begin{aligned} & 8qd + \frac{\gamma q_q}{2} = 0, \\ & -4i(q+i)D_i^3 + \frac{\gamma q_i}{2} = 0 \qquad (i \neq -q), \\ & -6qD^2_{-q} + 12d + \sum\frac{C_i^2 q_i}{2} + \sum\frac{C_i^2 q_{q+i}}{2} = 0, \\ & 6(q+2i)D_i^3 - 4i(q+i)D_i^3 + \sum_j\frac{C_j^2 q_{i-j}}{2} = 0 \qquad (i \neq -q), \\ & -4qD^2_{-q} - 6D^2_{-q} + \sum\frac{C_i^1 q_i}{2} - \sum\frac{C_i^1 q_{q+i}}{2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Le calcul complet de

$$F_4(\pi) = (-1)^q(\pi^4 d + \pi^2 \Sigma D_i^2)$$

à l'aide des formules (A), (B), (C), (D) n'offrirait d'autre difficulté que sa longueur. Dans le problème qui nous occupe, nous n'aurons pas besoin d'obtenir toute cette expression. En effet, on a

$$F(\pi) = (-1)^q\left(1 + \frac{\pi^2 q_q^2}{32 q^2}\right) + F_4(\pi) + \ldots;$$

nous avons déjà traité le cas où tous les q_i sont infiniment petits d'un ordre au moins égal à celui de q_q; le calcul de F_4 est alors inutile. Quand, au contraire, q_q est un infiniment petit d'un ordre supérieur à certains des q_i, certains des termes de F_4 seront comparables au terme $\frac{\pi^2 q_q^2}{32 q^2}$; mais ces termes ne pourront évidemment contenir q_q au carré, F_4 étant une forme homogène en q_i du quatrième degré.

Il suffira donc de calculer dans F_4 les termes indépendants de q_q, et les termes qui contiennent q_q à la première puissance. Il en résulte d'abord que, dans F_4, on peut négliger d, qui est du quatrième ordre par rapport à q_q.

On pourra aussi négliger γ, et, d'après la remarque que nous avons faite plus haut, toutes les quantités C_i^2, même C_{-q}^2.

Par suite, tous les D_i^3 seront nuls, et la somme ΣD_i^2 se réduira à D_{-q}^2. On aura alors

$$D_{-q}^2 = \frac{1}{8q}\Sigma C_i^1 q_i - \frac{1}{8q}\Sigma C_i^1 q_{q+i}.$$

On remarquera encore que, dans cette expression, la quantité C_{-q}^1 n'entre que multipliée par q_q, de telle sorte qu'il suffira de la calculer aux termes en q_q près.

Les formules (C) donnent

$$8i(q+i)C_i^1 = \Sigma_j B_j^1 q_{i-j},$$
$$4q C_q^1 = \Sigma B_i^0 q_i + \Sigma B_i^0 q_{q+i}.$$

On a ensuite, par les formules (B) et (A),

$$B_i^1 = \frac{-q_i q_q}{32 q i(q+i)} \qquad (i \neq q),$$
$$B_{-q}^1 = \frac{1}{32q}\left[\sum \frac{q_j q_{q+j}}{j(q+j)} + \sum \frac{q_j^2}{j(q+j)} - q_q \sum \frac{q_j}{j(q+j)}\right],$$
$$B_i^0 = \frac{1}{i(q+i)}\left[\sum_j \frac{q_j q_{i-j}}{j(q+j)} - q_i \sum \frac{q_j}{j(q+j)}\right].$$

Digitized by Google

Sous les différents signes Σ, j prend seulement les valeurs (a), tandis que i prend les valeurs (b), à l'exclusion toutefois de la valeur $-q$ pour l'un et l'autre de ces deux nombres.

On en déduit

$$256q.C_i^1 = \frac{q_{q+i}}{i(q+i)}\left[\sum\frac{q_j q_{q+j}}{j(q+j)} + \sum\frac{q_j^2}{j(q+j)}\right]$$
$$-q_q\left[\frac{1}{i(q+i)}\sum_j\frac{q_j q_{i-j}}{j(q+j)} + \frac{q_{q+i}}{i(q+i)}\sum\frac{q_j}{j(q+j)}\right] \quad (i \neq -q),$$

$$256q.C_{-q}^1 = \sum_i\sum_j\frac{q_i q_j q_{i-j}}{ij(q+i)(q+j)} + \sum_i\sum_j\frac{q_{q+i}q_j q_{i-j}}{ij(q+i)(q+j)}$$
$$-\sum\frac{q_i^2}{i(q+i)}\sum\frac{q_j}{j(q+j)} - \sum\frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}\sum\frac{q_j}{j(q+j)}.$$

Après des réductions évidentes, on obtient

$$2048q^2.D_{-q}^2 = \left[\sum\frac{q_j q_{q+j}}{j(q+j)} + \sum\frac{q_j^2}{j(q+j)}\right]\left[\sum\frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)} - \sum\frac{q_{q+i}^2}{i(q+i)}\right]$$
$$+q_q\left[\sum\frac{q_{q+i}^2}{i(q+i)}\sum\frac{q_j}{j(q+j)} - \sum\frac{q_i^2}{i(q+i)}\sum\frac{q_j}{j(q+j)}\right.$$
$$\left.+2\sum\sum\frac{q_{q+i}q_j q_{i-j}}{ij(q+i)(q+j)} - 2\sum\frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}\sum\frac{q_j}{j(q+j)}\right].$$

Cette expression se simplifie encore si l'on remarque que l'on a

$$\sum\frac{q_{q+i}^2}{i(q+i)} = \sum\frac{q_i^2}{i(q+i)},$$

puisque, d'une part, le dénominateur du terme général dans chaque somme est symétrique par rapport à i et $q+i$, et que, de l'autre, lorsque i prend les valeurs entières comprises entre $-2n$ et $+2n$, $q+i$ prend toutes les valeurs comprises entre $-n$ et $+n$.

On aura finalement

$$(20)\left\{\begin{aligned}(-1)^q F(\pi) = 1 + \frac{\pi^2}{32q^2}q_q^2 + \frac{\pi^2}{2048q^2}\Bigg\{&\left[\sum\frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}\right]^2 - \left[\sum\frac{q_i^2}{i(q+i)}\right]^2\\ &+2q_q\left[\sum\sum\frac{q_{q+i}q_j q_{i-j}}{ij(q+i)(q+j)} - \sum\frac{q_j}{j(q+j)}\sum\frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}\right]\Bigg\} + \ldots\end{aligned}\right.$$

Si, dans cette formule, on fait $q_q = 0$, on retombe sur celle que nous avons obtenue dans le deuxième cas, ce qui était à prévoir.

Digitized by Google

La discussion de la stabilité se déduira, comme dans les autres cas, de la formule précédente.

Bornons-nous à la faire complètement dans le cas de $n = 2$.

Soit d'abord $q = 1$. Le terme $\left[\sum \frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)}\right]^2$ peut être négligé, car il se réduit à $q_1^2 q_2^2$. On a ensuite $\frac{q_i^2}{i(q+i)} = \frac{q_1^2}{3}$.

Dans le double signe $\Sigma\Sigma$, on devrait, pour ne pas avoir de termes contenant q_1, faire $i = -3$ ou $i = 1$; mais, faisant $j = 2$, on obtient encore q_1 à la place de q_{i-j}; cette double somme peut donc être laissée de côté.

On en conclut qu'il y aura stabilité ou instabilité suivant que l'expression $q_1^2 - \frac{q_2^4}{6.64}$ est inférieure ou supérieure à zéro.

Soit encore $q = 2$. On a, négligeant les termes en q_2^2,

$$\sum \frac{q_i q_{q+i}}{i(q+i)} = -q_1^2, \qquad \sum \frac{q_i^2}{i(q+i)} = -\frac{2q_1^2}{3},$$

$$\sum\sum \frac{q_{q+i} q_j q_{i-j}}{ij(q+i)(q+j)} = 0, \qquad \sum \frac{q_j}{j(q+j)} = -\frac{2q_1}{3}.$$

La stabilité dépendrait donc du signe de

$$q_2^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{5}{9} q_1^4 - \frac{4}{3} q_1^3 q_2\right);$$

or, le second terme de la parenthèse peut être négligé vis-à-vis du premier, d'après l'hypothèse que nous avons faite.

Il y a donc instabilité.

APPLICATION.

Occupons-nous maintenant d'une application plus intéressante pour l'Astronomie, en prenant le cas où les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont des quantités infiniment petites d'ordres marqués par leurs indices.

Le cas où $q = 1$ a déjà été traité; nous avons vu qu'il y alors instabilité.

Pour q entier et plus grand que 1, les termes qui suivent l'unité dans le second membre de la formule (20) seront au moins du quatrième ordre.

Digitized by Google

Nous avons précédemment calculé ces termes dans le cas de $q = 2$, l'hypothèse $n > 2$ n'introduisant pas de nouveaux termes en q_1.

Donc, dans le cas de $q = 2$, il y a encore instabilité.

Supposons enfin q entier et supérieur à 2. Le seul terme du quatrième ordre dans la formule (20) sera

$$\frac{-\pi^2}{2048 q^2} \frac{4 q_1^4}{(q^2-1)^2}.$$

Dans ce cas, il y a donc stabilité pour des valeurs de q_1 assez petites.

Prenons comme exemple l'équation suivante, rencontrée par M. Hill dans sa *Théorie de la Lune,* et qui se retrouve dans la théorie des essaims de météores

$$(21) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{\rho^3} + m^2 z = 0;$$

μ et m^2 sont des constantes, et ρ désigne le rayon vecteur du centre de la Terre, ou du centre de l'essaim. On a, v étant l'anomalie vraie de ce point

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos v}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{\mu \sqrt{p}}{\rho^2}.$$

Prenant v comme variable indépendante, nous aurons l'équation

$$\frac{d^2 z}{dv^2}(1 + e \cos v) - 2e \sin v \frac{dz}{dv} + z + \frac{p^3}{(1 + e \cos v)^3} \frac{m^2}{\mu} z = 0.$$

Posons enfin $z = \rho\zeta$; nous obtenons

$$(21) \qquad \frac{d^2 \zeta}{dv^2} + \zeta + \frac{p^3}{(1 + e \cos v)^4} \frac{m^2}{\mu} z = 0.$$

Si l'on développe $\frac{1}{(1 + e \cos v)^4}$ en série trigonométrique, on se rend compte aisément que le coefficient de $\cos nv$ contient e^n en facteur : il suffit en effet d'employer la formule du binôme, puis de remplacer $\cos^n v$ par son expression en fonction des cos des multiples de v. Les deux premiers coefficients du développement

Digitized by Google

s'obtiennent à l'aide des formules

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dv}{(1+e\cos v)^4} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^4}\int_0^{2\pi}(1-e\cos u)^3\,du$$
$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^4}\left(1+\frac{3e^2}{2}\right),$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos v\,dv}{(1+e\cos v)^4} = \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^4}\int_0^{2\pi}(\cos u-e)(1-e\cos u)^2\,du$$
$$= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^4}\,e(4+e^2).$$

Puisque ce dernier coefficient n'est pas nul, pour que l'équation (22) prenne la même forme que l'équation (1), nous poserons $v = 2v'$. Nous aurons alors, en supprimant l'accent de v', l'équation

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\zeta}{dv^2} + \left[4 + \frac{a^3m^2\left(1+\frac{3e^2}{2}\right)}{\mu\sqrt{1-e^2}}\right]\zeta \\ &\quad + \zeta\left[-\frac{a^3m^2e(4+e^2)}{\mu\sqrt{1-e^2}}\cos 2v + q_2\cos 4v + \ldots\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

La valeur de q dans cette équation étant supérieure à 4, on voit qu'il y a toujours stabilité.

Remarquons, en terminant, que le criterium de stabilité trouvé par M. Liapounoff ne pouvait s'appliquer dans le cas actuel. Le résultat obtenu par l'éminent géomètre est en effet le suivant : si dans l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + xp(t) = 0,$$

$p(t)$ admettant la période ω, la fonction $p(t)$ est telle que l'on ait

$$\omega\int_0^{\omega} p\,dt \leq 4,$$

il y a certainement stabilité. Or, dans l'équation (23), le premier membre de cette dernière inégalité se réduit à

$$\pi\left[4 + \frac{a^3m^2\left(1+\frac{3e^2}{2}\right)}{\mu\sqrt{1-e^2}}\right].$$

Il n'est pas toutefois inutile de rappeler que notre résultat n'est établi que pour les petites valeurs de e.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE PETITES PLANÈTES ET DE COMÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE BESANÇON;

PAR MM. P. CHOFARDET ET H. PETIT.

Dates.	T. m. Besançon.	ΔÆ.	ΔΦ.	N. dec.	Æ app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	★	Obs.
					(5) Astrée.					
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″			
JUIN 23.	11.57.47	+0.40,67	— 7.56,5	15:16	17.56. 8,77	$\bar{2}$,304	107. 1.20,5	0,900 *n*	1	P
24.	11.34.45	—0.15,57	— 6.47,2	10:12	17.55.12,54	$\bar{2}$,109 *n*	107. 2.28,7	0,900 *n*	1	P
25.	11.28.40	—1.12,67	— 5.29,4	9:11	17.54.15,45	$\bar{2}$,178 *n*	107. 3.46,5	0,900 *n*	1	P
					(18) Melpomène.					
MAI 31.	13.37.32	—4.38,86	— 5.45,4	12:24	16.23.52,09	$\bar{1}$,279	94.44.46,5	0,838 *n*	2	P
JUIN 1.	12.42.28	+5. 1,51	+10.57,8	12:19	16.22.53,12	$\bar{1}$,035	94.43. 3,1	0,840 *n*	3	P
					(38) Léda.					
FÉVR. 24.	12.26.48	—0.11,02	+ 4.14,3	18:15	9.40.35,65	$\bar{1}$,064	82.53.19,6	0,755 *n*	4	C
					(46) Hestia.					
JUILL. 5.	14. 2.11	—1.41,83	— 3. 0,0	12:15	18.57. 8,69	$\bar{1}$,333	108.48.31,0	0,891 *n*	5	P
6.	13.38.58	—1.24,95	— 7.12,4	12:13	18.56.10,31	$\bar{1}$,269	108.50. 3,0	0,895 *n*	6	P
8.	11.12.32	—3.16,37	— 4. 9,5	15:25	18.54.18,91	$\bar{2}$,785 *n*	108.53. 5,9	0,906 *n*	6	P
9.	11.27.30	—0. 9,72	+12.27,5	15:16	18.53.19,68	$\bar{2}$,390 *n*	108.54.43,8	0,907 *n*	7	P
10.	10.29. 6	+2. 7,16	+ 5.54,0	12:16	18.52.23,54	$\bar{1}$,086 *n*	108.56.13,9	0,902 *n*	8	P
					(113) Amalthée.					
MAI 18.	10.15.11	—3. 2,71	+ 0.34,1	15:15	15.52.59,81	$\bar{1}$,278 *n*	101.39.25,4	0,870 *n*	9	P
18.	11. 8.52	+1.32,56	— 4. 6,4	15:12	15.52.57,60	$\bar{2}$,999 *n*	101.39.22,5	0,875 *n*	10	C
24.	11. 7.39	+0.30,88	—14. 3,4	12:13	15.47. 7,67	$\bar{2}$,702 *n*	101.30.13,8	0,877 *n*	11	P
24.	12.53.51	—0.20,75	— 1.33,7	8:11	15.47. 3,45	$\bar{1}$,136	101.30.12,5	0,873 *n*	12	C
					(130) Elektra.					
JUIN 1.	12.58.36	—0.50,88	+ 1.14,1	15:14	17.19.17,12	$\bar{2}$,591	82.39.39,6	0,752 *n*	13	C
11.	13.35.26	+0.30,71	— 5.10,1	15:12	17.11.30,99	$\bar{1}$,258	82.40.26,1	0,757 *n*	14	C
12.	12.59. 5	—0.14,99	— 3.58,6	15:14	17.10.45,30	$\bar{1}$,113	82.41.37,4	0,754 *n*	14	C
22.	12.48. 7	+1.15,26	+ 2.44,5	15:12	17. 3. 6,84	$\bar{1}$,274	83. 4.43,0	0,761 *n*	15	C
23.	11.46.52	+0.33,35	+ 5.59,6	18:15	17. 2.24,93	$\bar{1}$,012	83. 7.57,9	0,757 *n*	15	C
24.	11.48.52	—0.10,35	+ 9.33,7	21:21	17. 1.41,24	$\bar{1}$,023	83.11.31,9	0.758 *n*	15	C

Digitized by Google

Dates.	T. m. Besançon.	ΔÆ.	ΔΦ.	N. de c.	Æ app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	★	Obs.
					(137) Mélibœa.					
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″			
JUILL. 5.	13.25.10	−1.24,31	+10.44,5	12:14	20. 9. 0,09	$\bar{2}$,358	87.38.35,3	0,793 *n*	16	P
5.	13.26.19	−1.24,25	+10.43,4	15:15	20. 9. 0,15	$\bar{2}$,398	87.38.34,2	0,793 *n*	16	C
6.	12.40. 5	−1.59,98	+ 9.35,6	15:12	20. 8.24,43	$\bar{2}$,678 *n*	87.37.26,2	0,793 *n*	16	C
6.	13. 8. 5	+0.27,12	+ 1.20,4	12:14	20. 8.23,68	$\bar{3}$,089	87.37.31,5	0,793 *n*	17	P
8.	11.19. 2	−0.45,90	− 0.22,1	18:18	20. 7.10,69	$\bar{1}$,228 *n*	87.35.48,7	0,794 *n*	17	C
8.	12.34.14	−0.48,19	− 0.26,3	9:11	20. 7. 8,40	$\bar{2}$,623 *n*	87.35.44,5	0,793 *n*	17	P
9.	10.41. 4	−1.24,29	− 0.55,6	15:20	20. 6.32,32	$\bar{1}$,342 *n*	87.35.15,0	0,795 *n*	17	P
9.	10.51.22	−1.24,25	− 0.53,4	18:20	20. 6.32,36	$\bar{1}$,312 *n*	87.35.17,2	0,795 *n*	17	C
10.	10.10.37	−2. 2,84	− 1. 9,6	15:15	20. 5.53,78	$\bar{1}$,409 *n*	87.35. 0,9	0,796 *n*	17	C
10.	11.49.33	−2. 5,97	− 1.12,6	12:14	20. 5.50,65	$\bar{1}$,015 *n*	87.34.57,8	0,794 *n*	17	P
10.	11.49.33	+0.21,73	− 0.36,1	12:14	20. 5.50,65	$\bar{1}$,015 *n*	87.34.55,3	0,794 *n*	18	P
11.	12.36.48	−0.19,88	− 0.36,4	12:12	20. 5. 9,05	$\bar{2}$,131 *n*	87.34.54,8	0,793 *n*	18	P
11.	12.51.43	−0.20,48	− 0.38,1	11:12	20. 5. 8,45	$\bar{2}$,078	87.34.53,1	0,793 *n*	18	C
30.	12.20.31	+0.21,84	+ 3.52,0	15:15	19.51.43,55	$\bar{1}$,045	88.21.59,8	0,800 *n*	19	P
31.	11.22. 4	−0.37,02	+ 5.31,5	12:14	19.51. 4,55	$\bar{2}$,255	88.26.36,1	0,799 *n*	20	P
					(169) Zélia.					
MAI 29.	11.36.34	+0.30,50	− 7.43,2	18:14	14.56.16,80	$\bar{1}$,133	115.39.57,0	0,919 *n*	21	C
					(210) Isabelle.					
Nov. 13.	12.20. 6	−1.21,95	− 7. 8,3	15:18	2.41.28,33	$\bar{1}$,115	72. 1. 8,0	0,642 *n*	22	P
16.	11. 6.26	−4. 5,32	− 1.59,2	12:12	2.38.44,98	$\bar{2}$,361	72. 6.17,1	0,634 *n*	22	P
17.	10.51.27	−2.48,23	− 3.53,6	15:19	2.37.52,13	$\bar{3}$,666	72. 7.59,8	0,635 *n*	23	P
					(250) Bettina.					
Nov. 13.	10.35.23	−0.28,23	− 9. 1,9	18:20	3.28,17,56	$\bar{1}$,195 *n*	60.52.33,0	0,461 *n*	24	P
16.	9.46.40	−0.42,36	+ 1.17,4	15:16	3.25.16,73	$\bar{1}$,337 *n*	60.50. 2,0	0,486 *n*	25	P
17.	8.43.40	−1.40,92	+ 0.45,3	15:20	3.24.18,18	$\bar{1}$,496 *n*	60.49.29,8	0,544 *n*	25	P
					(379) 1894 AQ.					
JUILL. 9.	13.42. 0	+1.24,22	+ 5.34,1	17:15	20.40.55,86	$\bar{2}$,436	106.15.40,8	0,897 *n*	26	C
10.	12. 8.10	+0.48,56	+ 7.54,4	15:15	20.40.20,22	$\bar{1}$,131 *n*	106.18. 1,1	0,893 *n*	26	C
29.	12.56.36	+0.30,39	−13.34,6	15:15	20.26. 4,10	$\bar{1}$,051	107.15.16,7	0,898 *n*	27	C
30.	12. 9.19	−1.11,73	− 2.28,6	15:12	20.25.17,18	$\bar{2}$,551	107.18.21,2	0,901 *n*	28	C
31.	11.27.14	−1.58,22	+ 0.47,6	15:17	20.24.30,70	$\bar{2}$,514 *n*	107.21.37,4	0,901 *n*	28	C

Digitized by Google

Dates.	T. m. Besançon.	ΔAR.	ΔP.	N. de c.	AR app.	log f. p.	P app.	log f. p.	✱	Obs.
					(416) Vaticana.					
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″			
Oct. 22.	9.51.23	+1.45,00	−10.30,3	12:13	0.11.23,77	$\bar{2}$,388*n*	104.33.58,1	0,890*n*	29	P
22.	12.24.59	+1.41,27	−10.45,5	9:9	0.11.20,04	$\bar{1}$,377	104.33.42,9	0,875*n*	29	P
23.	10.40.31	+1. 5,72	−12.58,5	15:13	0.10.44,48	$\bar{2}$,858	104.31.29,9	0,889*n*	29	P
25.	11. 9.37	+2.39,08	+ 3.38,2	12:15	0. 9.31,53	$\bar{1}$,142	104.26.21,3	0,885*n*	30	P
26.	10.32.46	+2. 5,39	+ 0.52,5	15:15	0. 8.57,83	$\bar{2}$,916	104.23.35,7	0,888*n*	30	P
27.	8.41.57	+1.35,12	− 1.55,8	15:15	0. 8.27,56	$\bar{1}$,035*n*	104.20.47,5	0,886*n*	30	P
28.	8.39.10	+1. 3,50	− 5. 5,2	15:15	0. 7.55,93	$\bar{1}$,023*n*	104.17.38,2	0,886*n*	30	P
29.	8.21. 5	+0.33,25	− 8.22,8	15:16	0. 7.25,68	$\bar{1}$,111*n*	104.14.20,7	0,885*n*	30	P
30.	8.11.49	−0.29,09	+ 0.11,9	15:15	0. 6.56,78	$\bar{1}$,137*n*	104.10.46,5	0,884*n*	31	P
Nov. 2.	12.42.40	−1.53,26	−12.19,9	12:12	0. 5.32,59	$\bar{1}$,512	103.58.15,0	0,856*n*	31	P
					1896 (Perrine, décembre 8).					
Janv. 20.	6.51. 2	−1. 3,32	− 3. 7,2	9:8	4.35. 3,82	$\bar{1}$,239*n*	90.32.24,5	0,816*n*	32	C
Févr. 4.	8. 5.13	−1. 9,32	− 2.48,3	12:9	5.18.24,69	$\bar{2}$,323*n*	89.16.51,8	0,806*n*	33	C
					périodique de d'Arrest.					
Juill. 9.	14.13.29	+0.47,05	− 9.56,2	21:22	2.31.14,98	$\bar{1}$,594*n*	83.26. 7,2	0,796*n*	34	P
10.	13.43.58	+0.37,05	− 3.57,9	12:6	2.33.52,21	$\bar{1}$,604*n*	83.25.26,8	0,802*n*	35	C
10.	13.57.48	−2.48,49	− 7.44,1	12:12	2.33.52,36	$\bar{1}$,600*n*	83.25.33,2	0,800*n*	36	P
10.	14.11.23	+0.38,26	− 3.50,8	9:4	2.33.53,42	$\bar{1}$,594*n*	83.25.33,9	0,796*n*	35	C
11.	13.52.12	−0. 9,39	− 8.23,3	12:12	2.36.31,50	$\bar{1}$,601*n*	83.24.53,9	0,801*n*	36	P
11.	14. 6.27	−0. 8,32	− 8.22,5	9:9	2.36.32,57	$\bar{1}$,596*n*	83.24.54,7	0,798*n*	36	P
11.	14.14.17	−0. 5,91	− 8.14,5	11:12	2.36.34,98	$\bar{1}$,591*n*	83.25. 2,7	0,795*n*	36	C
Juill. 29.	14.30.45	−0.55,26	+ 8.48,8	12:9	3.20.21,72	$\bar{1}$,561*n*	83.50.29,8	0,789*n*	37	C
30.	14.15.43	−1.35,91	+ 1.55,3	15:13	3.22.30,60	$\bar{1}$,572*n*	83.53.40,8	0,792*n*	38	P
30.	14.32.16	−1.33,97	+ 2. 6,4	12:6	3.22.32,54	$\bar{1}$,558*n*	83.53.51,9	0,789*n*	38	C
					1897 (Perrine, octobre 16).					
Oct. 20.	9.17. 1	+1.41,97	+ 4.58,7	15:16	3. 9.19,88	0,052*n*	17.39.55,2	0,009	39	P
22.	10.53.13	+8.36,29	−20.39,2	12:13	2.44.36,10	$\bar{1}$,846*n*	14.40.39,2	0,554	40	P
23.	8.47.45	+6.36,97	−17. 4,8	12:20	2.30.11,79	0,140*n*	13.26.44,9	0,302	41	P
26.	12.36.45	+5.49,55	+12.35,8	9:17	1.15.23,81	0,010	9.53. 1,4	0,625	42	P
28.	12. 1.10	−3.23,10	+ 2.26,8	9:9	0. 3.47,54	0,210	8.34.50,6	0,570	43	P
29.	11.26. 0	+7.30,60	+ 5.53,1	9:14	23.23. 6,01	0,245	8.19.46,1	0,565	44	P
30.	10.49.54	+4.39,87	− 7.23,3	9:18	22.41.54,89	0,265	8.20.32,4	0,547	45	P

Digitized by Google

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	Æ moy. 1897,0.	Réd. au j.	℘ moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	7	17.55.24,07	+ 4,03	107. 9.10,5	+ 5,5	½ (Rümker 6154 + Cordoba 24492)
1.	»	»	+ 4,04	»	+ 5,4	Id.
1.	»	»	+ 4,05	»	+ 5,4	Id.
2.	8	16.28.27,50	+ 3,45	94.50.18,9	+13,0	12717 Münich$_1$.
3.	10	16.17.48,17	+ 3,44	94.31.51,9	+13,4	12500 Münich$_1$.
4.	5	9.40.44,05	+ 2,62	82.48.55,3	+10,0	4148 Yarnall.
5.	8	18.58.46,27	+ 4,25	108.51.32,1	— 1,1	18565 Münich$_1$.
6.	8	18.57.31,00	+ 4,26	108.57.16,5	— 1,1	18486 Münich$_1$.
6.	»	»	+ 4,28	»	— 1,1	Id.
7.	6	18.53.25,11	+ 4,29	108.42.17,0	— 0,7	18200 Münich$_1$.
8.	7	18.50.12,08	+ 4,30	108.50.20,3	— 0,4	17998 Münich$_1$.
9.	9	15.55.59,15	+ 3,37	101.38.35,7	+15,6	Anonyme comparée à 1025 W$_1$ (15^h).
10.	9	15.51.21,68	+ 3,36	101.43.13,1	+15,8	Anonyme comp. à 5222 Schjellerup.
11.	9	15.46.33,37	+ 3,42	101.44. 0,4	+15,8	851 Weisse$_1$ (15^h).
12.	9	15.47.20,78	+ 3,42	101.31.30,4	+15,8	861 Weisse$_1$ (15^h).
13.	9	17.20. 4,70	+ 3,30	82.38.15,0	+10,5	Anonyme rapportée à 13959 Münich$_1$
14.	9	17.10.56,86	+ 3,42	82.45.27,0	+ 9,2	138 Weisse$_1$ (17^h).
14.	»	»	+ 3,43	»	+ 9,0	Id.
15.	10	17. 1.48,08	+ 3,50	83. 1.50,7	+ 7,8	13533 Münich$_1$.
15.	»	»	+ 3,50	»	+ 7,6	Id.
15.	»	»	+ 3,51	»	+ 7,5	Id.
16.	6,5	20.10.20,73	+ 3,67	87.27.56,7	— 5,9	38842 Lalande$_2$.
16.	»	»	+ 3,67	»	— 5,9	Id.
16.	»	»	+ 3,68	»	— 6,1	Id.
17.	10	20. 7.52,87	+ 3,69	87.36.17,1	— 6,0	23478 Münich$_1$.
17.	»	»	+ 3,72	»	— 6,3	Id.
17.	»	»	+ 3,72	»	— 6,3	Id.
17.	»	»	+ 3,74	»	— 6,5	Id.
17.	»	»	+ 3,74	»	— 6,5	Id.
17.	»	»	+ 3,75	»	— 6,6	Id.
17.	»	»	+ 3,75	»	— 6,7	Id.
18.	9	20. 5.25,16	+ 3,76	87.35.37,9	— 6,5	½ (Schjellerup 7858 + Münich$_1$ 23296)
18.	»	»	+ 3,77	»	— 6,7	Id.
18.	»	»	+ 3,77	»	— 6,7	Id.
19.	9	19.51.17,74	+ 3,97	88.18.16,4	— 8,6	1236 Weisse$_1$ (19^h).
20.	9	19.51.37,60	+ 3,97	88.21.13,3	— 8,7	1244 Weisse$_1$ (19^h).
21.	9	14.55.42,77	+ 3,53	115.47.20,3	+19,9	Anonyme rapp. à 20243 Cordoba.
22.	7	2.42.45,20	+ 5,08	72. 8.42,8	—26,5	984 Weisse$_2$ (9^h).
22.	»	»	+ 5,10	»	—26,5	Id.
23.	9,5	2.40.35,26	+ 5,10	72.12,20,1	—26,7	930 Weisse$_2$ (2^h).

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1897,0.	Réd. au j.	℘ moy. 1897,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
24.	9	3.28.40,23	+ 5,56	61. 1.57,2	—22,3	540 Weisse$_2$ (3^h).
25.	8	3.25.53,49	+ 5,60	60.49. 7,5	—22,9	6472 Lalande.
25.	»	»	+ 5,61	»	—23,0	Id.
26.	8	20.39.27,56	+ 4,08	106.10.17,8	—11,1	10755 Münich$_2$.
26.	»	»	+ 4,10	»	—11,1	Id.
27.	8	20.25.29,27	+ 4,44	107.29. 2,3	—11,0	20567 Arg. OEltzen.
28.	9	20.26.24,47	+ 4,44	107.21. 0,9	—11,1	20588 Arg. OEltzen.
28.	»	»	+ 4,45	»	—11,1	Id.
29.	7,8	0. 9.34,24	+ 4,53	104.44.54,5	—26,1	$\frac{1}{2}$ (Cordoba 144 + Münich$_1$ 105).
29.	»	»	+ 4,53	»	—26,1	Id.
29.	»	»	+ 4,52	»	—26,1	Id.
30.	6,7	0. 6.47,94	+ 4,51	104.23. 8,9	—25,8	$\frac{1}{3}$ (Paris 130 + Cordoba 99 + Münich$_1$ 75).
30.	»	»	+ 4,50	»	—25,7	Id.
30.	»	»	+ 4,50	»	—25,6	Id.
30.	»	»	+ 4,49	»	—25,5	Id.
30.	»	»	+ 4,49	»	—25,4	Id.
31.	9	0. 7.21,39	+ 4,48	104.11. 0,0	—25,4	$\frac{1}{2}$ (Cordoba 106 + Münich$_1$ 82).
31.	»	»	+ 4,46	»	—25,1	Id.
32.	9	4.36. 5,32	+ 1,82	90.35.35,6	— 3,9	1192 Münich$_1$.
33.	9	5.19.32,12	+ 1,89	89.19.42,1	— 2,0	Anonyme rapportée à 6253 Paris$_1$.
34.	6	2.30.25,82	+ 2,11	83.36.20,5	—17,1	123 Piazzi (*C. des T.*).
35.	9	2.33.13,11	+ 2,05	83.29.41,1	—16,4	739 Schjellerup.
36.	9	2.36.38,82	+ 2,03	83.33.33,7	—16,4	754 Schjellerup.
35.	9	2.33.13,11	+ 2,05	83.29.41,1	—16,4	739 Schjellerup.
36.	9	2.36.38,82	+ 2,07	83.33.33,7	—16,5	754 Schjellerup.
36.	»	»	+ 2,07	»	—16,5	Id.
36.	»	»	+ 2,07	»	—16,5	Id.
37.	9	3.21.14,58	+ 2,40	83.41.59,1	—18,1	Anonyme rapportée à 467 W$_1$ (3^h).
38.	9	3.24. 4,09	+ 2,42	83.52. 3,6	—18,1	Anonyme rapportée à 400 W$_1$ (3^h).
38.	»	»	+ 2,42	»	—18,1	Id.
39.	8	3. 7.28,04	+ 9,87	17.35.11,8	—15,3	3539 A. OE.
40.	7	2.35.49,25	+10,56	15. 1.38,0	—19,6	431 Fédorenko.
41.	7	2.23.23,81	+11,01	13.44.10,9	—21,2	$\frac{1}{2}$ (Rad. 714 + Groombridge 512).
42.	7	1. 9.23,03	+11,23	9.40.55,1	—29,5	Radcliffe 372.
43.	10,3	0. 7. 2,22	+ 8,42	8.32.58,1	—34,3	12 Carrington.
44.	7,5	23.15.30,48	+ 4,93	8.14.29,2	—36,2	$\frac{1}{2}$ (Rad. 6052 + Carrington 3580).
45.	8,9	22.37.12,92	+ 2,10	8.28.32,2	—36,5	3472 Carrington.

Remarques. — Les observations de M. Chofardet (C) ont été faites à l'équatorial coudé, et celles de M. Petit (P) à l'équatorial droit, sauf les observations de (416) et de ◄ Perrine (16 octobre 1897) faites à l'équatorial coudé.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE PLANÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial de $0^m,26$ d'ouverture);

PAR M. BORRELLY.

Dates.	T. m. Marseille.	ΔR.	ΔP.	N. dec.	R app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
				(416) Vaticana.					
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Nov. 11.	7. 1.59	—2.34,35	+ 7.33,1	5.5	0. 2.56,18	—$\bar{1}$,271	103.16.15,1	—0,864	*a*
15.	9. 3. 5	—3.11,60	—15.36,5	5.5	0. 2.18,93	+$\bar{2}$,905	102.53. 5,8	—0,868	*a*
				(6) Hébé.					
Nov. 17.	9.20.38	+0.44,61	— 0.40,3	5.5	5.15.41,60	—$\bar{1}$,583	92.33.44,3	—0,795	*b*
18.	9.14.52	—0. 4,34	+ 1.20,2	7.7	5.14.52,67	—$\bar{1}$,590	92.35.44,9	—0,795	*b*
19.	9. 1.13	—0.54,06	+ 2.59,6	5.5	5.14. 2,97	—$\bar{1}$,593	92.37.24,4	—0,794	*b*
20.	9. 2.56	—1.46,03	+ 4.23,1	5.5	5.13.11,02	—$\bar{1}$,586	92.38.48,0	—0,797	*b*
22.	8.33. 4	—3.32,16	+ 6.16,1	5.5	5.11.24,93	—$\bar{1}$,604	92.40.41,4	—0,796	*b*
24.	10.39.44	—1. 0,04	— 3.36,9	5.5	5. 9.27,98	—$\bar{1}$,378	92.41.19,5	—0,803	*c*
25.	9.29.50	—1.54,88	— 3.49,1	5.5	5. 8.33,15	—$\bar{1}$,521	92.41. 7,4	—0,802	*c*
27.	10.32.13	+0.20,84	+ 2.53,3	5.5	5. 6.33,40	—$\bar{1}$,354	92.39.46,5	—0,803	*d*
30.	8.34.45	—2.34,39	— 1.31,5	5.5	5. 3.38,21	—$\bar{1}$,564	92.35.22,1	—0,796	*d*
Déc. 18.	7.44.19	+1.50,38	+ 4.42,6	5.5	4.45.59,78	—$\bar{1}$,507	91. 7.27,0	—0,792	*e*
				(116) Peitho.					
Nov. 22.	9.30. 6	+1.51,72	+13.19,1	5.5	4. 6.19,61	—$\bar{1}$,460	65. 7.30,5	—0,525	*f*
23.	9.47. 1	+0.41,88	+10.11,8	5.5	4. 5. 9,78	—$\bar{1}$,398	65. 4.23,1	—0,504	*f*
24.	10.11.45	—0.28,78	+ 8. 5,6	5.5	4. 3.59,13	—$\bar{1}$,289	65. 2.16,9	—0,480	*f*
25.	9. 5.51	—1.34,76	+ 5.48,5	5.5	4. 2.53,16	—$\bar{1}$,482	64.59.59,8	—0,531	*f*
27.	9.40. 2	—3.55,12	+ 1. 7,8	5.5	4. 0.32,83	—$\bar{1}$,354	64.55.19,0	—0,490	*f*
				(61) Danaë.					
Nov. 25.	10.10.27	—0. 8,21	+14.45,4	7.7	5.53.46,59	—$\bar{1}$,708	41.17.28,7	—0,000	*g*
27.	10.56.36	—2.21,73	+10.21,3	5.5	5.51.33,14	—$\bar{1}$,598	41.13. 4,3	+$\bar{2}$,624	*g*
Déc. 18.	8.28.51	—0.24,05	—14.19,8	5.5	5.25.34,11	—$\bar{1}$,676	41.33.25,4	—$\bar{1}$,832	*h*
				DL Charlois.					
Nov. 27.	8.56.53	+2.13,08	+10.12,3	5.5	3.16.31,45	—$\bar{1}$,320	76.42.25,3	—0,664	*i*
29.	9.46.26	+0.42,51	— 2.37,4	5.5	3.14.58,87	—$\bar{3}$,005	76.56.48,4	—0,654	*j*
30.	7.50. 7	+0. 2,69	+ 3.38,0	8.8	3.14.19,05	—$\bar{1}$,468	77. 3. 3,8	—0,686	*j*

Digitized by Google

Dates.	T. m. Marseille.	ΔA.	ΔP.	N. dec.	A app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
					(106) Dione.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Déc. 18.	9.56.13	−2.30,13	+ 1.54,4	6.6	7.24.29,42	$-\bar{1}$,695	63.42. 2,9	−0,578	*k*
29.	9. 2.20	+0.28,01	− 2.45,1	5.5	7.15. 6,80	$-\bar{1}$,600	63. 8.26,6	−0,571	*l*
31.	8.26.49	−1.21,34	− 8.25,5	5.5	7.13.17,48	$-\bar{1}$,630	63. 2.46,1	−0,604	*l*
1898.									
Janv. 3.	8.48.23	−1.11,62	+14.26,0	5.5	7.10.30,14	$-\bar{1}$,586	62.54.57,2	−0,557	*m*
4.	8.28.33	−2. 6,98	+11.54,4	5.5	7. 9.34,80	$-\bar{1}$,606	62.52.25,6	−0,576	*m*
11.	8.34. 2	−0.42,22	− 9.39,0	5.5	7. 3. 5,43	$-\bar{1}$,546	62.36.37,9	−0,523	*n*
					DM Charlois.				
1897.									
Déc. 23.	10. 8.55	+1.29,52	− 0.58,2	5.5	4.38.36,75	$-\bar{2}$,549	72.51.44,4	−0,593	*o*
24.	8.15.29	+0.55,79	+ 7.33,3	5.5	4.38. 3,02	$-\bar{1}$,382	73. 0.15,9	−0,626	*o*
					(65) Cybèle.				
Déc. 29.	9.39.39	−2.12,96	− 4.17,2	5.5	7.51.44,93	$-\bar{1}$,570	72.30.48,8	−0,684	*p*
31.	9.10.37	−3.36,00	− 8.17,3	5.5	7.50.21,93	$-\bar{1}$,594	72.26.48,8	−0,684	*p*
1898.									
Janv. 3.	8.40.14	+0.41,91	+10.56,6	5.5	7.48.11,80	$-\bar{1}$,611	72.20.33,1	−0,693	*q*
4.	9. 1.55	−0. 1,31	+ 8.48,7	5.5	7.47.28,60	$-\bar{1}$,583	72.18.25,2	−0,675	*q*
11.	9.45.49	−2.29,85	−13.30,2	5.5	7.42. 7,94	$-\bar{1}$,456	72. 2.38,8	−0,625	*r*
					(17) Thétis.				
1897.									
Déc. 31.	10.17.32	+1.50,27	− 1.14,1	5.5	7.26.22,89	$-\bar{1}$,439	70.47. 8,9	−0,606	*s*
1898.									
Janv. 3.	10.25.40	−1.12,28	−12.15,1	4.4	7.23.21,71	$-\bar{1}$,374	70.36. 8,1	−0,591	*s*
4.	9.34.58	−2.12,03	−15.48,3	5.5	7.22.21,98	$-\bar{1}$,739	70.32.34,9	−0,618	*s*
18.	9.37.58	+0. 5,18	+ 5.13,1	6.6	7. 7.54,67	$-\bar{1}$,279	69.41. 5,7	−0,563	*t*
19.	7.51.29	−0.50,02	+ 1.49,7	5.5	7. 6.59,48	$-\bar{1}$,548	69.37.42,3	−0,629	*t*
20.	8.14.18	−1.49,76	− 1.50,1	5.5	7. 5.59,74	$-\bar{1}$,498	69.34. 2,5	−0,607	*t*
21.	8.15.34	−2.47,80	− 5.23,8	5.5	7. 5. 1,70	$-\bar{1}$,485	69.30.28,8	−0,603	*t*
22.	7.55. 9	−3.44,36	− 8.57,8	5.5	7. 4. 5,15	$-\bar{1}$,517	69.26.54,9	−0,614	*t*
24.	8.34.12	−5.37,44	−16. 1,2	5.5	7. 2.12,08	$-\bar{1}$,401	69.19.51,5	−0,577	*t*
					(247) Eukrate.				
Janv. 19.	10.14.43	+1.37,08	+13.32,8	5.5	7.30.41,17	$-\bar{1}$,487	28.28. 5,7	+0,396	*u*
20.	8.52.48	−3.47,97	− 5. 4,4	5.5	7.29. 1,67	$-\bar{1}$,755	28.35.43,6	+0,187	*v*
21.	9. 4.32	−5.31,41	+ 3.40,2	5.5	7.27.18,24	$-\bar{1}$,709	28.44.28,0	+0,261	*v*
22.	8.40. 1	−0.58,82	−10.23,2	5.5	7.25.38,85	$-\bar{1}$,754	28.57.55,3	+0,165	*x*
25.	8.52.48	+3.43,80	+ 0.13,5	5.5	7.20.56,61	$-\bar{1}$,673	29.23.22,4	+0,269	*y*
28.	9.42.17	+3.13,76	+ 2.47,8	5.5	7.16.39,27	$-\bar{1}$,364	29.57.18,5	+0,380	*z*
29.	8.16.51	+2. 1,06	+14. 1,2	5.5	7.15.26,57	$-\bar{1}$,703	30. 8.31,7	+0,179	*z*
31.	8.31.49	+1.53,40	− 0.21,0	5.5	7.13. 0,09	$-\bar{1}$,621	30.33.18,0	+0,255	*a′*

Digitized by Google

Dates.	T. m. Marseille.	ΔR.	ΔP.	N. de c.	R app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
					(213) Lilæa.				
1898.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JANV. 21.	10.34.51	—0.38,46	— 4.59,4	5.5	9.26.45,26	—ī,480	72.58.29,0	—0,644	*b′*
22.	9.15.22	—1.22,71	—10.15,1	5.5	9.26. 1,02	—ī,597	72.53.13,5	—0,692	*b′*
24.	9.45.46	+2. 5,88	+ 6.56,5	5.5	9.24.25,30	—ī,545	72.41.23,3	—0,662	*c′*
25.	9.36. 4	+1.17,20	+ 1. 6,7	5.5	9.23.36,64	—ī,553	72.35.33,5	—0,664	*c′*
					(306) Unitas.				
JANV. 22.	10.29. 9	+0.45,66	— 7.38,4	5.5	9.26.35,41	—ī,477	76.34. 0,9	—0,682	*d′*
24.	10.18.31	+0.28,10	+ 9.33,1	5.5	9.24.50,24	—ī,479	76.20.59,1	—0,681	*e′*
25.	10.19. 6	—0.26,34	+ 2.49,7	5.5	9.23.55,81	—ī,468	76.14.15,8	—0,678	*e′*
28.	10.45.22	—1.16,86	+ 5.25,8	5.5	9.21. 7,05	—ī,360	75.52.58,4	—0,658	*f′*
29.	9. 6.48	—2.10,03	— 0.56,3	5.5	9.20.13,89	—ī,561	75.46.36,4	—0,665	*f′*
31.	9.21.37	—4. 6,18	—14.54,8	5.5	9.18.17,77	—ī,524	75.32.38,0	—0,683	*f′*

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1897,0-98,0.	Réd. au j.	P moy. 1897,0-98,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	″	° ′ ″	″	
a.	6,5	0. 5.26,18	+4,35	103. 9. 6,4	—24,4	13 Armagh Cat. Second.
a.	»	»	+4,35	»	—24,1	Id.
b.	9	5.14.52,28	+4,71	92.34.38,3	—13,7	278 W_1 h. V.
b.	»	»	+4,73	»	—13,6	Id.
b.	»	»	+4,75	»	—13,5	Id.
b.	»	»	+4,77	»	—13,4	Id.
b.	»	»	+4,81	»	—13,0	Id.
c.	9,10	5.10.23,17	+4,85	92.45. 9,5	—13,1	176 W_1 h. V.
c.	»	»	+4,86	»	—13,0	Id.
d.	7	5. 6. 7,66	+4,90	92.37. 6,2	—13,0	57 W_1 h. V.
d.	»	»	+4,94	»	—12,6	Id.
e.	9	4.44. 4,25	+5,15	91. 2.56,5	—12,1	901 W_1 h. IV.
f.	9	4. 4.22,26	+5,63	64.54.30,3	—18,9	2 W_2 h. IV.
f.	»	»	+5,64	»	—19,0	Id.
f.	»	»	+5,65	»	—19,0	Id.
f.	»	»	+5,66	»	—19,0	Id.
f.	»	»	+5,69	»	—19,1	Id.
g.	7	5.53.47,51	+7,29	41. 2.44,7	— 1,4	11247 Lalande.
g.	»	»	+7,36	»	— 1,7	Id.
h.	8,9	5.25.50,48	+7,68	41.47.54,7	— 9,5	6370 Paris.
i.	9,10	3.14.13,19	+5,18	76.32.36,6	—23,6	206 W_1 h. III.
j.	8	3.14.11,18	+5,18	76.59.49,3	—23,5	205 W_1 h. III.
j.	»	»	+5,18	»	—23,5	Id.
k.	8	7.26.53,46	+6,09	63.39.59,4	+ 9,1	706 W_2 h. VII.

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1897,0-98,0.	Réd. au j.	℘ moy. 1897,0-98,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
l.	8	7.14.32,41	+6,38	63.11. 4,2	+ 7,5	356-357 W_2 h. VII.
l.	»	»	+6,41	»	+ 7,4	Id.
m.	8	7.11.39,00	+2,76	62.40.30,3	+ 0,9	270-271 W_2 h. VII.
m.	»	»	+2,78	»	+ 0,9	Id.
n.	9	7. 3.44,79	+2,86	62.46.16,7	+ 0,2	1881-1882 W_2 h. VI.
o.	9	4.37. 1,52	+5,71	72.52.57,3	—14,7	8852 Lalande.
o.	»	»	+5,71	»	—14,7	Id.
p.	8,9	7.53.52,03	+5,86	72.34.53,6	+12,4	1437 W_2 h. VII.
p.	»	»	+5,90	»	+12,5	Id.
q.	9	7.47.27,36	+2,53	72. 9.33,6	+ 2,9	1286 W_2 h. VII.
q.	»	»	+2,55	»	+ 2,9	Id.
r.	8	7.44.35,13	+2,66	72.16. 5,8	+ 3,2	1211 W_2 h. VII.
s.	8,9	7.24.27,91	+4,71	70.48.14,4	+ 8,6	635 W_2 h. VII.
s.	»	7.24.31,41	+2,58	70.48.21,6	+ 1,6	635 W_2 h. VII.
s.	»	»	+2,60	»	+ 1,6	Id.
t.	9	7. 7.46,72	+2,77	69.35.51,7	+ 0,9	145 W_2 h. VII.
t.	»	»	+2,78	»	+ 0,9	Id.
t.	9	7. 7.46,72	+2,78	69.35.51,7	+ 0,9	145 W_2 h. VII.
t.	»	»	+2,78	»	+ 0,9	Id.
t.	»	»	+2,79	»	+ 1,0	Id.
t.	»	»	+2,80	»	+ 1,0	Id.
u.	7	7.28.58,99	+5,10	28.14.33,1	— 0,2	8043 Arg. Œltzen.
v.	8,9	7.32.44,65	+4,99	28.40.48,3	— 0,3	8104 Arg. Œltzen.
v.	»	»	+5,00	»	— 0,5	Id.
x.	8,9	7.26.32,73	+4,94	29. 8.19,9	— 1,4	7994 Arg. Œltzen.
y.	8	7.17. 7,83	+4,98	29.23.12,0	— 3,1	7818 Arg. Œltzen.
z.	6	7.13.20,70	+4,81	29.54.34,8	— 4,1	2397 B. A. C.
z.	»	»	+4,81	»	— 4,3	Id.
a'.	9	7.11. 1,97	+4,72	30.33.43,9	— 4,9	7714 Arg. Œltzen.
b'.	8,9	9.27.21,08	+2,64	73. 3.18,5	+ 9,9	522-523 W_2 h. IX.
b'.	»	»	+2,65	»	+10,1	Id.
c'.	8	9.22.16,71	+2,71	72.34.16,9	+ 9,9	420 W_2 h. IX.
c'.	»	»	+2,73	»	+ 9,9	Id.
d'.	6,7	9.25.47,15	+2,60	76.41.29,7	+ 9,6	11702 Paris.
e'.	9	9.24.19,49	+2,65	76.11.16,3	+ 9,7	468 W_1 h. IX.
e'.	»	»	+2,66	»	+ 9,8	Id.
f'.	8	9.22.21,19	+2,72	75.47.22,7	+ 9,9	11646 Paris.
f'.	»	»	+2,73	»	+10,0	Id.
f'.	»	»	+2,76	»	+10,1	Id.

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES PLANÈTES TÉLESCOPIQUES. Thèse de M. Jean Mascart. Paris, Gauthier-Villars, 1897.

Le Travail de M. Mascart sur les petites planètes est nettement divisé en deux Parties :

La première, d'ordre purement expérimental, contient la discussion des éléments planétaires fournis par l'observation et une étude systématique des valeurs mêmes de ces éléments; toutes les conséquences et déductions indiquées ne sauraient y être, en quelque sorte, qu'inductives, en tant par exemple qu'elles conduisent à admettre l'influence perturbatrice de Jupiter. Les considérations théoriques sont soigneusement écartées : tout d'abord l'action d'une force perturbatrice, de nature d'ailleurs quelconque, est mise en évidence; puis l'étude plus détaillée des lacunes que l'on rencontre dans cet anneau d'astéroïdes conduit à considérer la planète Jupiter comme le véritable corps perturbateur, qui interviendrait dans le cas de relations de commensurabilité entre son moyen mouvement et celui d'une petite planète.

Le fait concorde avec tout ce que l'on connaissait déjà, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique, sur l'existence des lacunes principales, et il ne reste qu'à se demander si une extension aussi lointaine peut être permise, car elle suppose partiellement, en principe, une distribution arbitraire de ces corpuscules dans l'espace, hypothèse qui, pour être la plus simple, ne paraît cependant pas la plus favorable aux conditions cosmogoniques des origines.

La seconde Partie du travail, en revanche, est exclusivement théorique, mais paraît sans relation avec la première Partie; mais ici les difficultés sont de tout autre nature. Sans doute la première pensée qui vient à l'esprit est de retrouver, par la théorie, toutes les conclusions expérimentales du début; malheureusement un tel problème, dans toute sa généralité, est encore inabordable et l'auteur a dû se restreindre à traiter un cas particulier de mouvement plan dans le problème des trois corps tout au moins pour ce qui est d'une solution approchée et réductible en Tables numériques.

Première Partie.

L'introduction comporte un historique des questions relatives aux petites planètes : on y voit l'évolution des idées, la succession des hypothèses proposées et des travaux qu'elles suscitèrent, en un mot, l'état

Digitized by Google

actuel de nos connaissances à ce sujet. Il faut, dans ce résumé impersonnel, noter une remarque assez curieuse : la loi de Bode est applicable aux distances à Saturne et à Jupiter de leurs nombreux satellites, en changeant, bien entendu, la valeur des constantes et, bien qu'elle soit nécessairement empirique, elle pourrait peut-être intervenir directement dans les hypothèses cosmogoniques comme loi osculatrice.

Pour ce qui est de l'hypothèse d'Olbers, définitivement abandonnée comme origine commune à tous les astéroïdes, l'auteur admet pour probable que plusieurs petites planètes constituent effectivement des fragments de masses primitives plus considérables; la quasi-identité d'éléments des orbites invoquée n'est pas une raison suffisante, même si elle n'était pas imputable au seul hasard, et la question demanderait à être étudiée plus complètement.

Au point de vue expérimental plusieurs questions intéressantes se présentent; si l'on range toutes les petites planètes dans un ordre tel qu'un de leurs éléments, choisi *a priori*, aille constamment en croissant, on devra étudier la nature de cette distribution particulière de l'anneau ainsi que les singularités que peuvent offrir, et cette distribution, et les autres éléments comparés à celui qui sert de base à la classification. En regardant les choses de plus près, on peut voir également comment les récentes découvertes enrichissent l'anneau d'astéroïdes, d'une façon régulière ou non.

Cette étude commence par l'un des éléments les plus importants, le moyen mouvement, et conduit naturellement à la discussion des lacunes; on remarque, en effet, aisément l'absence de planètes dont les moyens mouvements présenteraient un rapport simple avec celui de Jupiter, ce qui, dans la série régulière de ces éléments, constitue ce que l'on appelle une *lacune*. Mais si la théorie est affirmative sur la présence d'une lacune lorsque le moyen mouvement correspondant présenterait avec celui de Jupiter un rapport simple comme 2, 3, ..., l'assertion est d'autant moins nette que ce rapport est plus compliqué. Il s'agissait précisément d'étudier, pour les fractions complexes, toutes les conséquences d'une telle action perturbatrice et de voir si l'on pouvait confirmer ici la théorie par l'observation.

Pour augmenter encore les épreuves à faire subir aux observations, l'auteur formule une hypothèse assez rationnelle : les planètes anciennes, les plus rapidement perçues, doivent avoir en général un éclat, un diamètre apparents et, par suite, une masse supérieure à ceux des planètes récentes; ceci constitue une loi, approximative sans doute, qui tolère même certainement des exceptions, mais on peut admettre cependant, d'une manière simple, que la masse varie en sens inverse du numéro d'ordre de la planète à laquelle elle correspond.

Digitized by Google

Dans ces conditions :

1° Les maxima de densité de l'anneau (nombre de planètes dont les moyens mouvements sont voisins d'une valeur donnée), minima de lacune en nombre et en grandeur, doivent correspondre à des relations de commensurabilité compliquées, ne pouvant avoir qu'une très faible influence dans la fonction perturbatrice.

Ces maxima sont voisins, en effet, des fractions $\frac{28}{13}$ et $\frac{57}{22}$.

2° Soient

$$\ldots n_{-2},\quad n_{-1},\quad n_1,\quad n_2,\quad \ldots$$

les moyens mouvements croissants d'une série de planètes : si la différence $n_1 - n_{-1}$, constituant une lacune, est due à l'action de Jupiter par relation de commensurabilité, elle doit être supérieure aux différences voisines $n_{-2} - n_{-3}$, $n_{-1} - n_{-2}$, ... qui, jusqu'ici, n'ont aucune raison d'être.

Étudiée avec soin tout le long de l'anneau, cette conclusion comporte une vérification très intéressante.

3° On peut encore penser *a priori* que, aux environs des relations de commensurabilité, l'on doit trouver *a priori* autant de planètes récentes que de planètes anciennes, puisque aucune cause ne semble présider encore à leur distribution d'une manière absolue.

Ici, cependant, l'observation fournit un résultat étrange et, aux voisinages des lacunes, il paraît exister plus de planètes récentes que d'anciennes; si l'on pouvait admettre que la masse intervienne par son introduction non linéaire dans les intégrations, cela augmenterait effectivement la perturbation pour les planètes à masses plus considérables, les plus anciennes en général. Mais cette conclusion est trop avancée, vu l'état de la théorie des petites planètes, et l'on ne peut encore attribuer à ce fait que la valeur d'une remarque singulière.

4° Si l'on ne peut enfin supposer que toutes les excentricités fussent originellement égales, jusqu'ici, au moins, doit-on admettre qu'elles aient été, dans une certaine mesure, arbitrairement dispersées; or, en général, l'action perturbatrice augmente l'excentricité de l'orbite du corps troublé, c'est-à-dire que, aux environs d'une fraction lacunaire dont on s'écarte, l'excentricité doit aller en diminuant, surtout pour les planètes à faible masse.

En résumé, il semble difficile maintenant de nier l'influence de Jupiter, même pour des termes d'ordre élevé dans la fonction perturbatrice, alors que toutes les conséquences logiques d'une telle action sont aussi généralement confirmées par l'observation. Sans doute il existe quelques rares exceptions, mais elles ne doivent pas être prises en trop grande considération : elles peuvent tenir, notamment, au faible nombre de

Digitized by Google

planètes sur lequel on est obligé de raisonner dans certains cas; certains éléments sont susceptibles d'être sensiblement modifiés par de nouvelles observations; la masse n'est pas, toujours, en raison inverse du numéro d'ordre....

Néanmoins il existe, pour tant de fractions de commensurabilité considérées, une proportion considérable de cas favorables, et cette proportion, chose importante, s'est améliorée entre deux années successivement considérées, en sorte que les conclusions semblent encore affermies par cette amélioration.

Cette première Partie comprend en outre l'étude expérimentale des petites planètes, indépendamment de toute considération théorique : la distribution des astéroïdes dans l'anneau et selon tous les autres éléments géométriques de leurs trajectoires; un Chapitre spécial est réservé à l'étude comparée des trois éléments les plus importants au point de vue théorique, grand axe, excentricité et inclinaison; les éléments des petites planètes sont comparés à ceux des grandes planètes du système solaire, et quelques rapprochements intéressants sont faits avec les trajectoires des comètes; enfin, les analogies les plus importantes sont indiquées entre les éléments des petites planètes : cette recherche, faite systématiquement, a révélé un grand nombre de rapprochements non encore signalés qui seront ultérieurement utiles pour vérifier les indications de la théorie.

Pour terminer, l'Auteur indique la probabilité ou mieux, l'espérance mathématique de semblables coïncidences et en donne une application; il est à regretter que, malgré les hypothèses inhérentes à ce genre de recherche, l'étude n'ait pas été poussée plus avant dans cette voie, pour mieux faire ressortir l'écart entre la théorie et l'observation.

Deuxième Partie.

Le problème des trois corps, notamment pour le cas qui va être considéré, a fait l'objet de deux méthodes bien distinctes; on peut, avec MM. Tisserand et Newcomb, partir des équations différentielles des éléments de l'orbite, ou bien, d'un autre côté, chercher des approximations successives dans les équations différentielles des coordonnées elles-mêmes, comme l'ont fait Gyldén et M. Harzer. M. Callandreau appliquait encore récemment ce dernier procédé avec succès dans l'étude de quelques lacunes.

L'Auteur s'est inspiré de ce dernier travail et, en conduisant l'approximation d'une manière un peu différente, a su conserver dans ses calculs un certain nombre de paramètres algébriques, de sorte que les résultats soient applicables, d'une manière générale, à toutes les lacunes.

Digitized by Google

Il s'agit alors d'étudier les perturbations, dues à Jupiter, dans le mouvement d'une petite planète dont la masse est, bien entendu, négligeable. La simplification provient de ce que tous les mouvements sont supposés s'effectuer dans un même plan, celui de l'orbite de Jupiter, supposée elle-même circulaire.

Le problème est ainsi ramené à l'étude de l'équation

$$A \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + B + Q = 0,$$

où Q est une quantité petite, fonction de ρ et de ses dérivées successives; et l'on applique à cette équation la méthode d'approximation de Laplace.

Sans pouvoir entrer ici dans le détail de calculs longs et pénibles, nous dirons que les formules finales sont fournies avec le cube de l'excentricité comme approximation exacte; cette approximation est-elle déjà suffisante? Malgré la longueur des calculs numériques, l'Auteur n'a pas hésité à répondre à cette critique en effectuant l'application jusqu'au bout pour une planète particulière, Pompéia, découverte en 1879 par C.-H.-F. Peters. Il en résulte que le terme séculaire le plus important, tous les autres qui pourraient venir le compenser en partie étant supprimés, exige quarante ans pour modifier de $\frac{1}{350}$ la distance de Pompéia au Soleil; ceci prouve bien que l'approximation est suffisante pour le faible intervalle de temps depuis lequel ces planètes sont connues, ainsi que l'indétermination qui règne encore sur leurs éléments.

Enfin, il est à souhaiter que la réduction numérique de toutes ces formules puisse être effectuée pour étudier de plus près, en Tables, la fonction perturbatrice séculaire qui intervient ainsi que l'influence de l'excentricité, du périhélie et de l'écart que présente une planète avec la relation de commensurabilité la plus voisine.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Pola. — *Veröffentlichungen des hydrographischen Amtes der K. und K. Kriegs-Marine in Pola.*

— Gruppe II. Jahrbuch der met. und erdmagn. Beobachtungen. Neue Folge. I Band (XXV Jahrgang der ganzen Reihe). — Beobachtungen des Jahres 1896. Pola, 1897.

— Gruppe III. Relative Schwerebestimmungen durch Pendelbeobachtungen. 1 Heft (1893-96). Pola, 1897.

— Gruppe IV. Erdmagnetische Reise-Beobachtungen. 1 Heft (1895-96). Pola, 1897.

Digitized by Google

POLA. — Gruppe V. Geschichtliche Darstellung der Entwickelung des K. und K. hydrogr. Amtes, von *Anton Gareis*. Pola, 1897.

PETERSBOURG. — *Academie des Sciences de Saint-Pétersbourg*. L'éclipse totale de Soleil du 8-9 août 1896. Saint-Pétersbourg, 1897.

POULKOVO. — *Mémoires et Communications des Astronomes de Poulkovo*. Saint-Petersbourg, 1897.

RIO DE JANEIRO. — *Annuario publicado pelo Observatorio de Rio de Janeiro* para o anno de 1897. Rio de Janeiro, 1896.

SCHIAPARELLI (G.). — *Rubra canicula*. Nuove considerazioni circa la mutazione di colore chi se dice avvenuta in Sirio. Rovertero, 1897.

— *Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte*. Memoria quarta (1883-84). Roma, 1896. — Memoria quinta. Roma, 1897. 2 brochures.

SMITHSONIAN INSTITUTION. — *Annual Report*, 1895.

SMITHSONIAN REPORT. — *U. S. National Museum*, 1893 et 1894. 2 vol.

TACUBAYA. — *Annuario del Observatorio astronomico nacional de Tacubaya* para el año de 1898 (año XVIII). Mexico, 1897.

TEYLER. — *Archives du Musee Teyler*. Serie II, vol. V, 3e partie. Harlem, 1897.

TOKYO. — *Imperial University of Japan. The Calendar* 2556-57 (1896-97). Tokyo, 1897.

VIENNE. — *Verhandlungen der osterreichen Gradmessung-Commission*, Protokoll. 21 april 1897. Wien, 1897.

WASHINGTON. — *Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory* :

— For the year ending June 30, 1894. Washington, 1895.

— For the year ending June 30, 1897. Washington, 1897.

ZÜRICH. — *Publicationen der Sternwarte* des Eidg. Polytechnikums zu Zurich. Band I. — Herausgegeben von A. Wolfer. Zurich, 1897.

BERLIN. — *Berliner Astronomisches Jahrbuch für* 1900. Berlin, 1898.

BOLOGNE. — *Memorie della R. Accademia delle Scienze*. Serie V, tomo V (Memorie della Sezione delle Scienze fisiche e matematiche). Bologna, 1895-1896.

— *Rendiconti*, nuova serie, vol. II, fasc. 1, 2, 3 et 4 (ultimo), 1896-1897.

BONN. — *Veröffentlichungen der K. Sternwarte zu Bonn*, N° 2 : Unt. über die Eigenbewegungen von 535 Sternen ... von F. Küstner. Bonn, 1897.

CAEN. — *Mém. de l'Acad. nat. des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen*. Caen, 1897.

HAMMER (E.). — *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*. 2e éd., 1 vol. Stuttgard, 1897.

LAISANT (C.-A.). — *La Mathematique*. Philosophie. Enseignement. 1 vol. Paris, 1898.

RIPERT (L.). — *La dualite et l'homographie dans le triangle et le tetraèdre*. Paris, 1898.

ROME. — *Annali dell'Ufficio centrale meteorologico e geodinamico italiano*. Serie seconda, vol. XIV, part. II, 1895. — Vol. XVI, part. I, 1894.

SAN FERNANDO. — *Almanaque nautico* para el año 1898. San Fernando, 1897.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LES FORMULES DE NUTATION BASÉES SUR LES DÉCISIONS DE LA CONFÉRENCE DE 1896;

PAR M. S. NEWCOMB.

La Conférence internationale des étoiles fondamentales, réunie à Paris en 1896, ayant adopté pour la constante de la nutation la valeur

$$N = 9'',210,$$

il devenait nécessaire d'établir un ensemble de formules, basées sur cette constante, pour la réduction des positions apparentes des étoiles. C'est ce qui forme le sujet de la présente Note.

Remarquons tout d'abord que la quantité N n'est pas une constante absolue, étant de la forme

$$N = K \cos \varepsilon,$$

où K peut être regardé comme une constante absolue, ε étant l'obliquité moyenne de l'écliptique, variable avec le temps.

En admettant que la valeur $9'',21$, adoptée par la Conférence, corresponde à l'époque 1900, on voit facilement que la valeur générale sera de la forme

$$N = 9'',210 + 0'',0009\,T,$$

T étant le temps, compté à partir de 1900, exprimé en prenant le siècle comme unité.

De toutes les théories de la nutation qui ont été proposées, la plus complète et la plus rigoureuse est celle d'Oppolzer (¹); on en fera usage dans ce travail.

Les formules d'Oppolzer se rapportent à l'écliptique fixe de 1850,0. Pour pouvoir les corriger, nous ramènerons nos données fondamentales également à l'époque 1850,0.

La valeur de N, trouvée par d'Oppolzer, est

Pour l'époque 1850..... $N = 9'',2365$
Pour l'époque 1900..... $N = 9,2370$

(¹) *Lehrbuch zur Bahnbestimmung*, etc., t. I, pages 183 à 185.

Digitized by Google

Par suite tous les coefficients de la nutation lunaire, d'après d'Oppolzer, doivent être multipliés par le facteur

$$\frac{9'',2095}{9,2365} = 1 - 0,00292.$$

Si au lieu des N, on compare les valeurs de la partie de la précession luni-solaire provenant de l'action de la Lune, on trouve pour facteur (*voir* ci-après, p. 242 *in fine*)

$$\frac{34'',388}{34,485} = 1 - 0,00281.$$

Pour avoir l'expression complète de la nutation, il faut calculer séparément les actions du Soleil et de la Lune, et, par suite, déterminer la masse de la Lune ainsi que « l'ellipticité mécanique » de la Terre correspondant à nos données. J'emprunte les équations qui suivent à mon résumé des *Elements and constants*, pages 131 et 132.

Posons

N la constante de la nutation,

P la partie de la précession luni-solaire produite par la Lune en 365j,25,

P' la partie de la précession luni-solaire produite par le Soleil,

ε l'obliquité de l'écliptique,

μ le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre,

A et C les moments d'inertie de la Terre.

On aura les relations

$$N = [5,40289] \cos\varepsilon \frac{\mu}{1+\mu} \frac{C-A}{C},$$

$$P = [5,975052] \cos\varepsilon \frac{\mu}{1+\mu} \frac{C-A}{C},$$

$$P' = [3,72509] \cos\varepsilon \frac{C-A}{C}.$$

De la valeur N = 9'',210 adoptée par la Conférence, pour 1900,0, on déduit

$$\log\left[\frac{\mu}{1+\mu} \frac{C-A}{C}\right] = 5,59882$$

et, par suite, on trouve

$$P = 34''.389 \text{ pour } 1900,$$
$$P' = 34,388 \text{ pour } 1850,$$

Digitized by Google

Ma valeur de la précession luni-solaire en $365^j,25$ est

$$P + P' = 50'',372 \quad \text{pour } 1900,$$
$$P + P' = 50,370 \quad \text{pour } 1850.$$

On déduit de là

$$P' = 15'',983 \quad \text{pour } 1900,$$
$$P' = 15,982 \quad \text{pour } 1850.$$

D'Oppolzer donnant, pour 1850,

$$P' = 15'',885,$$

il s'ensuit que les termes de la nutation solaire déduits par lui doivent être multipliés par le facteur

$$\frac{15'',982}{15,885} = 1,00611.$$

Le terme principal de la nutation lunaire est

$$-K \sin \Omega,$$

et j'ai trouvé l'expression

$$K = [5,40289] \frac{\mu}{1+\mu} \frac{C-A}{C} \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon} = [1,00171] \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon},$$

ce qui donne pour K les valeurs suivantes :

Époques.	1850.	1900.	2000.
Valeur de K.....	17",2259	17",2346	17",2520

Remarquons que si l'on corrige la valeur obtenue par d'Oppolzer, pour 1850, à l'aide des facteurs donnés page 242, on trouve respectivement

$$17'',2236 \quad \text{et} \quad 17'',2255,$$

suivant que l'on emploie le premier ou le second facteur.

Pour avoir les constantes pour la réduction des positions des étoiles, on divise la valeur de la nutation en longitude $\delta\psi$ par la précession luni-solaire p_0 dans une année solaire. On a

En 1900..... $p_0 = 50'',3708$
En 2000..... $p_0 = 50'',3758$

En opérant ainsi on obtient pour coefficient du terme principal

$$-0,34215 \quad \text{pour } 1900$$

et

$$-0,34246 \quad \text{pour } 2000.$$

Digitized by Google

L'expression $\tau + \frac{\delta\psi}{p_0}$, dans laquelle τ est la fraction de l'année solaire, est représentée par A dans la notation allemande et américaine et par C dans celle employée en Angleterre et en France; de même, en désignant par $\delta\varepsilon$ la nutation en obliquité, l'expression $-\delta\varepsilon$ est représentée par B en Allemagne et en Amérique et par D en Angleterre et en France.

On peut trouver les parties principales de $\delta\psi$ et $\delta\varepsilon$ dans mes *Tables of the Sun,* mais il importe de remarquer que les constantes de ces Tables ne sont pas celles adoptées par la Conférence de Paris et que, de plus, il s'est glissé quelques inexactitudes dans les données figurant dans l' « Introduction » de ces Tables.

C'est ainsi que j'ai donné pour terme principal de la nutation lunaire $-(17'',234 + 0'',017\,T)\sin\Omega$ sans remarquer que, selon la théorie admise, la valeur $17'',234$ est celle qui correspond à l'époque 1850, tandis que, dans les autres formules de mes Tables, T est compté à partir de 1900.

Le changement apporté par la Conférence à la valeur employée dans mes *Tables of the Sun,* se trouve, par hasard, être égal à l'accroissement du coefficient du terme considéré, en cinquante ans; par suite la valeur $-17'',234$ se trouve être maintenant celle de la Conférence pour 1900. Il résulte de là que, pour trouver la nutation de la Conférence, il suffit de remplacer, en tête des colonnes de la Table XXXII de mes *Tables of the Sun,* les dates 1850 et 1950 respectivement par 1900 et 2000.

Dans cesdites Tables, j'ai employé $-1'',257$ pour coefficient du terme principal de la nutation solaire, tandis que, suivant la théorie actuelle, on a pour coefficient de $\sin 2L$:

Action du Soleil.....	$-1'',2704$
Action de la Lune.....	$-0'',0020$
Action totale.....	$-1'',272$

Le coefficient de mes Tables est donc trop petit de $0'',015$, valeur négligeable dans le cas du Soleil et des planètes; mais, pour assurer la rigueur théorique des nombres, on doit multiplier les $\delta\psi$ de la Table XXXII par le facteur 1,012 et les $\delta\varepsilon$ par le facteur 1,009.

Remarquons encore que les termes

$$+0'',126\sin(L-\pi) + 0'',021\sin(L+\pi)$$

Digitized by Google

peuvent être réduits en un seul. On trouve ainsi

$$0'',107 \sin(L + 74'',5) \quad \text{pour } 1900,$$
$$0'',108 \sin(L + 72'',2) \quad \text{pour } 2000.$$

Le Tableau ci-après renferme les termes de la nutation en longitude $\delta\psi$ et de la nutation en obliquité $\delta\varepsilon$ dont les coefficients surpassent $0'',002$, arrangés suivant leur ordre de grandeur.

Ces coefficients sont basés sur la théorie d'Oppolzer et sur les valeurs adoptées pour les constantes de la précession et de la nutation par la Conférence des étoiles fondamentales, réunie à Paris en 1896.

Dans ce Tableau l'argument de chaque terme est présenté sous deux formes : celle d'Oppolzer, qui a suivi la notation de Hansen, et une autre qui est plus conforme à la notation usuelle.

Notation d'Oppolzer-Hansen.

g = anomalie moyenne de la Lune.
g' = anomalie moyenne du Soleil.
ω = distance du nœud de l'orbite de la Lune à son périgée.
ω' = distance du nœud de l'orbite de la Lune au périgée du Soleil.
☊ = longitude du nœud de l'orbite lunaire.

Notation Newcomb.

☾ = longitude moyenne de la Lune.
L = longitude moyenne du Soleil.
D = ☾ — L.
g_1 = anomalie moyenne de la Lune.
g = anomalie moyenne du Soleil.
π_1 = longitude du périgée de la Lune.
π = longitude du périgée du Soleil.

La troisième et la cinquième colonne du Tableau renferment les coefficients des sinus des arguments, dans les expressions de $\delta\psi$ et de C; la quatrième et la sixième colonne contiennent les coefficients des cosinus des arguments, dans les expressions de $\delta\varepsilon$ et de D.

Comme l'unité de la quatrième décimale, dans le coefficient de C, équivaut à $0'',005$, la cinquième décimale ne présente aucune importance; je l'ai cependant donnée conformément à la coutume astronomique. On peut omettre plusieurs des termes, sans nuire à l'exactitude de nos résultats.

Digitized by Google

TABLEAU DES COEFFICIENTS DE LA NUTATION, POUR 1900.

ARGUMENTS suivant Oppolzer-Hansen.	ARGUMENTS suivant Newcomb.	$\delta\psi$ Nutation en longitude. — sinus.	$\delta\varepsilon$ Nutation en obliquité. — cosinus.	C (¹). — sinus.	D (²). — cosinus.
		Action de la Lune.			
☊	☊	−17″,234	+9″,210	−0,34215	−9″,210
		− 0,017 T	+0,0009 T	−0,00031 T	−0,0009 T
2☊	2☊	+ 0,209	−0,090	+0,00415	+0,090
$2g + 2\omega + 2$☊	2☾	− 0,204	+0,088	−0,00405	−0,089
g	g_1	+ 0,068		+0,00135	
$2g + 2\omega +$ ☊	2☾ − ☊	− 0,034	+0,018	−0,00068	−0,018
$3g + 2\omega + 2$☊	2☾ $+ g_1$	− 0,026	+0,011	−0,00052	−0,011
$g - 2g' + 2\omega - 2\omega'$	2D $- g_1$	+ 0,015		+0,00030	
$2g' + 2\omega' +$ ☊	2L − ☊	+ 0,012	−0,007	+0,00025	+0,007
$g + 2\omega + 2$☊	2☾ $- g_1$	+ 0,011	−0,005	+0,00023	+0,005
$2g - 2g' + 2\omega - 2\omega'$	2D	+ 0,006		+0,00012	
$g +$ ☊	$g_1 +$ ☊	+ 0,006	−0,003	+0,00012	+0,003
$g -$ ☊	$g_1 -$ ☊	+ 0,006	+0,003	+0,00011	−0,003
$2\omega +$ ☊	$2\pi_1 -$ ☊	+ 0,005	−0,003	+0,00010	+0,003
$3g - 2g' + 4\omega - 2\omega' + 2$☊	2D + 2☾ $- g_1$	− 0,005	+0,002	−0,00010	−0,002
$2g' - 2\omega + 2\omega'$	2L $- 2\pi_1$	+ 0,004		+0,00009	
$3g + 2\omega +$ ☊	3☾ $- \pi_1 -$ ☊	− 0,004	+0,002	−0,00009	−0,002
$4g - 2g' + 4\omega - 2\omega' + 2$☊	4☾ − 2L	− 0,003		−0,00006	
$2g$	$2g_1$	+ 0,003		+0,00006	
$4g + 2\omega + 2$☊	4☾ $- 2\pi_1$	− 0,003		−0,00005	
$g + 2g' + 2\omega' + 2$☊	☾ + 2L $- \pi_1$	+ 0,003		+0,00005	
$2g + 2\omega$	2☾ − 2☊	+ 0,002		+0,00005	
$2g' + 2\omega'$	2L − 2☊	− 0,002		−0,00004	
$2g' + 2\omega' + 2$☊	2L	− 0,002		−0,00004	
		Action du Soleil.			
$2g' + 2\omega' + 2$☊	2L	− 1″,270	+0″,551	−0,02522	−0,551
g'	L − π	+ 0,126		+0,00251	
$3g' + 2\omega' + 2$☊	3L − π	− 0,050	+0,022	−0,00099	−0,022
$g' + 2\omega' + 2$☊	L + π	+ 0,021	−0,009	+0,00042	+0,009

(¹) A suivant la notation allemande et américaine.
(²) B suivant la notation allemande et américaine.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE PETITES PLANÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE D'ALGER (équatorial coudé de $0^m,318$ d'ouverture),

PAR MM. RAMBAUD ET SY.

Dates.	T. m. d'Alger.	ΔÆ.	ΔΦ.	N. de c.	Æ app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	✱	Obs.
				(61) Danae.						
1897-98.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″			
DÉC. 15.	9.45.44	—4.43,75	+11.33,1	15:10	5.29.19,13	$\bar{1}$,568 *n*	+48.36.15,4	0,030 *n*	*a*	R
16.	9.10.39	—5.58,75	+ 8.34,7	15:10	5.28. 4,14	$\bar{1}$,649 *n*	+48.33.17,2	$\bar{1}$,823 *n*	*a*	R
17.	9.27.12	+0.48,75	+17.45,2	16:10	5.26.46,95	$\bar{1}$,589 *n*	+48.29.59,2	$\bar{1}$,980 *n*	*b*	R
				(6) Hebe.						
DÉC. 16.	10.17.36	—0.15,37	+ 4.39,1	17:14	4.47.41,50	$\bar{2}$,983 *n*	— 1.21.37,1	0,735	*c*	R
24.	9. 0.46	+0.59,73	—11.18,4	18:12	4.41. 5,84	$\bar{1}$,238 *n*	— 0.17. 1,6	0,725	*d*	R
27.	9.22.52	—1. 5,66	+16.55,8	12:12	4.39. 0,45	$\bar{1}$,008 *n*	+ 0.11.12,3	0,720	*d*	R
				(386) 1894 AY.						
DÉC. 24.	9.59.32	+0.15,69	—13. 3,9	12:10	5.43. 4,82	$\bar{1}$,256 *n*	— 7.37.50,9	0,785	*e*	R
27.	10.32.33	+1.55,14	— 5.21,7	12:12	5.40.34,26	$\bar{2}$,933 *n*	— 7.25.38,6	0,788	*f*	R
28.	10.30. 0	+1. 6,84	— 0.47,6	14:14	5.39.45,97	$\bar{2}$,910 *n*	— 7.21. 4,7	0,787	*f*	R
29.	10.16.13	+0.19,71	+ 5.53,3	10:10	5.38.58,85	$\bar{2}$,999 *n*	— 7.14.23,9	0,786	*f*	R
JANV. 3.	9.28.37	+0.14,09	+ 1.30,3	22:12	5.35.15,73	$\bar{1}$,171 *n*	— 6.48.22,5	0,781	*g*	S
				(385) Ilmatar.						
DÉC. 28.	9.32.50	—1. 9,81	— 1.24,9	20:14	4. 2.25,68	3,340	+40.58.13,0	$\bar{1}$,825 *n*	*h*	R
29.	9.33.52	—1.51,91	— 7.21,9	18:12	4. 1.43,58	$\bar{1}$,248	+40.52.16,1	$\bar{1}$,815 *n*	*h*	R
				(17) Thétis.						
JANV. 13.	9. 5.43	—0.52,09	+ 6.52,5	15:10	7.13. 1,23	$\bar{1}$,496 *n*	+20. 0.25,0	0,485	*i*	R
13.	9.20.42	—0.52,64	+ 6.55,1	15:10	7.13. 0,68	$\bar{1}$,457 *n*	+20. 0.27,6	0,471	*i*	S
14.	9.56. 9	—1.56,16	+10.46,5	10:10	7.11.57,19	$\bar{1}$,321 *n*	+20. 4.18,7	0,438	*i*	R
18.	9.17.17	—1.20,92	— 6.26,8	15:10	7. 7.55,27	$\bar{1}$,393 *n*	+20.18.58,1	0,447	*j*	R
18.	9.33.24	—1.21,55	— 6.23,9	15:12	7. 7.54,64	$\bar{1}$,334 *n*	+20.19. 1,0	0,434	*j*	S
19.	9.41.18	—0.55,08	— 1.30,2	15:10	7. 6.54,60	$\bar{1}$,279 *n*	+20.22.36,6	0,424	*k*	R
19.	9.54.52	—0.55,59	— 1.27,5	15:10	7. 6.54,09	$\bar{1}$,209 *n*	+20.22.39,3	0,415	*k*	S

Digitized by Google

Dates.	T. m. d'Alger.	ΔR.	ΔD.	N. de c.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★	Obs.
					(247) Eukrate.					
1897-98.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″			
JANV. 19.	10.50.25	+1.32,66	—13.46,9	15:20	7.30.36,89	$\bar{1}$,266 *n*	+61.31.42,2	0,558 *n*	*l*	S
19.	11.13.13	+1.31,78	—13.55,4	15:20	7.30.36,01	$\bar{2}$,936 *n*	+61.31.33,7	0,568 *n*	*l*	R
25.	9.17.50	—1.43,97	— 6. 2,6	15:20	7.20.54,28	$\bar{1}$,619 *n*	+60.36.22,9	0,475 *n*	*m*	S
25.	9.38. 2	—1.45,35	— 6.12,3	15:20	7.20.52,90	$\bar{1}$,529 *n*	+60.36.13,2	0,505 *n*	*m*	R
26.	9. 2.47	+2.14,91	—11. 6,8	15:20	7.19.27,59	1,653 *n*	+60.25.42,8	0,454 *n*	*n*	S
26.	9.27.52	+2.13,36	—11.20,7	15:20	7.19.26,04	$\bar{1}$,550 *n*	+60.25.28,9	0,496 *n*	*n*	R
28.	9.28.54	—3. 8,63	— 4.22,5	12:16	7.16.40,09	$\bar{1}$,484 *n*	+60. 2.48,4	0,503 *n*	*o*	R
28.	9.53.20	—3. 9,94	— 4.34,5	12:16	7.16.38,78	$\bar{1}$,317 *n*	+60. 2.36,4	0,527 *n*	*o*	S
FÉVR. 1.	10.34.55	+0.43,93	— 4.34,1	10:10	7.11.47,37	2,661	+59.12.38,5	0,530 *n*	*p*	S
1.	10.47.18	+0.43,04	— 4.40,5	10:10	7.11.46,48	$\bar{2}$,987	+59.12.32,1	0,526 *n*	*p*	R
2.	8.51.19	—0.30,92	—10. 2,5	10:10	7.10.48,30	$\bar{1}$,533 *n*	+59. 0.27,7	0,467 *n*	*q*	S
2.	9. 7.53	—0.31,88	—10.11,9	10:10	7.10.47,84	$\bar{1}$,445 *n*	+59. 0.18,3	0,489 *n*	*q*	R

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1897-98.	Réd. au j.	D moy. 1897-98.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	″	° ′ ″	″	
a.	7,4	5.33.55,15	+7,73	+48.24.34,7	+ 7,6	A. G., n° 4645.
a.	»	»	+7,74	»	+ 7,8	Id.
b.	7,3	5.25.50,47	+7,73	+48.12. 5,5	+ 8,5	A. G., n° 4531.
c.	8,9	4.47.51,73	+5,14	— 1.26.28,2	+12,0	Weisse$_1$, n° 993.
d.	9,3	4.40. 0,91	+5,20	— 0. 5.55,1	+11,9	B. B. t. VI, n° 763.
d.	»	»	+5,20	»	+11,6	Id.
e.	9,0	5.42.44,06	+5,07	+ 7.24.52,0	+ 5,0	Weisse$_1$, n° 1030.
f.	9,0	5.38.34,02	+5,10	— 7.20.21,7	+ 4,8	Weisse$_1$, n° 936.
f.	»	»	+5,11	»	+ 4,6	Id.
f.	»	»	+5,12	»	+ 4,5	Id.
g.	9,0	5.34.59,40	+2,24	— 6.49.54,6	+ 1,8	Weisse$_1$, n° 835.
h.	8,8	4. 3.28,83	+6,66	+40.59.14,8	+23,1	A. G,, n° 3425.
h.	»	»	+6,66	»	+23,2	Id.
i.	9,0	7.13.50,60	+2,72	+19.53.33,8	— 1,3	$\frac{1}{2}$(W$_2$, n° 337) + A. G., n° 2766.
i.	»	»	+2,73	»	— 1,3	Id.
j.	9,3	7. 9.13,42	+2,77	+20.25.25,9	— 1,0	B. B. t. VI, n° 1749.
k.	8,9	7. 7.46,91	+2,77	+20.24. 7,7	— 0,9	$\frac{1}{2}$(W$_2$, n° 145) + A. G., n° 2840.
l.	7,0	7.28.59,20	+5,03	+61.45.28,5	+ 0,6	A. G., n° 5152.
m.	8,9	7.22.33,33	+4,92	+60.42.23,0	+ 2,5	A. G., n° 5104.
n.	8,8	7.17. 7,79	+4,89	+60.36.46,3	+ 3,3	A. G., n° 5064.
o.	8,8	7.19.43,88	+4,84	+60. 7. 7,5	+ 3,1	A. G., n° 5081.
p.	9,1	7.10.58,71	+4,70	+59.17. 7,5	+ 5,1	A. G., n° 5001.
q.	9,1	7.11.14,54	+4,68	+59.10.25,0	+ 5,2	A. G,, n° 5005.

Digitized by Google

ÉLÉMENTS DE LA PLANÈTE (426) DH ET ÉPHÉMÉRIDE POUR 1898;

PAR M. A. POURTEAU.

Cette planète a été découverte à Nice, le 25 août 1897, par M. A. Charlois. L'astre a pu être observé trente fois, tant à Nice, qu'à Munich, Arcetri, Rome et Vienne.

M. Charlois ayant eu l'obligeance de nous communiquer, avant leur publication, une grande partie des observations, nous avons pu, en nous servant de celles de septembre 1, septembre 30 et octobre 29, calculer les éléments provisoires suivants :

Époque T = 1897 septembre 30,0.

Anomalie moyenne.....	$M = 176^\circ.37'.58'',0$	
Longitude du périhélie.....	$\pi = 170.\ 6.53,8$	Équin. et éclipt. moy. 1900,0.
Longitude du nœud ascendant...	$\Omega = 311.54.\ 6,7$	
Inclinaison.....	$i = 19.34.53,9$	
Excentricité $e = \sin\varphi$.....	$\varphi = 5.46.43,1$	
Moyen mouvement diurne.....	$\mu = 722'',0563$	
Log demi-grand axe.....	$\log a = 0,460.957$	

Les observations qui ont servi à faire ce calcul n'ont pas été corrigées de l'aberration ni de la parallaxe.

Le Tableau suivant contient les observations de la planète, corrigées de l'aberration et de la parallaxe, et leur comparaison avec une éphéméride déduite des éléments précédents. Les valeurs $\cos\delta\, d\alpha$ et $d\delta$, données dans le sens (observation — calcul), semblent bien provenir en grande partie des corrections d'aberration et de parallaxe négligées dans le premier calcul des éléments.

Date.	Lieu d'observation.	T. m. de Paris.	α géoc.	$\cos\delta\, d\alpha$.	δ géoc.	$d\delta$.
		SEPTEMBRE 1897.				
		h m s	h m s	s	° ′ ″	″
1.	Nice.....	10.11.17	22.31. 4,67	−0,68	+6.10.31,6	+3,3
2.	Nice.....	8.31.52	22.30.13,74	−0,50	+6. 9.32,6	+2,7
4.	Nice.....	8. 6.37	22.28.25,16	−0,79	+6. 7.12,1	+5,3
20.	Munich.....	11.34.34	22.14.53,85	−0,28	+5.35.22,7	+2,3
20.	Munich.....	12. 6.39	22.14.52,19	−0,96	+5.35.16,7	−0,4

Digitized by Google

Date.	Lieu d'observation.	T. m. de Paris.	Æ géoc.	cos ☾ dÆ.	☾ géoc.	d☾.
			Septembre 1897.			
		h m s	h m s	s	° ′ ″	°
22.	Arcetri.....	10.42.21	22.13.28,30	—0,58	+5.30.29,2	+1,8
22.	Rome.....	11.46. 4	22.13.26,45	—0,55	+5.30.27,3	+6,5
23.	Arcetri.....	8.21.25	22.12.50,53	—0,47	+5.28.12,1	+1,6
24.	Munich.....	7.46.33	22.12.10,63	—0,36	+5.25.44,8	+3,6
24.	Munich	8.10. 8	22.12. 9,89	—0,44	+5.25.39,0	+0,3
24.	Arcetri.....	8.33.31	22.12. 9,21	—0,46	+5.25.36,1	—0,1
24.	Rome... ...	11. 3.50	22.12. 5,02	—0,43	+5.25.24,4	+4,2
25.	Arcetri.....	10.19.38	22.11.26,40	—0,47	+5.22.52,6	+1,9
26.	Munich.....	8.26.26	22.10.50,61	—0,54	+5.20.28,9	+1,1
26.	Munich.....	9. 1.12	22.10.49,77	—0,46	+5.20.26,0	+1,9
26.	Arcetri.....	10.27.35	22.10.47,61	—0,33	+5.20.17,8	+3,0
27.	Arcetri.....	8. 0.41	22.10.13,66	—0,47	+5.17.58,5	+3,4
27.	Munich.....	9.40.33	22.10.11,16	—0,40	+5.17.44,8	+0,5
27.	Munich.....	10.23. 6	22.10. 9,90	—0,57	+5.17.41,5	+1,8
28.	Arcetri.....	10.59.12	22. 9.32,78	—0,36	+5.15. 2,2	+2,2
29.	Arcetri.....	8.13.20	22. 9. 1,53	—0,40	+5.12.41,8	—0,3
29.	Munich.....	9.35. 7	22. 8.59,54	—0,41	+5.12.33,0	—0,3
29.	Munich.....	10. 6.57	22. 8.58,47	—0,72	+5.12.30,5	+0,7
30.	Arcetri.....	8. 2.56	22. 8.27,62	—0,40	+5.10.10,3	+2,5
30.	Munich.....	9.13.25	22. 8.26,05	—0,33	+5.10. 0,5	+0,3
30.	Munich.....	9.37.52	22. 8.25,49	—0,32	+5. 9.57,4	—0,1
30.	Munich.....	9.57.25	22. 8.25,11	—0,24	+5. 9.56,3	+0,9
			Octobre 1897.			
1.	Munich.....	8.19.41	22. 7.54,41	—0,30	+5. 7.31,5	+0,4
1.	Munich	9. 4.11	22. 7.53,30	—0,41	+5. 7.29,4	+3,2
29.	Vienne.....	9.13.57	22. 1.28,35	+0,21	+4.12.29,1	+3,9

Nous avons alors formé les lieux normaux suivants :

	T. m. de Paris.	Æ géoc.	☾ géoc.
		h m s	° ′ ″
I.....	1897 Sept. 2,5	22.30. 5,66	+ 6. 9.24,1
II.....	23,0	22.13. 5,02	+ 5.29. 5,8
III.....	29,0	22. 9.13,48	+ 5.13.36,7
IV.....	Oct. 29,5	22. 1.28,93	+ 4.12.22,3

Suivant les conseils que M. Bossert a bien voulu nous donner et dont nous sommes heureux de le remercier, nous avons alors calculé, à l'aide des lieux I, III, IV, les éléments ci-après :

Digitized by Google

Époque T = 1897 septembre 30,0.

Anomalie moyenne.....	M = 172°.11'.17",2	
Longitude du périhélie.....	π = 173.44.16,8	Équin. et éclipt. moy. 1900,0.
Longitude du nœud ascendant...	☊ = 311.58.22,1	
Inclinaison.....	i = 19.37.39,4	
Excentricité $e = \sin\varphi$.....	φ = 5.53.54,4	
Moyen mouvement diurne.....	μ = 722",4562	
Log demi grand axe.....	$\log a$ = 0,460.7967	

La comparaison des positions calculées au moyen de ces éléments et de celles déduites des lieux normaux laisse subsister les écarts suivants :

	cos(D) dR.	d(D).
I.....	—0",1	0",0
II.....	+1,1	+1,6
III.....	—0,2	+0,2
IV.....	—0,1	+0,4

Au moyen de ces mêmes éléments, nous avons calculé l'éphéméride suivante pour l'opposition de 1898 :

12h *temps moyen de Paris.*

(Les positions sont rapportées à l'équinoxe vrai de la date.)

Dates. 1898.	R. h m s	Diff. s	D. ° ' "	Diff. ' "	log. Δ	T. d'aberr. m
Oct. 27.....	3.44. 2,25		+47.31. 1,8		0,3386	18. 7
		—56,20		+1.31,6		
28.....	3.43. 6,05		+47.32.33,4			
		—57,59		+1.16,5		
29.....	3.42. 8,46		+47.33.49,9			
		—58,92		+1. 1,2		
30.....	3.41. 9,54		+47.34.51,1			
		—60,21		+0.45,6		
31.....	3.40. 9,33		+47.35.36,7		0,3333	17.54
		—61,41		+0.29,6		
Nov. 1.....	3.39. 7,92		+47.36. 6,3			
		—62,64		+0.13,6		
2.....	3.38. 5,28		+47.36.19,9			
		—63,76		—0. 2,7		
3.....	3.37. 1,52		+47.36.17,2			
		—64,77		—0.19,3		
4.....	3.35.56,75		+47.35.57,9		0,3286	17.42
		—65,71		—0.36,0		
5.....	3.34.51,04		+47.35.21,9			
		—66,59		—0.53,0		
6.....	3.33.44,45		+47.34.28,9			
		—67,39		—1.10,0		
7.....	3.32.37,06		+47.33.18,9			
		—68,10		—1.27,2		
8.....	3.31.28,96		+47.31.51,7		0,3247	17.33
		—68,72		—1.44,5		
9.....	3.30.20,24		+47.30. 7,2			
		—69,26		—2. 1,8		
10.....	3.29.10,98		+47.28. 5,4			
		—69,72		—2.19,1		
11.....	3.28. 1,26		+47.25.46,3			
		—70,07		—2.36,5		

Digitized by Google

Dates.	AR.	Diff.	(D).	Diff.	log Δ.	T. d'aberr.
1898.	h m s	s	° ′ ″	′ ″		m s
Nov. 12.....	3.26.51,19		+47.23. 9,8		0,3216	17.25
		—70,33		—2.53,7		
13.....	3.25.40,86		+47.20.16,1			
		—70,49		—3.10,9		
14.....	3.24.30,37		+47.17. 5,2			
		—70,59		—3.28,3		
15.....	3.23.19,78		+47.13.36,9			
		—70,57		—3.35,5		
16.....	3.22. 9,21		+47. 9.51,4		0,3193	17.20
		—70,44		—4. 2,3		
♂ 17.....	3.20.58,77		+47. 5.49,1			
		—70,22		—4.18,9		
18.....	3.19.48,55		+47. 1.30.2			
		—69,92		—4.35,3		
19.....	3.18.38,63		+46.56.54,9			
		—69,52		—4.51,6		
20.....	3.17.29,11		+46.52. 3,3		0,3179	17.17
		—69,04		—5. 7,3		
21.....	3.16.20,07		+46.46.56,0			
		—68,47		—5.22,9		
22.....	3.15.11,60		+46.41.33,1			
		—67,81		—5.38,4		
23.....	3.14. 3,79		+46.35.54,7			
		—67,07		—5.53,2		
24.....	3.12.56,72		+46.30. 1,5		0,3174	17.15
		—66,26		—6. 7,8		
25.....	3.11.50,46		+46.23.53,7			
		—65,36		—6.22,0		
26.....	3.10.45,10		+46.17.31,7			
		—64,40		—6.35,7		
27.....	3. 9.40,70		+46.10.56,0			
		—63,36		—6.48,9		
28.....	3. 8.37,34		+46. 4. 7,1		0,3178	17.16
		—62,35		—7. 1,7		
29.....	3. 7.35,09		+45.57. 5,4			
		—61,07		—7.14,2		
30.....	3. 6.34,02		+45.49.51,2			
		—59,81		—7.26,5		
Déc. 1.....	3. 5.34,21		+45.42.24,7			
		—58,50		—7.38,1		
2.....	3. 4.35,71		+45.34.46,6		0,3190	17.19
		—57,13		—7.48,7		
3.....	3. 3.38,58		+45.26.57,9			
		—55,69		—7.59,1		
4.....	3. 2.42,89		+45.18.58,8			
		—54,20		—8. 9,4		
5.....	3. 1.48,69		+45.10.49,4			
		—52,67		—8.18,8		
6.....	3. 0.56,02		+45. 2.30,6		0,3211	17.24
		—51,08		—8.27,4		
7.....	3. 0. 4,94		+44.54. 3,2			
		—49,45		—8.35,7		
8.....	2.59.15,49		+44.45.27,5			
		—47,77		—8.43,5		
9.....	2.58.27,72		+44.36.44,0			
		—46,05		—8.50,5		
10.....	2.57.41,67		+44.27.53,5		0,3240	17.31
		—44,27		—8.57,0		
11.....	2.56.57,40		+44.18.56,5			
		—42,44		—9. 3,1		
12.....	2.56.14,96		+44. 9.53,4			
		—40,59		—9. 8,5		
13.....	2.55.34,37		+44. 0.44,9			
		—38,71		—9.13,5		
14.....	2.54.55,66		+43.51.31,4		0,3277	17.40

La grandeur de la planète au moment de l'opposition le 17 novembre sera de 12,5 environ.

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

INFLUENCE DE LA PRESSION ET DU CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE SOURCE LUMINEUSE ET SUR LES LONGUEURS D'ONDE DES RADIATIONS QU'ELLE ÉMET;

PAR M. H. DESLANDRES.

Effect of pressure on the wave lengths of lines in the arc spectra of certain elements, by W.-J. Humphreys and J.-F. Mohler (*Astrophysical Journal*, february 1896, p. 114).

The effect of pressure on wave length, by J.-F. Mohler (*Astrophysical Journal*, october 1896, p. 175).

A further study of the effect of pressure on wave length (*Astrophysical Journal*, novembre 1896, p. 249).

Changes in the wave lengths of the lines of emission spectra of elements, their dependance upon the elements themselves and upon the physical conditions under which they are produced, by W.-J. Humphreys (*Astrophysical Journal*, october 1897, p. 169).

On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance, by P. Zeeman (*Philosophical Magazine*, march 1897, p. 226, et *Astrophysical Journal*, may 1897, p. 332).

Radiation in a magnetic field, by A. Michelson (*Astrophysical Journal*, july 1897, p. 48).

Doublets and triplets in the spectrum produced by external magnetic forces, by Zeeman (*Philosophical Magazine*, july 1897, p. 55; september, p. 225).

Sur l'observation et l'interprétation cinématique du phénomène découvert par le Dr Zeeman, par M. Cornu (*Comptes rendus*, octobre 1897, p. 555).

Sur une interprétation applicable au phénomène de Faraday et au phénomène de Zeeman, par M. Henri Becquerel (*Comptes rendus*, novembre 1897, p. 679).

Sur quelques résultats nouveaux relatifs au phénomène de Zeeman, par M. A. Cornu (*Comptes rendus*, janvier 1898, p. 181).

Observations relatives à la Communication de M. Cornu, par M. Henri Becquerel (*Comptes rendus*, janvier 1898, p. 187).

Addition à ma Note précédente, par M. A. Cornu (*Comptes rendus*, janvier 1898, p. 300).

Radiation in a magnetic field, by A. Michelson (*Astrophysical Journal*, février 1898).

Digitized by Google

Doublets and triplets in a magnetic field, by Dr Zeeman (*Philosophical Magazine*, février 1898).

Contribution à l'étude du phénomène de Zeeman, par MM. Henri Becquerel et H. Deslandres (*Comptes rendus*, avril 1898, p. 997).

Cette Note donne un résumé général des nombreux Mémoires successifs qui se rapportent à une même question, très importante pour l'Astronomie physique. Il a paru meilleur de donner l'ensemble des résultats obtenus que la série des étapes successives dans des Notes séparées.

La question traitée offre un intérêt de premier ordre : il s'agit de variations spéciales que subissent les longueurs d'onde des radiations émises par les sources lumineuses. Or, depuis le grand travail de Bunsen et Kirchhoff, les longueurs d'onde du spectre de chaque corps étaient considérées comme spécifiques et immuables. De toutes les propriétés qui permettent de reconnaître un corps simple, l'émission de radiations déterminées, représentées exactement par de simples longueurs, paraissait avec raison la propriété la plus sûre et la plus caractéristique. Même la constance de la longueur d'onde, jointe à la grande précision de sa mesure, l'avait fait choisir récemment pour une représentation exacte de l'unité de longueur.

Mais, d'après des découvertes récentes, la pression totale du gaz de la source influe sur la longueur d'onde des radiations émises; de même aussi le champ magnétique ambiant produit une variation de la longueur d'onde, relativement plus forte et plus complexe. Les astronomes, d'ailleurs, observent depuis plusieurs années déjà, dans le spectre des astres, des déplacements des raies stellaires par rapport aux raies terrestres de même origine, ou, ce qui revient au même, des variations de longueur d'onde; on les a expliquées avec raison par le mouvement relatif de l'observateur et de la source, mouvement qui produit certainement l'effet observé dans un grand nombre de cas. La longueur d'onde, au point d'émission des radiations, était supposée constante. Une discussion nouvelle des résultats s'impose donc; mais on peut affirmer que les découvertes nouvelles, loin de diminuer l'importance de l'analyse spectrale, augmenteront au contraire le champ de ses applications. Il sera seulement nécessaire de reconnaître

Digitized by Google

et de discuter avec une rigueur plus grande les conditions dans lesquelles la source lumineuse est placée.

Influence de la pression. — L'influence de la pression a été reconnue tout d'abord, et cette découverte a été faite dans le laboratoire du professeur Rowland, avec le grand réseau concave de six pouces qui a servi pour le spectre normal du Soleil et la comparaison avec les spectres des divers éléments. Cet appareil est le plus puissant spectroscope jusqu'à présent réalisé; et, dans le cas présent, il était nécessaire, car la variation de longueur d'onde est relativement très faible. Les auteurs, MM. Humphreys et Mohler, ont utilisé l'arc électrique enfermé dans une enceinte où la pression intérieure pouvait être élevée jusqu'à 12^{atm}. L'observation, le plus souvent photographique, consiste à juxtaposer le spectre à la pression étudiée et le spectre à la pression atmosphérique.

Les résultats peuvent être ainsi résumés : lorsque la pression s'élève, les raies s'élargissent en général, surtout du côté du rouge; mais parfois elles conservent leur finesse ou même s'élargissent davantage du côté du violet. Les raies, en s'élargissant, acquièrent la propriété de se renverser plus facilement. Or, si l'on observe principalement les raies fines et les raies renversées, on constate toujours un déplacement vers le rouge, ou une augmentation de la longueur d'onde proportionnelle à la pression. C'est là un fait général.

Pour un certain nombre de raies, dans un même spectre, la variation est proportionnelle à la longueur d'onde : $d\lambda = K\lambda$; d'autres groupes de raies, dans le même spectre, offrent la même relation, mais avec un autre coefficient de proportionnalité. Avec les corps simples étudiés par Rydberg, Kayser et Runge, qui présentent trois séries régulières de raies, les coefficients K sont à peu près dans les rapports 1, 2, 4.

Les coefficients sont d'ailleurs variables d'un corps à l'autre, ils sont une fonction périodique du poids atomique, de même que les autres propriétés des corps étudiées par Mendeleef.

La variation la plus grande a été observée avec le cæsium, qui, pour une augmentation de pression de 12^{atm}, et la longueur d'onde 4000^{A}, subit un déplacement égal à $0^{A},161$; dans les

Digitized by Google

mêmes conditions, le déplacement dû à l'uranium est égal seulement à $0^{A},009$.

Influence du champ magnétique. — L'influence du champ magnétique a été découverte l'année dernière seulement par le Dr Zeeman, d'Amsterdam, bien que, depuis longtemps déjà, elle ait été étudiée. Ainsi Faraday, qui a reconnu le premier la rotation du plan de polarisation d'un rayon polarisé sous l'action de l'aimant, a cherché aussi si la source elle-même et les périodes des radiations émises étaient modifiées, et n'a obtenu aucun résultat, probablement à cause de l'insuffisance de son spectroscope. Plus tard, Fievez, astronome physicien à l'observatoire de Bruxelles, qui disposait d'appareils puissants, a observé le spectre d'une source placée entre les pôles d'un fort électroaimant, et, dans la direction normale aux lignes de force, il a constaté un élargissement de la raie, qui devient double et même triple. Il a conclu simplement à des renversements, analogues à ceux qui se produisent si facilement dans un arc électrique ordinaire.

Le Dr Zeeman est allé plus loin : il a retrouvé d'abord les résultats de Fievez, qu'il ne connaissait pas d'ailleurs, et d'autres faits nouveaux; puis, aidé par le professeur Lorentz et la théorie des ions, il a reconnu le caractère exact du phénomène. Cette intervention de Lorentz est particulièrement curieuse, à mon avis; car elle montre quels grands services l'emploi judicieux de théories peut rendre à l'observateur; elle est même un des cas très rares où, pour un fait très important et très nouveau, la théorie a précédé et aidé largement l'expérimentation.

Le professeur Lorentz est, comme on sait, l'auteur d'une théorie des phénomènes électriques basée sur la considération des ions ou atomes munis d'une charge électrique constante, positive ou négative. Comme le Dr Zeeman embarrassé demandait à son collègue quelle serait l'action d'un champ magnétique sur les ions en mouvement, ce dernier, soumettant la question au calcul, déclara que, dans sa théorie, la vibration originale, sous l'action magnétique, se décompose en trois vibrations distinctes, à savoir : une vibration rectiligne parallèle au champ, et de même période que la vibration initiale; deux vibrations circulaires de

Digitized by Google

sens différents, situées dans un plan perpendiculaire aux lignes de force, et de périodes différentes, l'une un peu plus grande, l'autre un peu plus petite que la période initiale.

L'expérience a vérifié de point en point, avec les premières radiations étudiées, les conséquences de la théorie des ions. Non seulement la raie spectrale se divise en deux ou trois composantes qui, avec une dispersion suffisante, apparaissent séparées; mais ces composantes ont une polarisation bien déterminée. Si l'on observe dans la direction des lignes de force, la raie devient double, les deux composantes étant polarisées circulairement. Dans la direction perpendiculaire aux lignes de force, la raie est triple, la composante médiane étant polarisée dans un plan perpendiculaire au champ, et les deux autres dans un plan parallèle. C'est surtout la polarisation spéciale de chaque rayon qui fournit un caractère remarquable et précis; car, à première vue tout au moins, le dédoublement des raies diffère peu d'un renversement ordinaire.

A ma connaissance, d'ailleurs, on n'avait pas encore observé de source gazeuse émettant des radiations complètement polarisées.

Cette découverte, à tous les points de vue, a une importance capitale; elle a excité, à son apparition, un enthousiasme légitime; elle a été aussitôt vérifiée, d'ailleurs, par plusieurs savants, MM. Cornu, Lodge, Michelson, qui ont indiqué des procédés expérimentaux susceptibles de mettre le phénomène en évidence avec une clarté plus grande. Avec un champ magnétique puissant, la division des raies, qui est proportionnelle à l'intensité du champ, est facile à voir, surtout si, par l'interposition d'un nicol placé sur le trajet des rayons, on élimine les rayons polarisés dans l'un des plans principaux du champ magnétique.

D'après les relevés de M. Michelson, la raie jaune D_2 du sodium, avec un champ magnétique de 10000 unités C.G.S., offre un écartement des composantes extrêmes égal à $0^A,55$. Or, le Dr Zeeman a récemment réalisé des champs magnétiques de 30000 unités. La dispersion minima du spectroscope capable de déceler le phénomène est alors au moins dix fois plus faible que dans les expériences relatées ci-dessus sur l'influence de la pression.

Cependant, peu après, M. H. Becquerel cherche à relier par

Digitized by Google

une même théorie les phénomènes de Zeeman et de Faraday et indique une première vérification tirée du rapprochement des coefficients, qui, d'après les observations, représentent l'action magnétique dans les deux cas. Cette théorie, d'autre part, le conduit à la conséquence suivante : Le dédoublement des raies pour un même corps est proportionnel au carré de la longueur d'onde.

M. Cornu objecte à la loi de M. Becquerel que trois raies très voisines du zinc offrent des dédoublements très différents, mais MM. Zeeman et Becquerel, chacun de leur côté, constatent que, avec des radiations de longueur d'onde de plus en plus faibles, le dédoublement, qui pour deux raies voisines peut être différent, diminue d'une manière générale et au moins dans le sens indiqué par la loi.

Il est possible, comme l'a écrit M. Becquerel, que la loi ne s'applique qu'aux raies formant des groupes naturels dans le spectre d'un même corps. L'action magnétique sur les raies d'un même spectre présenterait des différences analogues à celles qui ont déjà été reconnues dans l'influence exercée par la pression. De nouvelles observations, sur une grande étendue du spectre, sont nécessaires pour éclaircir ce point de la question.

Cependant cette étude a été poursuivie sur un grand nombre de raies spectrales et, l'on a constaté que le phénomène était encore plus complexe. M. Cornu trouve que la raie médiane du triplet (dans l'observation perpendiculaire aux lignes de force) est elle-même double; si a est l'intervalle des composantes extrêmes du triplet, le doublet central a un écartement au plus égal à $\frac{a}{2}$. Michelson va plus loin, et, avec son réfractomètre, découvre que chacune des trois raies de Zeeman est elle-même un triplet dont les composantes polarisées dans le même plan ont des intensités parfois très différentes de manière à former un doublet ou une raie simple. L'intervalle de ces composantes est égal à $\frac{a}{4}$ pour la raie médiane de Zeeman, à $\frac{a}{4}$ ou $\frac{a}{6}$ pour les raies extrêmes, a ayant la même signification que ci-dessus.

Enfin MM. Becquerel et Deslandres ont reconnu une anomalie qui diffère des précédentes. La raie apparaît encore comme un triplet, mais les polarisations sont inverses. Ce phénomène a été

Digitized by Google

constaté avec le spectre du fer, dans une région curieuse par les différences très grandes qui s'y trouvent réunies. On aperçoit côte à côte une raie triple normale, une raie quadruple, une quintuple, la raie inversée et enfin une raie qui n'offre aucun indice de dédoublement. Ces différences augmentent encore l'intérêt que présente l'action magnétique, qui met en lumière des dissemblances entre les raies, jusqu'alors non soupçonnées, et liées évidemment à la constitution intime de la molécule.

Mais que devient, en présence de ces faits nouveaux, la théorie des ions du professeur Zeeman? Dans cette seconde phase de la recherche, c'est l'expérience qui, suivant la coutume, précède la théorie. Le professeur Lorentz a annoncé qu'il avait élargi son hypothèse, de manière à faire rentrer les faits nouveaux dans la dépendance des ions. Sa première hypothèse était évidemment trop simple pour répondre à tous les cas; car elle supposait un seul atome, attiré d'une part par une force élastique (comme dans la théorie ordinaire de Fresnel), et de plus électrisé et donc soumis à des forces d'induction. Il sera curieux de voir si, en supposant une molécule plus complexe, on pourra expliquer tous les cas singuliers observés expérimentalement.

Tels sont les résultats actuellement obtenus; mais, comme la question est étudiée de tous côtés, elle sera probablement vite élucidée. Les lecteurs du *Bulletin* seront tenus au courant de tous les progrès importants qui seront réalisés.

Cependant, au point de vue de l'Astronomie physique, le phénomène de Zeeman a une importance particulière, car il fournit le moyen de reconnaître, par l'emploi simultané du spectroscope et du polariscope, le champ magnétique des corps célestes. De même aussi la pression des atmosphères stellaires pourrait être décelée, en même temps que les vitesses radiales. Mais les variations de longueurs d'ondes dues à ces trois causes différentes peuvent être superposées. La discussion de ce cas complexe serait longue et d'ailleurs prématurée, puisque l'étude expérimentale des phénomènes, dans le laboratoire, n'est pas encore terminée.

Digitized by Google

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, nos 3433-3443.

Battermann (*H.*). — Tables auxiliaires pour le calcul de la parallaxe lunaire, destinées à faciliter le calcul des occultations.

Ces Tables donnent la parallaxe en ascension droite et en déclinaison, pour la latitude de Berlin et une parallaxe horizontale équatoriale de 57′, avec les arguments : angle horaire et déclinaison de la Lune. Pour une autre parallaxe horizontale p, on corrige les nombres tabulaires en les multipliant par le rapport $\frac{p}{57'}$; une petite Table supplémentaire (III) donne les corrections qui dépendent de la latitude de la station, pour les latitudes comprises entre 45° et 60°. Une dernière Table (IV) donne le demi-diamètre apparent de la Lune. Les Tables de M. Battermann seront utiles lorsqu'on voudra calculer d'avance et en bloc un grand nombre d'occultations pour une station donnée.

Anderson (*Th.-D.*). — Nouvelle variable dans la Chevelure de Bérénice.

Ses coordonnées sont (pour 1855,0) :

$$\alpha = 12^h 23^m, \qquad \delta = 32° 17'.$$

Contarino (*Francesco*). — Notice nécrologique sur A. Nobile.

Le 15 juin 1897 est mort, à Naples, le professeur Arminio Nobile. Il était né le 18 août 1838, à l'observatoire de Capodimonte, où il a passé, pour ainsi dire, toute sa vie. Professeur de Géodésie à l'Université de Naples et second astronome de l'observatoire, il a eu l'occasion d'entreprendre une série de travaux qui dénotent un esprit original et inventif. Nous citerons en particulier ses recherches sur les variations des latitudes, dont nous avons eu à nous occuper (voir *Bull.*, t. V, p. 541), et des recherches sur les réfractions, entreprises en commun avec le Directeur de l'observatoire de Cordoba.

Mort de M. A.-G. Clark.

Le 9 juin 1897 est mort, à Cambridge (Mass.), l'opticien américain Alvan Graham Clark, fils du célèbre Alvan Clark († 1887). Né en 1832, à Fall River (Mass.), il avait été de bonne heure associé aux travaux de son père. C'est lui qui, en 1862, découvrit, avec le nouveau réfrac-

Digitized by Google

teur de 18 pouces, le compagnon de Sirius. Avant de mourir, il avait pu achever l'objectif de 40 pouces, destiné à l'observatoire Yerkes. Avec lui s'éteint la lignée des Clark.

Schwassmann. — Observations du cratère Mœsting A et des étoiles de culmination lunaire, faites au cercle méridien de Gœttingue, dans le courant des années 1894-1896.

Leveau. — Éphéméride de la comète périodique de d'Arrest pour 1897.

Kobold (*H.*). — Investigation du mouvement propre de 523 étoiles australes.

Ce travail peut être considéré comme le complément de celui que M. Kobold a publié en 1895 sur les mouvements propres des étoiles boréales (voir *Bull.*, t. XIII, p. 169). Il est fondé sur les données que fournit le nouveau Catalogue fondamental de M. Auwers. M. Kobold a calculé, pour chaque étoile, la grandeur et la direction du mouvement propre, l'erreur moyenne de cette direction et les coordonnées du pôle du mouvement propre, ainsi que l'écart $\varphi - \psi$ entre la direction φ qui se déduit des observations et la direction théorique ψ de l'anti-apex, précédemment adoptée. Les nombres ainsi obtenus ont servi à une nouvelle détermination du pôle de l'équateur parallactique, un peu différente de celle que M. Kobold avait déjà publiée l'année dernière (voir *Bull.*, t. XIV, p. 122). En faisant usage de 213 étoiles dont le mouvement propre n'est pas inférieur à $0'',1$, ou pour lesquelles, si le mouvement est plus petit, l'incertitude $\varepsilon(\varphi)$ de la direction φ ne dépasse pas 10°, M. Kobold trouve, pour les coordonnées du pôle parallactique :

A ..... $274^\circ 21',8$ D..... $+0^\circ 23',0$

En combinant les étoiles australes et les boréales (ce qui donne un total de 1579 étoiles en tenant compte des doubles emplois), M. Kobold trouve successivement, par deux procédés différents :

A ..... $268^\circ 20',6$ D..... $-2^\circ 51',8$

et

A ..... $269^\circ 40',8$ D..... $-0^\circ\ 1',4$

La distribution des « pôles directs » et des « pôles rétrogrades » est d'ailleurs très différente pour les deux hémisphères; mais cette circonstance n'influe pas beaucoup sur le résultat quand les deux espèces de

Digitized by Google

pôles sont employées indistinctement à la détermination de l'équateur parallactique, suivant le mode de calcul adopté par M. Kobold. L'auteur ajoute quelques explications relatives à ce mode de calcul, qui se justifie en admettant que les mouvements particuliers de beaucoup d'étoiles ont lieu suivant la même ligne que celui du Soleil, et dans le même sens ou en sens opposé. Il est revenu sur ce sujet dans une Note postérieure, que nous résumerons plus loin.

Kobold. — Sur la détermination de la constante de la précession.

M. Kobold a voulu se rendre compte de l'influence que sa manière de voir, concernant les mouvements particuliers des étoiles, pourrait avoir sur la détermination de la constante de la précession. Cette influence a d'abord paru peu sensible, car, en appliquant ses formules à 115 étoiles dont les mouvements propres dépassent 0″,4, il n'a trouvé, pour la constante en question, qu'une correction de — 0″,014, d'ailleurs assez incertaine. Un nouveau calcul a donné, plus tard, un résultat différent, et il sera nécessaire de déterminer à la fois la correction de la constante de la précession et les coordonnées définitives du pôle parallactique.

Kobold. — Sur la distribution des mouvements particuliers des étoiles (*Astr. Nachr.*, 3451).

Dans cette Note, qu'il nous a paru utile de rapprocher des deux précédentes, M. Kobold cherche à se faire une idée de la nature et de la distribution des mouvements particuliers (*motus peculiares*) des étoiles, en examinant les deux composantes des mouvements propres Δs,

$$M \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta s \cos(\varphi - \psi)$$
$$N \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta s \sin(\varphi - \psi)$$

l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction de l'anti-apex, auquel il attribue tour à tour les coordonnées correspondant à ces deux positions de l'apex :

$$(A) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A = 268^\circ,25 \qquad D = +31^\circ,0$$

et

$$(B) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A = 268^\circ,25 \qquad D = -3^\circ,0$$

qui résultent, l'une des recherches d'Argelander, et l'autre de celles de M Kobold (voir *Bull.*, t. XIII, p. 171). Il se borne d'ailleurs à considérer es étoiles comprises entre les parallèles de + 30° et de — 30°, et les mouvements propres inférieurs à 0″,4, ce qui donne un total d'environ 900 mouvements propres. En prenant, pour chaque heure d'ascension

Digitized by Google

droite, les moyennes des composantes M, N, calculées dans les deux hypothèses (A), (B), M. Kobold forme un Tableau qui fait ressortir des particularités intéressantes, et notamment la marche systématique des moyennes N dans l'hypothèse (B), qui sont négatives entre 6^h et 17^h, et positives depuis 18^h jusqu'à 5^h. On remarque aussi des irrégularités qui semblent dues à l'erreur de la constante de la précession de O. Struve; en déterminant la correction de cette constante, dans les deux hypothèses, on trouve

$$(A) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta p = -0'',0289$$
$$(B) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta p = -0'',0277$$

en moyenne $-0'',0283$, ce qui s'accorde avec le résultat obtenu par M. L. Struve, en 1887 (voir *Bull.*, t. V, p. 113). L'introduction de la correction Δp rend la distribution des résidus N assez satisfaisante dans l'hypothèse (A), mais elle ne modifie que très peu la marche systématique de ces résidus dans l'hypothèse (B), et l'on ne gagnerait pas beaucoup par l'application d'une correction $\Delta D = +8°$, avec $\Delta p = -0'',044$. On ne peut guère songer, non plus, à expliquer cette marche par l'existence d'une erreur systématique x des mouvements propres qui se déduisent des observations de Bradley. En se contentant d'introduire la correction $\Delta p = -0'',0283$, M. Kobold a donc examiné la distribution des résidus N, classés par ordre de grandeur, dans les deux hémisphères que séparent les cercles horaires de 6^h et de 18^h. Les résidus négatifs sont prépondérants entre 6^h et 18^h, les positifs de 18^h à 6^h, et cette opposition est tranchée surtout dans l'hypothèse (B). Mais c'est cette dernière qui fournit une distribution se rapprochant davantage de celle que demande la loi de Gauss. En y regardant de plus près, on trouve que les anomalies constatées sont dues à la présence de certains groupes d'étoiles qui ont des mouvements particuliers très prononcés, comme celui qui comprend α Bouvier, et pour lequel les écarts $\varphi - \psi$ sont voisins de $-90°$. Il importerait évidemment d'éliminer l'influence de ces mouvements particuliers, qui masquent les mouvements parallactiques. On obtient une distribution un peu meilleure des résidus N en attribuant à l'apex la déclinaison $+10°,5$, qui correspond à une troisième hypothèse (C), où l'on cherche à réduire au minimum la somme des carrés des composantes N, tandis que l'hypothèse (B) réduit au minimum la somme des carrés du produit $\sin(\varphi - \psi)\sin f$ (f étant la distance de l'étoile à l'anti-apex), et l'hypothèse (A) la somme des carrés de $(\varphi - \psi)\sin f$, de sorte que (A) et (B) font abstraction de la grandeur des mouvements propres Δs (voir *Bull.*, t. X, p. 403). Calculant enfin, à l'aide des composantes M, les résidus qui représentent les mouvements particuliers projetés sur la direction de l'anti-apex,

Digitized by Google

M. Kobold en examine aussi la distribution, et il trouve qu'un très grand nombre d'étoiles paraissent avoir un mouvement particulier opposé à celui du Soleil, et qui s'ajoute par conséquent au mouvement parallactique; il y en a aussi beaucoup qui paraissent se mouvoir dans le même sens que le Soleil, mais avec une vitesse notablement plus grande. Ces dernières sont d'ailleurs, presque toutes, comprises dans un même hémisphère céleste dont l'équateur est perpendiculaire à la voie lactée.

Battermann. — Occultations des Pléiades, observées à Berlin, en 1896.

Fauth (*Ph.*). — Le monde de Saturne en 1897 (avec une planche).

Benko, Millosevich, Rambaud et *Sy.* — Observations de petites planètes, faites à Pola, Rome, Alger.

Hartwig (*E.*). — La variable Z Hercule.

Les minima de cette variable, qui appartient au type d'Algol, étaient faciles à observer l'été dernier, et l'éphéméride précédemment publiée a pu être rectifiée en ce qui concerne les minima secondaires.

See (*T.-J.-J.*). — Conditions atmosphériques essentielles à une bonne définition.

Les progrès qui ont été réalisés dans la construction des lunettes doivent nous rendre plus difficiles sur le choix de l'emplacement des observatoires; ils nous imposent l'obligation d'étudier avec soin les conditions atmosphériques propres à assurer une bonne définition et la fixité des images.

A cet égard, les observations que M. Douglass a pu faire, avec M. Pickering, à la station du Pérou, et qui concernent l'influence des courants atmosphériques, conduisent à des conclusions intéressantes. Tous les jours, vers 3^h du matin, un torrent d'air froid qui descendait des montagnes et passait sur Arequipa venait subitement troubler la vision. M. Douglass a reproduit cet effet pernicieux des courants d'air en plaçant une torche enflammée ou un bloc de glace à une faible distance de l'objectif de la lunette. Des effets du même genre peuvent être notés par tous les observateurs, quand des sautes de vent amènent le mélange irrégulier de masses d'air ayant des températures très inégales.

Digitized by Google

Des nuages qui se forment ou se dissolvent sont aussi une cause d'agitation des images. En résumé, il convient de fuir les montagnes. Les plateaux élevés, secs, éloignés de la mer, paraissent encore offrir les conditions les plus favorables à la netteté de la vision. Lorsqu'il s'agit de Photographie céleste, la fixité des images n'a pas la même importance, parce qu'on n'emploie que des grossissements modérés, et l'on peut alors tenir plus de compte de la pureté de l'atmosphère et rechercher les hauteurs. Mais pour les grandes lunettes, destinées à l'étude des objets les plus difficiles, il faut, avant tout, chercher des stations qui soient à l'abri des courants atmosphériques. A Flagstaff, où cette condition est remplie, la définition est excellente, d'avril à novembre, et M. See a pu découvrir, avec son réfracteur de 24 pouces, des étoiles doubles très difficiles, que d'autres n'ont pu reconnaître avec des instruments plus puissants. A Mexico, ces conditions favorables sont beaucoup plus rares.

See. — Sur la cause de l'apparition de rayons et de franges autour des images stellaires.

L'auteur a encore constaté que ces phénomènes sont en relation certaine avec les courants atmosphériques.

Grossmann (*E.*). — Sur la détermination de l'inclinaison des fils horizontaux de la lunette méridienne.

Un procédé ingénieux pour la mesure de cette inclinaison a été indiqué par MM. Hamy et Boquet, en 1890 (voir *Bull.*, t. VII, p. 5). M. Ambronn en a proposé un autre, qui a été essayé à Gœttingue, et que M. Grossmann a encore simplifié. Il consiste à placer, dans le plan focal du collimateur, un disque de feuille d'étain ou de cuivre, percé de quatre trous disposés en croix. On mesure, avec le fil horizontal mobile, la distance verticale des deux points lumineux qui sont à peu près sur la même ligne horizontale, et avec le fil vertical la distance horizontale des deux autres points. Ensuite M. Ambronn fait tourner la plaque de 180° autour d'un axe vertical, et il recommence les mesures. M. Grossmann propose de la faire tourner de 90° autour de l'axe optique. Dans les deux cas, l'inclinaison du fil horizontal s'obtient par un calcul très simple.

Gill (*D.*). — Troisième liste d'étoiles doubles, découvertes au Cap par M. Innes.

Digitized by Google

Millosevich. — Éléments et éphéméride de la planète (416).

Merfield. — Éléments paraboliques de la comète 1897 I.

Seraphimoff, Villiger, Thome. — Observations de planètes et de comètes, faites à Poulkovo, Munich, Cordoba.

Wadsworth. — Sur les conditions qui déterminent la limite du temps de pose en Photographie céleste.

M. D. Gill avait obtenu des photographies de η Argo avec des temps de pose de vingt-cinq heures; M. Isaac Roberts, qui se sert d'un réflecteur, n'a pas cru pouvoir prolonger utilement le temps de pose au delà de sept heures et demie, pour ses photographies de la nébuleuse d'Orion. La limite de la durée de pose utile se trouve atteinte quand le fond du cliché, qui reçoit la lumière diffuse du ciel, devient trop noir, de sorte que les détails très délicats (par exemple, les traces de nébulosités) ne se distinguent plus. Elle varie en raison inverse de l'intensité de l'illumination du fond, qui elle-même est simplement proportionnelle à la surface de l'objectif, et par suite au carré de l'ouverture libre b. Si la limite est de sept heures et demie pour un télescope de 20 pouces d'ouverture, elle sera d'environ dix-neuf heures pour un réfracteur de 13 pouces, et de quatre-vingts heures pour un 6-pouces, en supposant, bien entendu, que les plaques aient la même sensibilité et que les circonstances atmosphériques soient les mêmes. On sait, d'autre part, que l'intensité de l'image d'un objet de dimensions finies (planète, nébuleuse, etc.) varie comme le carré de l'ouverture angulaire, c'est-à-dire comme le carré du rapport $b : f$. Il s'ensuit qu'avec deux instruments pour lesquels ce rapport est le même, on obtient des images de même intensité, sur un fond dont la vigueur peut être très inégale, et le contraste s'accuse davantage pour l'ouverture la plus faible. Il n'est donc pas exact d'admettre que le temps de pose nécessaire pour obtenir tel détail ne dépend que de l'ouverture angulaire. De fait, M. Barnard, en opérant avec deux objectifs pour lesquels le temps de pose, ainsi calculé, aurait varié du simple au double, a constaté qu'il variait en réalité dans le rapport de 1 à 20 ou 40. Or, les ouvertures des deux objectifs étaient dans le rapport de 1 : 4; le fond avait donc, pour le second, un éclat 16 fois plus grand; il s'ensuit que le temps de pose devait être, non pas 2 fois, mais 32 fois plus long. De même encore, pour le premier de ces objectifs et une lentille de Voigtländer, qui avait à peu près la même ouverture angulaire, les temps de

Digitized by Google

pose, au lieu d'être égaux, ont varié dans le rapport de 2 : 5, qui correspond à celui des carrés des ouvertures linéaires. Ces exemples prouvent que les temps de pose dépendent du contraste entre l'intensité du fond et celle de l'image. (On trouve qu'ils varient simplement *comme les carrés des longueurs focales.*) Il y aura, par conséquent, avantage à employer, pour la photographie des nébuleuses, comètes, etc., des objectifs de petit diamètre et à court foyer. Le plus petit des deux objectifs de M. Barnard avait une ouverture linéaire de $1^p,5$, une ouverture angulaire de $\frac{1}{3,5}$; mais il vaut peut-être mieux ne pas dépasser $\frac{1}{5}$ pour l'ouverture angulaire, tandis que le diamètre des lentilles peut, dans certains cas, être réduit à une fraction de pouce, pour en accroître l'efficacité. Il est vrai que l'on se trouve ainsi amené à diminuer l'échelle des photographies, ce qui est un inconvénient assez sérieux, dans beaucoup de cas. Le fait que la rapidité de l'action photographique dépend de la longueur focale, et non pas de l'ouverture de l'objectif, a une grande importance, mais il peut arriver qu'en réduisant beaucoup l'ouverture et par suite l'intensité de l'impression, on rencontre des difficultés nouvelles au point de vue du développement de l'image.

Pour la Photographie stellaire, les conditions sont différentes, parce que l'intensité de l'image stellaire dépend du rapport $b^4 : f^2$; le contraste avec le fond dépend donc ici du carré de l'ouverture angulaire ($b^2 : f^2$). Ici encore les objectifs de faible dimension offrent de nombreux avantages; mais il faut alors prolonger la pose pour obtenir les images stellaires. On peut donc se voir obligé de recourir à des instruments de grande dimension pour les étoiles très faibles. Quant à la limite du temps de pose, qui, d'après M. Roberts, serait de sept heures trente minutes pour un 20-pouces, les expériences de MM. Gill, Stratonoff, Pickering donneraient, pour la même ouverture, huit heures trente minutes à dix heures trente minutes. Il y a, sans doute, une foule de circonstances dont il faut encore tenir compte pour fixer cette limite. Il en est encore ainsi lorsqu'il s'agit de comparer les avantages relatifs des réflecteurs et des réfracteurs. M. Wadsworth est convaincu que, pour les usages de la Photographie céleste, les réfracteurs sont, en général, préférables aux réflecteurs, sauf le cas où il s'agit d'obtenir les images d'étoiles excessivement faibles.

Auwers. — Circompolaires additionnelles dont l'observation est recommandée.

Le Catalogue fondamental pour les observations des zones ne renferme que six étoiles dont la déclinaison dépasse 85°, et quatre entre 82°

Digitized by Google

et 83°. Il a paru convenable de renforcer le nombre de ces circompolaires, et M. Auwers se propose d'introduire, dans le nouveau Catalogue général qui est en préparation, dix étoiles nouvelles comprises entre 85° et 90°, et dix autres comprises entre 82°,5 et 85. Il donne les positions provisoires de ces étoiles additionnelles, dont il recommande l'observation régulière aux astronomes pourvus de bons instruments méridiens. M. Stumpe a calculé des Tables auxiliaires, destinées à en faciliter la réduction au lieu apparent. M. Auwers profite encore de cette occasion pour indiquer les corrections définitives des positions des dix circompolaires déjà comprises dans l'ancien Catalogue fondamental.

Wellmann (*V.*). — Sur les causes de la gravitation.

M. Wellmann a essayé de démontrer la loi de Newton en appliquant la théorie cinétique des gaz à l'éther interstellaire, dont les particules, douées de vitesses très grandes, traversent librement les corps célestes, en frappant de chocs répétés les molécules matérielles qu'elles rencontrent sur leur chemin. On suppose la densité de l'éther constante, au moins dans l'étendue d'un système stellaire donné. Des considérations analogues avaient été développées par Isenkrahe, Bock et d'autres.

Stanley Williams, Anderson, Gill, Thome. — Variables nouvelles.

Doberck (*W.*). — Sur l'orbite de μ^2 Bouvier.

Depuis 1878, de nombreuses mesures de ce couple ont été publiées, qui ont permis à M. Doberck de reprendre le calcul de l'orbite. La période est de 276 ans.

Stratonoff. — Note sur les Pléiades.

A propos de la Note de M. Pickering sur la distribution des étoiles dans les amas (voir *Bull.*, t. XV, p. 202), M. Stratonoff rappelle certaines remarques qui lui avaient été suggérées par l'étude d'un cliché des Pléiades, et qu'il a déjà publiées dans les *Bulletins de la Société astronomique de Russie*. Comme MM. Pickering et Bailey, il a constaté que la densité stellaire est moindre dans les Pléiades que dans les régions voisines du Ciel. Une région très pauvre en étoiles, au sud de Mérope, frappe les yeux. Les Pléiades proprement dites ne constituent donc pas un amas riche. Elles renferment quatre nébuleuses

Digitized by Google

presque rectilignes dont l'étendue est peut-être sujette à des variations assez rapides.

Ristenpart. — Éclipses et occultations, observées à Carlsruhe.

Nyland. — Occultations observées à Utrecht.

R. R.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

T. CXXV, nos 1-19.

Vénukoff. — Sur l'état actuel des travaux géodésiques au Turkestan russe (p. 81).

Parmi les résultats importants contenus dans le 54e Volume des *Mémoires de la Section topographique de l'État-Major général russe,* il convient surtout de noter un « Catalogue des positions géographiques déterminées par les astronomes et les géodésiens russes dans les limites de la circonscription militaire du Turkestan ». Ce Catalogue, composé par le lieutenant-colonel Zaliessky, montre que dans les quatre provinces qui forment le Turkestan russe et dans le khanat de Boukhara il y a 421 points dont la position géographique est solidement établie.

M. Pomérantzeff a étudié, pour la partie orientale du Turkestan russe, l'influence des masses de montagnes sur la direction du pendule.

De leur côté, les réseaux trigonométriques, les levers topographiques et les travaux cartographiques des mêmes régions sont poussés activement.

Éginitis (*D.*). — Sur le climat d'Athènes (p. 152).

Gramont (*A. de*). — Sur le spectre du carbone (p. 172 et 238).

Wolf (*C.*). — Le gnomon de l'Observatoire et les anciennes toises; restitution de la toise de Picard (p. 199).

La toise de Picard et la toise de Cassini sont perdues depuis longtemps; par suite, ni le degré de Picard, ni les bases de la Méridienne vérifiée ne peuvent être exactement comparés entre eux ni avec les degrés du Pérou et de Laponie.

Au moyen de divers documents, M. Wolf montre que dans la méri-

Digitized by Google

dienne de l'Observatoire, encore intacte aujourd'hui, nous possédons 31 exemplaires authentiques de la longueur du pendule à seconde de Picard, représentant chacun 440,5 lignes de la toise de Picard et 440,0 lignes de celle de Cassini.

La longueur du pendule de Picard, d'après cette méridienne, serait $0^m,9927$; et l'on sait que Borda a trouvé beaucoup plus tard, par ses célèbres expériences, $0^m,9925$.

Guillaume (*Ch.-Ed.*). — Recherches sur les aciers au nickel. Dilatations aux températures élevées; résistance électrique (p. 235).

Brillouin (*Marcel*). — Appareil léger pour la détermination rapide de l'intensité de la pesanteur (p. 292).

Cet appareil se compose d'un pendule invariable et d'un chronomètre à éclairs.

Pendule. — Il bat le quart de seconde (période $0^s,5$) et pèse 100^{gr} environ. Son support, environ 200 fois plus lourd, peut être réglé en dix minutes. La comparaison du pendule avec le chronomètre se fait en vingt minutes avec toute la précision nécessaire, de sorte que dans un arrêt de une heure on peut faire deux comparaisons en un même point. « On peut ainsi espérer, dit M. Brillouin, faire plusieurs déterminations par jour, pourvu que l'on puisse compter sur la régularité du chronomètre, et éviter les déterminations fréquentes de l'heure astronomique. »

Chronomètre. — Le balancier n'a subi *aucune* modification; et le chronomètre est employé dans la position horizontale pour laquelle il a été construit. Les éclairs sont donnés par des fentes radiales pratiquées dans un petit disque d'aluminium porté par l'axe de la roue d'échappement.

« Pour l'étude de la marche du chronomètre, l'observation la plus importante est celle de l'amplitude du balancier. Probablement toutes les causes de variation de la période (autres que la température) agissent au premier ordre sur l'amplitude, au second ordre seulement sur la période. Je pense donc qu'un chronomètre dont l'amplitude est invariable a une marche absolument régulière. C'est ce que des comparaisons répétées avec la pendule permettront de contrôler.

» La moitié du fond de laiton du chronomètre a été remplacée par une glace; il est facile de renverser le chronomètre et, par un éclairage convenable, de suivre les variations d'amplitude. Cet examen a mis hors de doute une variation brusque de phase (de quelques millièmes de

Digitized by Google

seconde au plus) révélée par les coïncidences sonores avec un excellent chronomètre de Winnerl, a permis d'en étudier les détails, d'en découvrir la cause et finalement d'y remédier complètement (novembre 1895, juin 1896).

» Des irrégularités analogues doivent se produire dans beaucoup de chronomètres anciens, par suite de très petites inégalités d'usure (2^{μ} ou 3^{μ}) des dents que l'examen microscopique des roues révèle immédiatement.

» *Dans un chronomètre de précision, le balancier devrait être complètement visible au-dessus du cadran.* »

Zenger (*Ch.-V.*). — Les derniers orages en France, en juillet et août 1897, et la période solaire (p. 388).

Depuis 1883 M. Zenger a réuni de nombreux exemples pour montrer le parallélisme des perturbations atmosphériques, électriques, magnétiques, sismiques, volcaniques, et leur retour périodique lié à la durée de rotation solaire.

Comme ces perturbations terrestres se présentent parfois en séries de plusieurs jours, il doit y avoir une autre action perturbatrice, qui serait le passage d'essaims périodiques d'étoiles filantes et de bolides. L'état orageux de l'atmosphère pendant le passage de ces essaims s'expliquerait ainsi : « Les décharges électriques directes, entre les essaims et la Terre, chargent d'électricité les couches supérieures de l'atmosphère, qui sont raréfiées et, par suite, conductrices. Les couches inférieures de l'atmosphère, au contraire, sont isolantes : elles jouent le rôle du diélectrique dans la bouteille de Leyde, tandis que le globe terrestre joue le rôle du conducteur intérieur. »

De quelques analogies l'auteur conclut aussi que « l'on doit considérer notre planète, et toutes celles qui font partie du système solaire, comme une machine dynamo-électrique à deux bornes, plus petites que le Soleil, le mouvement rotatoire et progressif de celui-ci dans l'espace entraînant le mouvement rotatoire et orbiculaire des planètes ». Et il a imaginé une série d'appareils et d'expériences qui confirment cette manière de voir.

Cela étant admis, l'action électrodynamique du Soleil doit changer suivant le moment de la période d'activité solaire, de sorte que l'on peut s'attendre à voir les phénomènes météorologiques présenter une période analogue; et la statistique confirmerait encore cette manière de voir, de sorte qu'il y aurait là un moyen de faire, avec une grande probabilité, des prédictions météorologiques à très longue échéance.

Tacchini (*P.*). — Résumé des observations solaires faites à

Digitized by Google

l'observatoire royal du Collège romain pendant le premier semestre 1897 (p. 392).

Les taches et les protubérances solaires ont continué de diminuer. Les facules et les taches sont plus fréquentes dans les zones australes.

Cruls (*L.*). — Observation de l'éclipse de Soleil du 29 juillet 1897 à l'observatoire de Rio de Janeiro (p. 394).

L'observation a été favorisée par des conditions atmosphériques extrêmement favorables; les heures des contacts, observés par projection, à l'aide de l'équatorial de $0^m,24$ et d'un oculaire biconcave achromatisé, ont été les suivantes :

	Temps moyen de Rio.
	h m s
Premier contact.....	1.23.39,0
Dernier contact.....	3.43.16,0

Marchis (*L.*). — Sur les déformations permanentes du verre et le déplacement du zéro des thermomètres (p. 434).

Guillaume (*J.*). — Observations du Soleil faites à l'observatoire de Lyon (équatorial Brunner), pendant le second trimestre de 1897 (p. 484).

Le Cadet (*G.*). — Étude de la variation normale du champ électrique avec la hauteur, dans les hautes régions de l'atmosphère (p. 494).

Une nouvelle ascension aérostatique faite le 11 septembre 1897, dans laquelle on s'est élevé à 4150^m entre Paris à Angers, a montré comme les précédentes que dans nos latitudes *l'intensité du champ électrique de l'atmosphère diminue quand la hauteur au-dessus de la surface de la Terre augmente*. La diminution par rapport à la hauteur est généralement très rapide dans le premier kilomètre, moins rapide dans le deuxième, faible ou très faible dans le troisième et le quatrième.

Huggins (*W.*). — Sur les spectres des composantes colorées des étoiles doubles (p. 512).

On sait que dans beaucoup d'étoiles doubles les deux composantes présentent des différences de couleur bien tranchées qui parfois ont été attribuées principalement à des effets de contraste. Depuis longtemps

Digitized by Google

déjà, M. Huggins a montré que dans un certain nombre de couples ces différences de couleur sont bien réelles et se rattachent à la constitution des spectres des composantes.

Au moyen d'une nouvelle disposition de sa fente à réflexion, M. Huggins a pu photographier séparément les spectres des composantes de quelques couples, et les résultats obtenus offrent un véritable intérêt au point de vue de l'évolution de ces systèmes.

Ainsi, les composantes de 12 Chiens de chasse présentent l'une et l'autre le spectre des étoiles blanches, que l'on regarde comme les plus jeunes : on peut donc soupçonner que ce couple s'est formé relativement tard, qu'il est plus jeune que le système de γ Lion dont les deux composantes donnent des spectres analogues à celui de notre Soleil. D'ailleurs, ajoute M. Huggins, on ne peut pas trop se fier à une telle déduction, car on ignore quelles sont les masses des deux systèmes; et l'on peut penser qu'une étoile de masse relativement faible traverserait plus rapidement qu'une étoile de masse plus grande les phases successives de la vie stellaire.

Dans d'autres couples, la comparaison des spectres des deux composantes est aussi fort instructive. Ainsi, dans β Cygne (étoile principale de 3e grandeur, *jaune d'or;* compagnon de 5e grandeur et *bleu*) les spectres sont bien contrastés; mais c'est le compagnon qui offre le spectre des étoiles blanches, des étoiles jeunes, tandis que le spectre de l'étoile principale montre qu'elle est très avancée vers la condition solaire.

« Comment peut-on expliquer cette anomalie? ajoute M. Huggins. Il ne faut pas oublier, dit-il, que, outre les conditions fondamentales de grandeur et de température, l'éclat d'une étoile peut se modifier beaucoup par la nature et l'éclat des corps par lesquels sa lumière est émise, et par la constitution et l'étendue de l'atmosphère absorbante qu'elle a à traverser. Il est donc possible, nonobstant la constitution chimique semblable des deux astres, que l'étoile brillante ne soit pas la plus grande, et que l'on puisse accepter la condition relativement peu avancée de la composante faible, comme l'indice d'une masse plus grande. »

Huggins (*W.*). — Sur les spectres des étoiles principales du Trapèze de la Nébuleuse d'Orion (p. 514).

« Nos épreuves originales du spectre de la Nébuleuse d'Orion et des quatre étoiles plus brillantes des composantes de thêta, faites en 1889, nous ont porté à regarder comme très probable une liaison physique entre ces astres et la Nébuleuse elle-même. La pose très prolongée,

Digitized by Google

nécessaire pour les raies faibles de la Nébuleuse, a fait disparaître, dans les spectres continus des étoiles, les raies sombres qui par cette raison nous échappèrent.

» A l'aide de ma fente à réflexion, de 1894 à 1897, j'ai photographié à part les spectres des trois étoiles les plus lumineuses du Trapèze.

» Ces spectres sont riches en raies sombres et brillantes, qui confirment, il me semble, l'opinion d'une relation physique des étoiles avec la nébuleuse. En outre ces spectres ont montré un caractère tout à fait inattendu et qui offre un intérêt considérable, non seulement pour ces étoiles elles-mêmes, mais aussi pour la Spectroscopie stellaire; c'est-à-dire la superposition des raies noires principales sur des raies brillantes en général plus larges. Cette superposition n'est pas toujours symétrique; au contraire, pour la plupart des raies, la radiation brillante se trouve, plus ou moins, à côté de la raie noire. Cette superposition asymétrique se montre surtout pour les raies d'hydrogène, dont on peut suivre la série de $H\beta$ jusqu'à $H\pi$.

» Cette disposition des raies superposées ressemble aux phénomènes bien connus du spectre de l'étoile variable β de la Lyre. Une comparaison des épreuves faites en 1894, 1895, 1896 et 1897 ne laisse point de doute que les positions relatives des raies brillantes et sombres ne soient variables, comme c'est le cas pour l'étoile β de la Lyre. Il serait prématuré, en se fondant sur les épreuves déjà obtenues des étoiles de θ d'Orion, d'essayer une interprétation de ces superpositions plus ou moins asymétriques des raies brillantes et sombres et qui varient de temps à autre. Les faits nouveaux me paraissent cependant d'une importance assez considérable pour me permettre l'honneur de les offrir à l'Académie. »

Violle (*J.*). — L'actinométrie et les ballons (p. 627).

Les mesures actinométriques faites sur les hauts sommets ont donné des résultats importants au point de vue de l'actinométrie; mais les sondages méthodiques en pleine atmosphère permettront de mieux étudier encore l'intensité et la nature de la radiation solaire, ainsi que la grandeur et le rôle de l'absorption atmosphérique. M. Violle a proposé des instruments qui ont été essayés le 21 octobre 1897 au moyen d'un ballon-sonde : l'essai n'a pas donné de résultats nouveaux parce que ce ballon n'est monté qu'à une faible hauteur, mais les instruments ont bien fonctionné et tout promet une abondante moisson pour l'avenir.

Wilde (*H.*). — Sur quelques nouvelles lignes spectrales de l'oxygène et du thallium (p. 708).

Digitized by Google

Occultations des Pléiades, le 23 juillet et le 13 octobre 1897, observées à Lyon par MM. Guillaume, Lagrula et Le Cadet.

Comète Perrine (1896 nov. 2). — Observations par M. Cruls.

Comète périodique de D'Arrest (apparition de 1897). — Éphéméride par M. G. Leveau. — Observations par MM. Rossard, Rambaud et Sy.

Comète Perrine (1897 oct. 16). — Observations par MM. Bigourdan, Rambaud, Rossard, Sy.

G. B.

TRAVAUX CONCERNANT LES PERTURBATIONS DES PETITES PLANÈTES.

1. GYLDÉN (H.). — NOUVELLES RECHERCHES SUR LES SÉRIES EMPLOYÉES DANS LES THÉORIES DES PLANÈTES (Stockholm, 1892, *Cf.* Analyse de K. BOHLIN dans le *Vierteljahrsschrift*, t. XXVIII).

2. GYLDÉN (H.). — TRAITÉ ANALYTIQUE DES ORBITES ABSOLUES DES HUIT PLANÈTES PRINCIPALES (Stockholm, 1893, *Cf.* Analyses de ANDOYER, *Bull. astr.*, 1895; de O. BACKLUND dans le *Vierteljahrsschrift*, t. XXX, et Notice de O. BACKLUND sur H. GYLDÉN dans le *Vierteljahrsschrift*, t. XXXII).

3. GYLDÉN (H.). — HÜLFSTAFELN ZUR BERECHNUNG DER HAUPTUNGLEICHHEITEN IN DER ABSOLUTEN BEWEGUNGSTHEORIEN DER KLEINEN PLANETEN (Leipzig, 1896, *Publication der astronomischen Gesellschaft*).

4. LUDENDORFF (H.). — DIE JUPITER-STÖRUNGEN DER KLEINEN PLANETEN VOM HECUBA-TYPUS (*Inaugural Dissertation*, Berlin, 1897).

5. BRENDEL (M.). — THÉORIE DER KLEINEN PLANETEN. ERSTER THEIL (Berlin, 1898, *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Cf. A. N.*, n° 3346).

6. BACKLUND (O.). — UEBER DIE BEWEGUNG EINER GEWISSEN GRUPPE DER KLEINEN PLANETEN (Saint-Pétersbourg, 1892, *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences*, t. XXXVIII, 7e série; Analyse de HARZER dans le *Vierteljahrsschrift*, t. XXVIII).

7. BACKLUND (O.). — UEBER DIE BEWEGUNG DER KLEINEN PLANETEN DES HECUBA TYPUS (Saint-Pétersbourg, 1898. *Mémoires de l'Académie impériale*

Digitized by Google

des Sciences, 8e série. Des fragments de ce Mémoire ont été publiés dans le *Bull. astr.*, 1897 et dans les *A. N.*, 3472. *Cf.* aussi *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1897, t. VI, n° 4).

8. BOHLIN (K.). — FORMELN UND TAFELN ZUR GRUPPENWEISEN BERECHNUNG DER ALLGEMEINEN STÖRUNGEN BENACHBARTER PLANETEN (Upsala, 1896, *Cf.* Analyse dans le *Bull. Astr.*, 1896).

9. OLSSON (K.-G.). — UEBER EINE NEUE METHODE ZUR BERECHNUNG DER PLANETENSTÖRUNGEN IM FALLE EINER GENÄHERTEN COMMENSURABILITÄT ZWISCHEN DEN MITTLEREN BEWEGUNGEN (*A. N.*, 3357).

10. OLSSON (K.-G.). — UEBER DIE INTEGRATION DER UNGLEICHHEITEN LANGER PERIODE IN DER PLANETEN THEORIE I et II (*Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 1896).

11. OLSSON (K.-G.). — FORMELN FÜR EINE ERSTE VERBESSERUNG DES KLEINEN DIVISORS IM COMMENSURABILITÄTSFÄLLEN (*Ibid.*).

12. OLSSON (K.-G.). — ENTWICKELUNG DER STÖRUNGSFUNCTION FÜR PLANETENBAHNEN GROSSER EXCENTRICITÄT (*Ibid.*).

13. OLSSON (K.-G.). — EINE METHODE DIE STÖRUNGEN DER PLANETEN IN BAHNEN BELIEBIGER EXCENTRICITÄT UND NEIGUNG GRUPPENWEISE ZU BERECHNEN (3 Mémoires, *Ibid.*, 1896 et 1897).

14. SCHEIBNER (W.). — DIE GESTÖRTE ELLIPTISCHE BEWEGUNG. HANSEN'S IDEALE COORDINATEN (*Abdruck aus den Berichten der math. phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 1897).

15. HILL (G.-W.). — JUPITER PERTURBATIONS OF CERES, OF THE FIRST ORDER, AND THE DERIVATION OF THE MEAN ELEMENTS (*Astr. Journal*, 368. Cf. *A. N.*, 1982).

16. CALLANDREAU (O.). — SUR QUELQUES CAS DE COMMENSURABILITÉ DES MOYENS MOUVEMENTS DANS LE SYSTÈME SOLAIRE (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XXII).

17. MASCART (J.). — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES PLANÈTES TÉLESCOPIQUES (*Thèse*, Paris, 1897, *Cf. Bull. astr.*, t. XV).

18. TISSERAND (F.). — SUR UN CAS REMARQUABLE DU PROBLÈME DES PERTURBATIONS. SUR LA COMMENSURABILITÉ DES MOYENS MOUVEMENTS DANS LE SYSTÈME SOLAIRE (*Bull. astr.*, t. III et IV; *Mécanique céleste*, t. IV).

19. TISSERAND (F.). — SUR LA LIBRATION DES PETITES PLANÈTES (*Bull. astr.*, t. XII; *Mécanique céleste*, t. IV).

20. POINCARÉ (H.). — LES MÉTHODES NOUVELLES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE (Paris, Gauthier-Villars).

21. SIMONIN (M.). — SUR L'ORBITE DE (108) HÉCUBE (*Thèse*, Paris, 1897, *Cf. Bull. astr.*, t. XIV).

Digitized by Google

22. CALLANDREAU (O.). — Sur des intégrales définies qui jouent un role dans le calcul des perturbations. — Applications aux petites planètes; calcul des éléments moyens de leurs orbites. — Application au calcul des inégalités a longue période (*Bull. astr.*, 1893).

23. CHARLIER (C.). — Untersuchung über die Methoden zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten (*Aus den Sitzungsberichten der math. phys. Classe der k. bayer., Akad. d. Wiss.* München, 1896).

24. RADAU (R). — Sur quelques formules de la théorie des perturbations (*Bull. astr.*, 1886).

25. RADAU (R.). — Remarques relatives a la théorie des orbites (*Bull. astr.*, 1892).

26. HILL (G.-W.). — On intermediary orbits in the Lunar theory (*Astr. Journal*, 419).

27. LEBEUF (A.). — Tables pour le calcul des perturbations de Jupiter sur les petites planètes (*Thèse*, Paris, 1897, *Cf. Bull. astr.*, t. XV).

Une Revue d'ensemble de plusieurs travaux concernant la théorie des perturbations, dus à MM. Gyldén, Backlund, Brendel, Olsson, etc., a été publiée dans le tome VII du *Bulletin*. Les travaux de M. Gyldén et des astronomes qui l'ont suivi ont, comme nous le faisions pressentir, appelé l'attention sur les *desiderata* des méthodes habituelles, ce qui a donné lieu à une foule de recherches et d'essais au milieu desquels il est malaisé de se reconnaître. Forcé de nous restreindre, nous n'insisterons pas ici sur le côté spécialement mathématique; on sait la part considérable qui revient à M. Poincaré dans cet ordre d'idées. Nous voulons surtout mettre les lecteurs du *Bulletin* au courant des tentatives très variées ayant pour objet de faciliter le calcul des perturbations des petites planètes, principalement par Jupiter, dans le cas où se présentent des circonstances de commensurabilité approchée entre les moyens mouvements.

Pour arriver d'abord à un premier classement des Mémoires dont il s'agit, il nous paraît utile de les distinguer en les rapportant à l'une ou à l'autre des deux méthodes développées par Laplace dans le Tome I de la *Mécanique céleste*. Aux Chapitres VI et VII, d'une part, sont exposés le calcul des perturbations des coordonnées et la théorie des inégalités séculaires; dans le Chapitre VIII, d'autre part, est présentée une seconde méthode d'approximation des mouvements célestes, fondée sur les variations que les éléments du mouvement supposé elliptique éprouvent en vertu des inégalités tant périodiques que séculaires. Laplace a nettement caractérisé ce qui distingue la première méthode de la seconde quant à la variation des arbitraires (*Œuvres*, t. V, p. 354) en disant que « la

Digitized by Google

manière de faire varier les arbitraires diffère de celle qu'Euler a d'abord employée en ce qu'elle n'embrasse que les inégalités dont la période est indépendante de la configuration mutuelle des planètes, ce qui apporte une grande simplicité dans les calculs ».

Il est à remarquer que les deux manières de procéder se trouvent exposées dans une lettre de Lagrange à Laplace en date du 10 avril 1775 (*Œuvres de Lagrange*, t. XIV, p. 60), avec application à l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \Omega = 0,$$

où y est supposé très petit et Ω est une fonction rationnelle et entière de y et de $\sin t$, $\cos t$, ...

La méthode fondée sur la variation des éléments elliptiques, que nous appelons, pour abréger, la *seconde méthode*, a été pratiquée et développée surtout en France (n°s 18, 19 et 20). La thèse de M. Simonin (n° 21), que les lecteurs du *Bulletin* connaissent par l'analyse insérée dans le Tome XIV, en offre une application intéressante, poussée, comme il convient, jusqu'à la comparaison de la théorie et des observations, et l'accord est très satisfaisant. On ne saurait s'étonner que la seconde méthode ait trouvé des partisans en France, après les travaux de Le Verrier et de Delaunay; le Traité de Tisserand tendait à rendre la méthode classique.

On ne peut douter toutefois que les perturbations des éléments soient fortes relativement à celles des coordonnées; la preuve palpable de ceci peut se voir sur l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \Omega = 0;$$

le terme de y, répondant au terme en $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} mt$ de Ω, acquiert le diviseur $m^2 - 1$, tandis que si l'on calcule y par la formule

$$y = p \sin t + q \cos t,$$

p et q dépendant des intégrales $\int \Omega \cos t\, dt$ et $\int \Omega \sin t\, dt$, les deux termes de y sont affectés de diviseurs $m - 1$ et $m + 1$; c'est la réduction des différents termes qui amène le diviseur $m^2 - 1$.

La revision des théories des planètes principales, par M. Newcomb, a été faite en employant les perturbations des coordonnées : du côté de la simplicité, sinon de la symétrie, il y a certainement avantage.

Comme il était naturel, bon nombre d'astronomes ont pris pour guide Hansen, en se proposant de compléter les méthodes du célèbre astronome pour les cas de commensurabilité; c'est ce qu'ont fait en particu-

Digitized by Google

lier M. Bohlin (n° 8, *Bull. astr.*, t. XIII, p. 445) et après lui M. Olsson (n°s 8-13). L'anomalie excentrique de la planète troublée est prise comme variable indépendante à la place du temps, et le problème consiste surtout à distinguer dans la fonction W de Hansen, dont tout dérive en quelque sorte, les inégalités à longues périodes des inégalités ordinaires; les différences de notation mises à part, on retrouve donc le principe de la première méthode. Les comparaisons numériques auxquelles s'est livré M. Bohlin montrent que, pour des excentricités et des inclinaisons assez petites et un moyen mouvement de 850″ à 950″ les expressions obtenues sont remarquablement précises, plus même, pourrait-on ajouter, qu'il n'est nécessaire. M. Olsson s'est contenté, en prenant pour exemple la planète Thétis, dont les perturbations ont été calculées par le Dr Charlier, de mettre en évidence la nécessité de fortes corrections pour les formules ordinaires de Hansen. Pour embrasser un groupe de planètes voisines, le Dr Bohlin avait été conduit à développer la fonction perturbatrice suivant la différence des moyens mouvements entre la planète actuelle et une planète moyenne fictive. M. Olsson a indiqué comment, pour de fortes excentricités ou inclinaisons, on peut de même développer suivant les différences $e - e_0$ et $\sin^2 \frac{I}{2} - \sin^2 \frac{I_0}{2}$; mais, jusqu'à présent, il ne paraît pas avoir publié d'applications de cette méthode.

Nous ne pouvons omettre en parlant des travaux qui procèdent de Hansen, de recommander l'étude du Commentaire (n° 14) dû à M. W. Scheibner, auditeur naguère des leçons du célèbre astronome. M. Scheibner a voulu faciliter aux jeunes astronomes l'étude des travaux originaux de Hansen. Ce commentaire pourra être utilisé concurremment avec le Traité de Tisserand et celui de M. Brown (*An introductory Treatise on the lunar theory*).

Que l'on nous permette une digression sur le choix de la fonction du temps qui doit jouer le rôle de variable indépendante. Bien qu'il n'y ait pas de lien nécessaire entre ce choix et le principe même de la méthode de Hansen, on s'est habitué à associer l'anomalie excentrique avec les formules de Hansen. La convergence du développement de la fonction perturbatrice et de ses dérivées est plus grande, mais il est moins aisé de prononcer sur le résultat final. Il semble, en fait, que le choix ne soit pas obligé autant que l'estimait Hansen. Tisserand a remarqué (*Mécanique céleste*, t. IV, p. 325) que l'on retrouvait les trois sortes d'anomalies dans les trois principales méthodes que l'on a appliquées au calcul des perturbations des astéroïdes. Avant Gyldén, cependant, le Dr G.-W. Hill avait été séduit par les avantages que peut présenter l'anomalie vraie (n° 15). Ce serait une chose instructive que

Digitized by Google

de mettre en regard les expressions obtenues pour plusieurs planètes par différentes méthodes; la théorie de Mercure (München, 1884) du Dr J. Bauschinger, développée conformément aux méthodes de Hansen, n'accuse pas une convergence bien différente des expressions de Le Verrier-Newcomb. Les perturbations de Cérès, calculées par M. Hill (n° 15), peuvent aussi être rapprochées des anciens résultats de Damoiseau (*Connaissance des Temps* pour 1846), sans que l'on constate une grande différence pour la convergence.

Il peut arriver que l'on soit conduit, dans un problème particulier, à faire choix d'une variable indépendante très spéciale : par exemple dans l'étude sur le problème restreint (n° 16), la variable indépendante indiquée était l'élongation des deux corps. Laplace a été conduit à adopter, pour des motifs analogues, la longitude vraie comme variable indépendante dans sa théorie de la Lune; il ne faisait du reste que suivre l'exemple donné par Clairaut et d'Alembert. Mais il ne faudrait pas, en dehors de cas très particuliers, associer une vertu propre à telle ou telle variable; on doit être persuadé plutôt qu'à moins de raison solide le mieux est d'employer le temps dès le commencement ou, ce qui est préférable, après avoir déblayé le terrain et facilité les développements par l'introduction d'une variable appropriée telle que l'anomalie excentrique ou toute autre. Si l'on n'agissait pas ainsi, il faudrait, à mesure que les théories prennent de l'extension, multiplier les transformations des séries pour rendre possibles les réductions et les intégrations; le travail deviendrait alors fastidieux. M. Hill est très affirmatif à cet égard dans le Préambule de sa nouvelle théorie de Jupiter et de Saturne (*Astronomical papers*, t. IV, p. 15). M. Newcomb partage la même opinion (*Astronomical papers*, t. V, Part I). On pourra juger de la peine qu'a donnée à M. Leveau le développement de la théorie de Vesta (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XX) quand il s'est agi de calculer, suivant la méthode de Hansen, les perturbations dépendant des produits des masses perturbatrices. Il faut bien reconnaître que les variables auxiliaires, dont plusieurs empruntées à la théorie des fonctions elliptiques, n'ont pas donné les résultats espérés. Hansen a lui-même abandonné l'ingénieux procédé (*Mémoire sur la détermination des perturbations absolues dans des ellipses d'une excentricité et d'une inclinaison quelconques*, § IV) pour intégrer des différentielles dépendant de deux arguments différents comme

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(iu + i'g')du, \qquad \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(iu + i'g')dt,$$

u anomalie excentrique,

procédé qui paraissait à Jacobi (*Œuvres*, t. VIII, p. 301) l'acquisition

Digitized by Google

peut-être la plus importante faite depuis longtemps par la théorie des perturbations.

Il était naturel d'essayer la considération de l'intégration définie au lieu de l'intégration indéfinie en cherchant si quelques simplifications ne se présentaient pas pour des valeurs particulières de la variable. Ce but est atteint, au moins en principe (n° 22), dans le cas d'excentricités et d'inclinaisons assez faibles en isolant dans l'expression du carré de la distance Δ^2 une partie principale telle que

$$\Delta_0^2 = a'^2 - 2aa'\cos(l' - l) + a^2,$$

dépendant de la seule variable $l' - l$, d'une partie complémentaire σ suivant les puissances de laquelle les développements sont effectués; on se trouve conduit au calcul de certaines intégrales définies susceptibles d'être obtenues avec des Tables à double entrée. Le Dr Charlier, qui s'est occupé du même problème (n° 23), en donne deux solutions; la seconde utilise essentiellement l'introduction de l'argument discontinu de Gyldén avant l'intégration des équations différentielles; c'est, si l'on veut, la généralisation d'un procédé indiqué par Gyldén lui-même pour le calcul des perturbations spéciales des petites planètes, et qui a été employé assez fréquemment. Dans l'Introduction du Mémoire déjà cité de Hansen (*Perturbations absolues*, p. 7), d'autres tentatives sont mentionnées; mais nous pouvons douter de leur valeur vu l'absence d'applications. Rappelons aussi un travail de M. Liouville (*J. de M.*, t. I).

D'après ce qui a été dit, on aurait tort de caractériser une méthode par le choix de la variable indépendante. Gyldén a justement observé dans l'Introduction des Tables auxiliaires (n° 3) que les méthodes de Le Verrier et de Hansen, qui n'ont rien de commun au commencement, en arrivent au même point par cela seul que les procédés d'intégration sont identiques; Le Verrier n'utilise pas tous les avantages que lui donne sur Hansen la possession du développement algébrique de la fonction perturbatrice. Ce qui constitue l'originalité des recherches de Gyldén, ce n'est donc pas l'emploi de la longitude vraie comme variable indépendante; M. Backlund a trouvé préférable de la remplacer par une autre qui se rapproche du temps. La nouveauté c'est d'avoir supprimé les étapes traditionnelles de l'ellipse de Kepler et des perturbations des éléments de cette ellipse, pour envisager dans leur ensemble les caractères qualitatifs de l'orbite. C'est aux petites planètes que nous sommes redevables de ce progrès : car si pour beaucoup d'entre elles la notion d'éléments osculateurs conserve son utilité, d'autres, comme on peut s'en assurer, en parcourant l'excellente collection d'éphémérides publiée par le Dr Bauschinger, exigent un traitement spécial et un changement radical des procédés d'intégration.

Digitized by Google

Je ne sais si l'on a encore signalé l'espèce de parallélisme qui se rencontre entre les recherches de Gyldén à partir de 1881-1882 et les Mémoires de Laplace qui, s'échelonnant de 1772 à 1790, commencent avec des essais sur l'intégration des équations différentielles par approximation (t. VIII et IX des *Œuvres;* l'équation, que Tisserand appelle équation de Gyldén-Lindstedt y a une place importante), d'où découla bientôt la théorie des inégalités séculaires, pour aboutir aux admirables Mémoires du Tome XI, sur Jupiter et Saturne, sur l'accélération de la Lune et sur les satellites de Jupiter. La publication récente des *Œuvres* de Laplace m'a donné lieu de faire cette constatation qui, si elle diminue la part de l'originalité de Gyldén, doit convaincre les astronomes de la valeur de l'idée directrice tout au moins; on peut reprocher à Gyldén d'avoir parfois compliqué inutilement les choses.

Les Tables auxiliaires très étendues (n° 3) rendront aux astronomes de grands services; elles sont d'un usage plus commode que celles bien connues de Runkle, et les quantités réduites en Tables remplacent avantageusement, d'après M. Radau, les b_s^i et leurs dérivées. En jetant les yeux sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice, dans le tome X des *Annales* par exemple, p. 38 et suiv., on est frappé de la composition des coefficients fonctions linéaires des b_s^i et de leurs dérivées, en suite de laquelle le résultat final provient de la réduction de gros nombres. Faciliter cette réduction, comme l'a fait M. Radau dans ses *Recherches sur les inégalités de la Lune causées par les planètes,* serait une chose désirable.

A la théorie de Gyldén se rattachent deux Mémoires qui viennent d'être publiés presque en même temps par MM. Brendel et Backlund. Nous allons en parler avec quelque détail, en supposant le lecteur au courant de la terminologie et des principes exposés dans le tome IV du Traité de Tisserand (Chap. XXIII et XXIV).

La première Partie de la *Théorie des petites planètes* de M. Brendel, la seule publiée, peut être considérée comme le développement d'un Mémoire qui a remporté le prix Damoiseau en 1894. La question proposée était la suivante : « *Perfectionner les méthodes de calcul des perturbations des petites planètes en se bornant à représenter leurs positions, à quelques minutes d'arc près, dans un intervalle de 50 ans; construire ensuite des Tables numériques permettant de déterminer rapidement les parties principales des perturbations* ».

Dans l'Introduction, M. Brendel dit que, tout en prenant pour guides les principes de Gyldén, il a pu simplifier les développements à cause de la brièveté de l'intervalle supposé d'un siècle. C'est ainsi qu'il admet pour Jupiter un mouvement purement elliptique (l'erreur que cette hypothèse peut produire est appréciée plus loin dans le Chapitre VIII);

Digitized by Google

il lui paraît inutile, sauf des cas spéciaux, de pousser les développements au delà des termes du second degré par rapport aux excentricités et inclinaisons. Le choix de la longitude vraie comme variable indépendante comporte, suivant lui, des avantages très notables, surtout, semble-t-il, pour les intégrations; car, dans la suite, M. Brendel fait plus ou moins retour au temps pour préparer la comparaison de la théorie avec les observations. En passant, il répond à quelques réserves de M. Poincaré (*Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. II, p. 204).

M. Brendel annonce que la seconde Partie de sa Théorie des petites planètes comprendra des applications numériques avec des Tables générales; tout ce qui se rapporte à la comparaison de la théorie avec les observations; une série de Tables abrégées n'occupant pas plus de deux pages in-4° et faisant connaître pour chaque planète les éléments osculateurs. Cette seconde Partie, étant donnée l'habileté de M. Brendel dans cet ordre d'applications, offrira un intérêt particulier aux astronomes.

Les quatre premiers Chapitres (p. 11-55) ne donnent lieu qu'à peu de remarques. On sait qu'il s'agit d'ordonner les approximations suivant les degrés des termes et non suivant les puissances des masses; que la forme des intégrales étant admise, la valeur des coefficients résulte des comparaisons des formules en ne faisant appel qu'aux théorèmes mathématiques les plus simples. On procède à peu près comme Laplace et, plus tard, Pontécoulant dans leurs théories de la Lune. Après les développements concernant la fonction perturbatrice et ses dérivées, on arrive dans le Chapitre V à la transformation de v', longitude vraie de la planète troublante, en v (*Cf.* p. 59). Il semble que ce soit pour faciliter cette transformation que la relation entre t et v dans l'orbite troublée soit mise sous la forme [p. 32, éq. (57)a]

$$nt + \Lambda = v + \Sigma B_i \sin iv + W,$$

où n dans nt est pris comme une constante absolue. On sait que pour Laplace nt doit être remplacé par $\int n \cdot dt$ où n est variable; qu'on doit tenir compte des inégalités à longue période en les ajoutant à la longitude moyenne, les inégalités à courte période étant calculées à part. C'est aussi comme cela que procède M. Backlund, ce qui facilite certainement les calculs. A la vérité, la division des inégalités suivant la longueur de leur période est arbitraire. M. G.-W. Hill n'a pas tort de dire (*Introduction à la théorie de Jupiter et de Saturne*, p. 12) que Laplace n'a donné nulle part des préceptes pour fixer la ligne de démarcation entre les deux classes d'inégalités; et que Hansen a voulu faire

Digitized by Google

disparaître cet inconvénient en ajoutant à la longitude moyenne toutes les inégalités à courte et à longue période. Quoi qu'il en soit, il aurait été logique de la part de Gyldén, de rester fidèle au principe de la séparation des inégalités en deux classes. M. Brendel pare de son mieux aux difficultés, en réduisant le plus possible les inégalités élémentaires ou caractéristiques de W; dans l'expression (161) de

$$\frac{dW}{dv} = c_0 + \gamma + \text{termes périodiques},$$

il est possible d'annuler c_0 qui est du premier ordre, par rapport à la masse perturbatrice; mais dans les cas de commensurabilité, γ qui provient d'un terme en R^2, loin de pouvoir être annulé, est comparable au carré de l'excentricité. A cause de cela, M. Brendel est amené, un peu plus loin, à introduire un autre n et un autre $\mu = \frac{n'}{n}$,

$$n_1 = \frac{n}{1 + c_0 + \gamma}, \qquad \mu_1 = \frac{n'}{n_1};$$

l'étude des cas de libration donne lieu à une troisième acception de n. Évidemment cette multiplicité de définitions laisse à désirer (1). Mais pratiquement, à moins de circonstances exceptionnelles, on prend

$$n_1 = n \qquad \text{et} \qquad \mu_1 = \mu.$$

On a alors affaire aux planètes dites ordinaires. Dans le Chapitre VI, M. Brendel donne successivement ce qui se rapporte aux termes de degrés 0, 1 et 2. Nul doute que les applications et les Tables dont la publication est promise ne répondent bien à leur objet. Il paraît qu'il suffira de modifier légèrement les coefficients pour que les formules de représentation servent pour les siècles successifs.

Il ne nous reste plus à parler que du Chapitre VII, car le suivant qui est le dernier traite de questions secondaires. Les planètes caractéristiques forment l'objet du Chapitre susdit. Plus le rapport de commensurabilité est simple, plus les circonstances du mouvement s'en ressentent. La première classe répond à un rapport $\frac{i}{i+1}$, i étant entier; c'est le cas d'Hécube. La seconde classe répond au rapport $\frac{i}{i+2}$, telle la planète Hestia. L'auteur commence par montrer, en prenant les pla-

(1) Une difficulté de même ordre a été rencontrée à la fin (p. 108) du Mémoire (n° 16) lorsqu'on a voulu rapprocher les observations des formules qui n'étaient pas préparées pour donner le mouvement en fonction du temps.

Digitized by Google

nètes caractéristiques de la première classe et calculant les termes de degré zéro, que le procédé des coefficients indéterminés et de l'intégration par partie demeure applicable. Dans le cas de $\mu_1 = \frac{1}{2}$ (p. 124), les coefficients semblent devenir de l'ordre zéro ou même plus grands, ce qui jette un doute sur la valeur de la méthode et fait croire à la nécessité d'employer les artifices plus savants de Gyldén et Harzer. Mais la discussion montre qu'un tel cas ne peut pas généralement se présenter; l'auteur est ensuite conduit à signaler l'existence d'une lacune pour les valeurs de n_1 : elles ne peuvent tomber entre 593″,3 et 603″,8. Comme n_1 n'est pas le moyen mouvement osculateur, il est clair que cette conclusion ne doit pas être rapprochée sans réserve du fait bien connu constaté par les observations; mais quelque connexion doit exister. Nous laissons de côté le calcul des termes du premier degré. Celui des termes du second degré nous amène à parler des propriétés de la fonction S en ce qui concerne les destructions de termes hyperélémentaires ou autres (Cf. *Tisserand*, t. IV, p. 414). C'est une propriété fondamentale pour S de ne pas acquérir dans les approximations successives des diviseurs qui tendraient à produire des termes très grands dont la réduction serait comme impossible. M. Brendel a été l'un des premiers à l'établir (sur la planète Hestia); ensuite M. Olsson (théorie de la planète Égérie), Gyldén (*Orbites absolues*, p. 536 et suiv.) ont traité le même point. Tout récemment, dans sa thèse consacrée aux planètes caractéristiques de la première classe (n° 4), M. Ludendorff a apporté d'utiles compléments aux recherches antérieures (*Cf.* p. 20 et suiv. BRENDEL, *Théorie des petites planètes*, p. 117, 149).

Observons que la Lune peut être rangée dans les planètes caractéristiques de la première classe, et que Laplace a été le premier à rencontrer la difficulté signalée plus haut (*Mécanique céleste*, t. III, p. 203), quand la longitude vraie est prise pour variable indépendante; d'autre part que Pontécoulant (*Théorie analytique du système du monde*, t. IV, nos 90 et 91) a traité avec détails la même question quand le temps est la variable indépendante.

Les recherches de M. Backlund doivent nous occuper maintenant. Il n'y a lieu d'insister que sur le dernier Mémoire qui vient de paraître, le Mémoire de 1892 ayant été largement modifié et complété. Comme point de départ, il adopte les équations différentielles de Laplace qu'il transforme en substituant deux autres variables à la place du rayon vecteur r et du temps t; il pose

$$r^2 = a^2(1 + \rho),$$
$$\tau = nt + \psi;$$

Digitized by Google

a est une constante absolue; ψ désigne l'ensemble de tous les termes à longue période. L'introduction de ρ simplifie les équations; celle de τ comme variable indépendante est surtout importante : il est visible que τ est l'anomalie moyenne à laquelle on ajoute toutes les inégalités à longue période suivant le précepte de Laplace. Par là sont considérablement réduits certains coefficients qui se montraient de grandeur tout à fait anormale dans les premières applications. Il arrive même que l'expression de la longitude (p. 27-33) est plus facile à obtenir que celle du rayon vecteur (p. 11-27). Pour chacune des trois coordonnées, ρ, v et z (sinus de la latitude), M. Backlund évalue les termes élémentaires, les termes caractéristiques et les termes ordinaires. Chemin faisant, il rencontre un théorème (p. 23) concernant la destruction de termes et important pour le calcul de ρ. Les développements qui se rapportent à cette coordonnée auraient été notablement abrégés dans l'hypothèse d'un mouvement purement elliptique pour Jupiter. Mais M. Backlund a tenu à reproduire les résultats de notes publiées antérieurement (*C. R.*, t. CXXII, *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1897, t. VI, n° 4) concernant la difficulté des petits diviseurs dans l'intégration de l'équation différentielle du rayon vecteur, lorsque les éléments de Jupiter sont censés affectés par Saturne et Uranus. Dans la pratique on peut simplifier.

Toute la théorie n'occupe pas plus de 35 pages. Viennent ensuite la détermination des constantes arbitraires et une application à la planète (184) Deïopée. M. Backlund dit que le calcul des expressions de la longitude et du rayon vecteur, quand on dispose de Tables auxiliaires pour les coefficients et qu'on se borne aux termes du second degré inclusivement, ne réclame pas plus de quatre ou cinq heures. La détermination des arbitraires, la résolution des équations de condition....., c'est-à-dire le travail proprement astronomique constituent la partie principale. Une première approximation pour laquelle on ne retient que les termes les plus importants des équations, permet d'abord d'évaluer les termes complémentaires du second degré; on passe ensuite à une deuxième approximation. M. Backlund a naturellement profité des systèmes d'éléments osculateurs connus. On arrive ainsi aux valeurs suivantes :

n	625",000	Λ	259°.25',0	1850,0
log $\varkappa$	$\bar{1}$,31100	Γ	183.10,8	
log ι	$\bar{2}$,85757	ϑ	305.45,5	

Le calcul est ensuite repris, et la comparaison avec les observations des longitudes et des latitudes est effectuée, ce qui conduit à deux

Digitized by Google

systèmes d'équations de condition, respectivement à 4 et 2 inconnues, lesquels donnent les valeurs ci-dessous des constantes :

n	625",059	Λ	259°.27',9	1850,0
log x.....	$\bar{1}$,30772	Γ	183. 8,7	
log t.....	$\bar{2}$,85757	$\mathfrak{T}$ .....:	305.45,5	

Il n'aurait pas été sans intérêt de connaître les nombres obtenus au début des approximations.

Quelques remarques sont à reproduire : la constante x, qui joue le rôle de l'excentricité, dépasse notablement les valeurs osculatrices actuelles (l'angle dont le sinus est l'excentricité atteint 5°49',7 au lieu de 4°22',7, maximum pour les éléments osculateurs).

L'ensemble ψ des termes à longue période comprend les termes élémentaires ψ_0 et les termes caractéristiques ψ_1; le terme principal de ψ_1 peut atteindre 10° dans une période d'environ un siècle et demi.

Les grandes inégalités de ψ donnent la raison des mouvements apparents des périhélies (déduits des valeurs osculatrices fournies par les observations) des deux planètes Hécube et Deïopée. En réalité, les moyens mouvements des deux périhélies sont directs; mais on serait tenté de conclure de la discussion des observations actuelles que celui d'Hécube est rétrograde pendant que celui de Deïopée est direct. Il est clair que, dans de telles circonstances, on ne peut avoir, avec un intervalle relativement court pour les observations, que des résultats incertains pour les vrais mouvements moyens des arguments.

En somme la solution du problème, naguère proposé par l'Académie des Sciences, ne laisse plus grand'chose à désirer, grâce aux travaux de MM. Harzer, Bohlin, Simonin, etc. et des deux savants dont nous venons de parler en dernier lieu. Peut-être conviendra-t-il de simplifier un peu; de revenir, dans une juste mesure, aux procédés anciens, en faisant, comme le conseille M. Hill (n° 26), une place plus large aux méthodes numériques. La revision des principes de la Mécanique céleste était utile; mais aujourd'hui l'étude théorique et rigoureuse du mouvement d'astres fictifs réduits à de simples points matériels, du plus haut intérêt pour le mathématicien, ne correspond pas au cas de la nature. Les astronomes doivent prévoir avec M. Poincaré (*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1898) l'intervention prochaine peut-être d'autres actions, dont le milieu dit *résistant* a offert le premier exemple; et le rapprochement de la théorie et de l'observation doit demeurer leur principale préoccupation.

O. Callandreau.

Digitized by Google

MEYER (W.). — Das Weltgebäude. Leipzig et Vienne (*Bibliographisches Institut*, 1898); 669 pages in-4°.

Voici un livre de vulgarisation où les astronomes de profession pourront trouver quelques renseignements utiles.

L'Ouvrage débute par des considérations générales sur la lumière, les instruments d'Optique et d'Astronomie, l'influence des conditions atmosphériques dans les observations, la Photographie astronomique et la Photométrie; puis sur l'analyse spectrale et le principe de Döppler-Fizeau.

La description de la Lune occupe une quarantaine de pages; puis vient celle des différentes planètes.

La partie relative aux météores et à leurs relations avec les comètes est assez développée.

Le Soleil occupe naturellement la place d'honneur et quelques pages sont consacrées aux relations entre les phénomènes solaires et le magnétisme terrestre.

La partie descriptive se termine par l'étude du monde stellaire; de la spectroscopie stellaire, des étoiles doubles et variables et des différentes théories proposées au sujet des étoiles nouvelles et des divers types d'étoiles variables.

La seconde Partie de l'Ouvrage est consacrée aux mouvements des corps célestes : on s'y abstient naturellement de toute théorie mathématique. Après un Chapitre employé à décrire les procédés de mesure en Astronomie, quelques pages sont consacrées à la Géodésie.

Vient enfin un résumé assez clair du développement historique de l'Astronomie mathématique avant et après Newton.

L'Ouvrage, imprimé avec un certain luxe, est accompagné de gravures nombreuses et de planches coloriées où l'on trouve des reproductions de spectres, des paysages terrestres et même des paysages planétaires idéaux. Dans ces derniers, la fantaisie se donne naturellement carrière; on s'étonnera de voir combien la végétation des satellites de Jupiter ressemble à celle de notre globe, et surtout, dans une vue d'une éclipse de Soleil à la surface de la Lune, de voir le disque noir de la Terre entouré d'un cercle rouge comme si le diamètre apparent de la Terre était peu différent de celui du Soleil.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

AVIS COMMUNIQUÉ PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DE GÖTTINGEN.

La *Société royale des Sciences de Göttingen* a l'intention d'achever promptement la publication commencée des Œuvres de Gauss. Dans ce but elle prie toutes les personnes ou sociétés qui ont en leur possession des manuscrits se rapportant à Gauss ou à son œuvre, de vouloir bien l'en avertir et lui faciliter l'étude de ces manuscrits.

SUR LA FAÇON DE GROUPER LES TERMES DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES QU'ON RENCONTRE EN MÉCANIQUE CÉLESTE;

PAR M. H. POINCARÉ.

1. J'ai exposé, dans le *Bulletin astronomique* (juillet 1897) une méthode qui permet de développer les coordonnées des astres en séries ne contenant que des sinus et des cosinus.

Je voudrais aujourd'hui revenir sur ce sujet pour montrer comment il convient de grouper les termes afin d'obtenir une convergence aussi rapide que possible et les diverses particularités que l'on peut mettre en évidence en décomposant et groupant les termes de différentes manières.

Ce que j'ai à dire s'applique au cas général avec quelques changements de détail. Néanmoins, pour simplifier et abréger cet exposé, je me bornerai au cas particulier connu sous le nom de *problème restreint*.

Je supposerai un corps central S autour duquel circulent une masse troublante J très petite et une masse troublée P infiniment petite. La masse P étant infiniment petite, le mouvement de J doit obéir aux lois de Képler; je supposerai l'orbite de J circulaire; l'inclinaison nulle de façon que P se meuve dans le plan de l'orbite de J et enfin l'excentricité de P très petite, de façon que P se meuve dans le même sens que J dans une orbite sensiblement circulaire.

Digitized by Google

J'appelle a et e le demi grand axe et l'excentricité de P; μ la masse de J, l l'anomalie moyenne de P et g la longitude de son périhélie, l' la longitude de J, et je pose

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{a} - \sqrt{a(1-e^2)}, & x_2 = \sqrt{a} + \sqrt{a(1-e^2)}, \\ 2y_1 = l - g + l', & 2y_2 = l + g - l'. \end{cases}$$

Je vois alors que les équations du mouvement prennent la forme canonique

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dF}{dy_1}, & \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{dF}{dy_2}, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_1}, & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_2}. \end{cases}$$

F est une fonction développable suivant les puissances de μ et périodique par rapport aux y.

Pour $\mu = 0$, cette fonction F se réduit à

$$F_0 = \frac{2}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{(x_2 - x_1)}{2}$$

(à la condition de choisir convenablement les unités de longueur, de masse et de temps) et ne dépend que des x.

Nous nous trouvons donc dans les conditions du problème B (*Bull. astr.*, t. XIV, p. 242). Les résultats obtenus à propos de ce problème sont donc applicables ici; ils peuvent s'énoncer sous la forme suivante.

Soient z_1, z_2, ϖ_1, ϖ_2 quatre constantes d'intégration; soient n_1 et n_2 deux nouvelles constantes dépendant de z_1, de z_2 et de μ,

$$w_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad w_2 = n_2 t + \varpi_2.$$

Les variables x et y peuvent se développer en séries procédant suivant les puissances de μ,

$$(3)\qquad \begin{cases} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \\ y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots. \end{cases}$$

Les x_i^k et les y_i^k (sauf y_1^0 et y_2^0 qui sont égaux à w_1 et w_2) sont développables en séries trigonométriques procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de w_1 et w_2; le coefficient de chaque terme dépendant de z_1 et de z_2.

Enfin n_1 et n_2 peuvent se développer suivant les puissances

Digitized by Google

de μ, chaque terme étant une fonction de z_1 et de z_2, de sorte que

$$(4) \qquad n_i = n_i^0 + \mu n_i^1 + \ldots.$$

Nous supposerons d'aillenrs

$$x_1^0 = z_1, \qquad x_2^0 = z_2,$$

d'où

$$(5) \qquad n_1^0 = \frac{4}{(z_1+z_2)^3} + \frac{1}{2}, \qquad n_2^0 = \frac{4}{(z_1+z_2)^3} - \frac{1}{2}.$$

La constante $z_1 = x_1^0$ est très petite et de l'ordre du carré de l'excentricité, et il n'est pas inutile de remarquer que nos expressions x_i^k et y_i^k (sauf y_1^0 et y_2^0) peuvent se développer suivant les puissances de

$$\sqrt{z_1}\cos w_1, \quad \sqrt{z_1}\sin w_1,$$

chaque terme dépendant encore de w_2 et de z_2 et étant périodique par rapport à w_2.

2. Observons d'abord que de ces séries on en peut déduire une infinité d'autres de même forme.

Remplaçons, en effet, les constantes z et ϖ par les développements suivants procédant suivant les puissances de μ :

$$(6) \qquad \begin{cases} z_i = z_i^0 + \mu z_i^1 + \mu^2 z_i^2 + \ldots, \\ \varpi_i = \varpi_i^0 + \mu\varpi_i^1 + \mu^2\varpi_i^2 + \ldots. \end{cases}$$

Les z_i^k et les ϖ_i^k sont des fonctions de quatre nouvelles constantes

$$z'_1, \quad z'_2, \quad \varpi'_1, \quad \varpi'_2;$$

on a

$$z_i^0 = z'_i, \quad \varpi_i^0 = \varpi'_i$$

et les autres z_i^k, ϖ_i^k sont des fonctions *quelconques* de z'_1 et z'_2, de ϖ'_1 et ϖ'_2.

Il est clair que si, dans les séries (3), je remplace les constantes z_i et ϖ_i par leurs développements (6), puis que j'ordonne de nouveau par rapport à μ, j'obtiendrai pour les x_i et les y_i de nouveaux développements qui seront de même forme que les séries (3), c'est-à-dire qui procéderont d'une part suivant les puissances de μ, d'autre part suivant les sinus et cosinus des multiples de

$$w'_1 = n_1 t + \varpi'_1, \qquad w'_2 = n_2 t + \varpi'_2,$$

Digitized by Google

et dont les coefficients dépendront des nouvelles constantes z' et ϖ'.

Le cas le plus remarquable sera celui où ces coefficients dépendront seulement des z' et seront indépendants des ϖ', ainsi qu'il arrivait pour les séries (3) elles-mêmes.

3. Comment peut se faire le choix si largement arbitraire de ces développements (6) qui définissent les constantes z'_i et ϖ'_i ?

On peut d'abord s'arranger pour que le rapport des deux moyens mouvements n_1 et n_2 soit indépendant de μ et que l'on ait

$$(7) \qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{8 + (z'_1 + z'_2)^3}{8 - (z'_1 + z'_2)^3}.$$

Les équations (5) nous donnent

$$n_1^0 - n_2^0 = 1.$$

Si nous n'avions pas ainsi une relation entre n_1^0 et n_2^0, nous pourrions choisir les développements (6) de telle façon, que les moyens mouvements n_1 et n_2 soient tous deux indépendants de μ; malheureusement l'existence de cette relation s'y oppose.

Soit

$$n_1^1 - n_2^1 = \varphi(z_1, z_2).$$

Formons alors les équations

$$(8) \quad \begin{cases} \left[\dfrac{4}{(z'_1 + z'_2)^3} + \dfrac{1}{2}\right][1 + \mu\varphi(z'_1, z'_2)] = n_1^0 + \mu n_1^1 + \mu^2 n_1^2 + \ldots, \\ \left[\dfrac{4}{(z'_1 + z'_2)^3} - \dfrac{1}{2}\right][1 + \mu\varphi(z'_1, z'_2)] = n_2^0 + \mu n_2^1 + \mu^2 n_2^2 + \ldots. \end{cases}$$

Comme les n_i^k sont des fonctions connues de z_1 et z_2, nous pouvons, de ces équations (8), tirer z'_1 et z'_2 en fonctions de z_1, de z_2 et de μ, et il est aisé de voir que l'on obtient ainsi des développements de la forme (6) (les z_i^k et les ϖ_i^k dépendant seulement des z' et non pas des ϖ').

Les équations (8) entraînent d'ailleurs la relation (7).

4. On peut aussi choisir pour les constantes z'_i et ϖ'_i les valeurs initiales des x_i et des y_i pour $t = 0$.

Prenons, en effet, les équations (3) et remplaçons-y t par zéro,

Digitized by Google

x_i et y_i par z'_i et ϖ'_i; nous trouverons ainsi

$$(9)\qquad \begin{cases} z'_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \\ \varpi'_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots. \end{cases}$$

Dans les expressions x_i^k et y_i^k, les arguments w_1 et w_2 doivent être remplacés par ϖ_1 et ϖ_2.

Les seconds membres des équations (9) sont des fonctions connues des z, des ϖ et de μ; pour $\mu = 0$, ces seconds membres se réduisent à

$$x_i^0 = z_i, \qquad y_i^0 = \varpi_i.$$

On tirera donc facilement de ces équations (9) les z et les ϖ en fonctions des nouvelles constantes z' et ϖ' et de μ, sous forme de développements procédant suivant les puissances de μ et qui ne seront autre chose que les développements (6) cherchés.

L'inconvénient de ce choix, c'est que les constantes z et les différences $\varpi - \varpi'$ dépendent non seulement de z'_1 et z'_2, mais de ϖ'_1 et ϖ'_2. Il n'en était pas ainsi quand nous procédions comme au n° 3.

Il en résulte que les séries (3) se trouvent remplacées par des séries (3 *bis*) de même forme, mais dont les coefficients dépendent, non seulement de z'_1 et z'_2, mais de ϖ'_1 et ϖ'_2. Au contraire, en procédant comme au n° 3, on trouve des séries de même forme encore et dont les coefficients sont indépendants des deux constantes ϖ'.

5. Je me propose d'abord de montrer comment on pourra déduire des séries (3) les développements auxquels aurait conduit l'application des procédés de l'ancienne Mécanique céleste.

Adoptons les constantes z' et ϖ' du n° 4 et envisageons les séries (3 *bis*) obtenues à la fin de ce numéro.

Les équations (4) nous donnent n_1 et n_2 en fonctions de μ, de z_1 et de z_2. En les combinant avec les équations (6), nous aurons n_1 et n_2 en fonctions de μ, des z' et des ϖ'; soit donc

$$(4\ bis)\qquad n_i = n_i'^0 + \mu n_i'^1 + \mu^2 n_i'^2 + \ldots.$$

Les $n_i'^k$ seront donnés en fonctions des z' et des ϖ' et l'on aura

$$(4\ bis)\qquad n_i'^0 = \frac{4}{(z'_1 + z'_2)^3} \pm \frac{1}{2}.$$

Digitized by Google

Considérons alors les séries

$$(3\ bis) \qquad x_i = \Sigma \mu^k x_i'^k; \qquad y_i = \Sigma \mu^k y_i'^k.$$

Soit

$$A \sin(m_1 w'_1 + m_2 w'_2)$$

un terme de $x_i'^k$ ou $y_i'^k$. Le coefficient A dépend des z' et des ϖ'; m_1 et m_2 sont deux entiers; enfin le signe sin pourrait être remplacé par le signe cos.

Ce terme dépend *indirectement* de μ, puisque l'on a

$$m_1 w'_1 + m_2 w'_2 = (m_1 n_1 + m_2 n_2) t + (m_1 \varpi'_1 + m_2 \varpi'_2)$$

et que, d'après les équations (4 *bis*), n_1 et n_2 dépendent de μ.

Développons donc ce terme suivant les puissances de μ, il viendra

$$(10) \quad A \sin(m_1 w'_1 + m_2 w'_2) = A \sin \omega + \mu A t (m_1 n_1'^1 + m_2 n_1'^2) \cos \omega + \ldots$$

où

$$\omega = (m_1 n_1'^0 + m_2 n_2'^0) t + (m_1 \varpi'_1 + m_2 \varpi'_2).$$

Remplaçons maintenant chaque terme des séries (3 *bis*) par son développement (10) et ordonnons de nouveau par rapport à μ; nous obtiendrons ainsi des séries

$$(3\ ter) \qquad \begin{cases} x_i = x_i''^0 + \mu x_i''^1 + \mu_2 x_i''^2 + \ldots \\ y_i = y_i''^0 + \mu y_i''^1 + \mu_2 y_i''^2 + \ldots. \end{cases}$$

Les séries (3 *ter*) comprennent comme les séries (3) des termes purement trigonométriques, mais elles comprennent en outre des termes où le temps sort des signes trigonométriques, tels que le second terme et les termes suivants du développement (10).

Chaque terme est d'ailleurs tout à fait indépendant de μ.

Les séries (3 *ter*) *sont celles auxquelles auraient conduit les anciens procédés.*

6. Nous observerons d'abord que ce rapprochement nous fournit immédiatement un théorème applicable aux séries obtenues par les anciens procédés.

Ces séries contiennent des termes non séculaires, ne contenant

Digitized by Google

qu'une ligne trigonométrique de

$$m_1 w''_1 + m_2 w''_2$$

où les w''_i sont des fonctions linéaires du temps

$$w''_i = n'^0_i t + \varpi'_i.$$

Elles contiennent en outre des termes où une pareille ligne trigonométrique est multipliée par t, ou par t^2 ou par une puissance supérieure de t. Séparons ces diverses sortes de termes et écrivons par exemple le développement de x_1,

$$x_1 = \Sigma A \sin\omega + t \Sigma B \cos\omega + t^2 \Sigma C \sin\omega + \ldots,$$

où

$$\omega = m_1 w''_1 + m_2 w''_2 + h,$$

h étant une constante.

Le théorème en question, c'est que les coefficients B, C, etc. peuvent se déduire des coefficients A à l'aide des formules suivantes

$$B = \frac{A}{1}(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2), \qquad C = \frac{-A}{1.2}(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où α_1 et α_2 sont les constantes $n_1 - n'^0_1$ et $n_2 - n'^0_2$.

Ainsi la connaissance de ces deux constantes α_1 et α_2 et des termes non séculaires suffit pour donner immédiatement celle de tous les termes séculaires. On voit de plus que les termes « purement séculaires » contenant une puissance de t et pas de ligne trigonométrique doivent toujours se détruire quelque loin qu'on pousse l'approximation.

7. Si nous cherchons à comparer les séries (3 *ter*) données par les anciens procédés avec les séries (3) données par les procédés nouveaux, nous remarquerons d'abord que les séries (3 *ter*), ordonnées suivant les puissances de μ, convergent pourvu que le temps soit suffisamment petit; la convergence cesse si le temps dépasse une certaine valeur.

En ce qui concerne les séries (3), nous sommes certains que les premiers termes convergent assez vite pour les besoins de la pratique; mais nous n'avons pas le moyen de démontrer que la

Digitized by Google

série converge, même pour les petites valeurs du temps, au sens que les analystes attachent à ce mot. Nous pouvons affirmer au contraire que la convergence, si elle a lieu, ne saurait être uniforme pour toutes les valeurs du temps d'une part, et d'autre part pour toutes les valeurs des constantes comprises entre certaines limites.

Dans ces conditions, on est tenté de se demander si les méthodes nouvelles où l'on évite les développements procédant suivant les puissances du temps présentent des avantages bien réels.

On se rendra mieux compte des cas où les avantages sont réels et de ceux où ils sont illusoires si l'on prend garde aux réflexions suivantes.

On peut se proposer deux buts différents, ou bien représenter les positions des astres pendant un temps très long avec une approximation médiocre, ou bien les représenter pendant un temps assez court avec une grande approximation.

Supposons que l'une des séries (3) contienne deux termes

$$A \sin \alpha t, \quad B \sin \beta t$$

et que

$$A > B, \quad A\alpha < B\beta.$$

Il pourra très bien se faire que, si l'on se propose le premier but, on doive tenir compte du premier de ces termes et négliger le second qui est plus petit si t est assez grand; et qu'au contraire, si l'on se propose le second but, on doive tenir compte du second de ces termes et négliger le premier qui est plus petit si l'on ne donne à t que de petites valeurs.

On voit donc que le choix des termes que l'on doit conserver ou négliger ne peut se faire sans qu'on se soit bien rendu compte du but que l'on cherche à atteindre.

Supposons donc qu'on veuille représenter les mouvements pendant un temps T et avec une approximation H; nous devons négliger le terme $A \sin \alpha t$, si A est plus petit que H, ou encore si $A\alpha T$ est plus petit que H.

Il pourra se faire que αT soit très petit, pas assez cependant pour que le terme doive être négligé. Dans ce cas, ce terme $A \sin \alpha t$ différera très peu de $A\alpha t$. On ne voit pas bien alors quel avantage il peut y avoir à lui conserver la forme trigonométrique et s'il ne

Digitized by Google

vaut pas mieux le développer suivant les puissances de t, en bornant le développement à un ou deux termes. Un très grand nombre de termes, se réduisant à une constante multipliée par t, t^2 ou t^3, peuvent alors être réunis en un seul.

Supposons encore que l'on ait un certain nombre de termes

$$A \sin \alpha t + A_1 \sin \alpha_1 t + A_2 \sin \alpha_2 t + \ldots + A_n \sin \alpha_n t$$

dont les périodes soient très peu différentes. Si les expressions $(\alpha_k - \alpha)T$ sont assez petites pour qu'on puisse en négliger le carré, on pourra remplacer ces $n+1$ termes par deux termes seulement

$$A \sin \alpha t + t \cos \alpha t [A_1(\alpha_1 - \alpha) + A_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + A_n(\alpha_n - \alpha)],$$

ce qui sera une simplification évidente. L'approximation plus grande que semble donner la formule complète serait d'ailleurs le plus souvent illusoire parce que les périodes ne seraient pas exactement connues.

On voit que dans certains cas on peut avoir intérêt à revenir aux développements qui procèdent suivant les puissances du temps, et à adopter, pour ainsi dire, une méthode mixte entre les anciens procédés et les nouveaux. Certains termes conservent la forme trigonométrique, d'autres se développent de manière à faire sortir le temps des signes sinus et cosinus. Le choix des termes auxquels la forme trigonométrique doit être conservée dépend du but que l'on se propose.

Au point de vue de la convergence, ces développements mixtes seraient équivalents aux séries (3 *ter*) des anciens procédés, le temps pendant lequel elles resteraient convergentes étant en général plus grand.

8. Laissons maintenant de côté les anciens procédés et revenons aux développements (3). Nous devrons observer que ces développements contiennent certains termes qui peuvent être très grands, mais que le plus souvent on peut obtenir une sorte de compensation en groupant les termes d'une manière convenable.

Il arrivera fréquemment qu'un groupe contiendra des termes très grands et que la somme des termes d'un même groupe sera néanmoins très petite.

Digitized by Google

Rappelons, en effet, que les divers termes des séries (3) ont été obtenus par une série d'opérations, comprenant des intégrations, des additions, des multiplications, des différentiations.

Supposons donc que l'on ait à intégrer un terme de la forme

$$A \cos \alpha t,$$

on trouvera

$$\frac{A \sin \alpha t}{\alpha}.$$

Si α est très petit, ce terme sera susceptible de devenir très grand; il ne le deviendra pas cependant pour les valeurs finies de t, car il sera toujours plus petit que At.

Si nous avions à intégrer un terme

$$A \sin \alpha t$$

nous trouverions $-\frac{A \cos \alpha t}{\alpha}$, ou, en ajoutant une constante,

$$\frac{A}{\alpha} - \frac{A \cos \alpha t}{\alpha}.$$

Chacun de ces deux termes est très grand, mais l'ensemble des deux termes est fini et plus petit que $\frac{A \alpha t^2}{2}$.

On voit quel intérêt il y a à grouper les termes d'une manière convenable.

Partons maintenant du terme $A \cos \alpha t$ et supposons qu'une première intégration ait donné

$$\frac{A \sin \alpha t}{\alpha}.$$

Supposons qu'on ait ensuite à multiplier ce terme par $\sin \beta t$, ce qui donne

$$\frac{A \sin \alpha t \sin \beta t}{\alpha} = \frac{A}{2\alpha} \cos(\beta - \alpha) t - \frac{A}{2\alpha} \cos(\beta + \alpha) t;$$

puis à intégrer de nouveau ce qui donne

$$\frac{A \sin(\beta - \alpha) t}{2\alpha(\beta - \alpha)} - \frac{A \sin(\beta + \alpha) t}{2\alpha(\beta + \alpha)}.$$

Si β est fini et α très petit, chacun de ces deux termes est très grand; ils ont tous deux à peu près même période et si on les

Digitized by Google

réduit ils se compensent presque exactement, car leur ensemble est de l'ordre de $\frac{At}{\beta}$.

C'est ce qui explique une circonstance qui se présente bien souvent dans le calcul des perturbations du second ordre. On trouve des termes qui, individuellement, ont une valeur considérable, mais qui se détruisent presque complètement deux à deux.

Ces exemples suffisent pour montrer l'influence du groupement des termes sur la rapidité de la convergence.

9. Considérons maintenant les différents termes des développements (3) et voyons quelle est leur forme.

Soit

$$\mu^p A \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (m_1 w_1 + m_2 w_2)$$

l'un de ces termes, A étant une fonction de z_1 et z_2.

Nous pouvons toujours supposer que les développements (4) se réduisent à leurs deux premiers termes de telle façon que

$$n_1 = n_1^0 + \mu n_1^1, \qquad n_2 = n_2^0 + \mu n_2^1$$

et que

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1^0}{n_2^0} = \frac{8 + (z_1 + z_2)^3}{8 - (z_1 + z_2)^3},$$

soit indépendant de μ et ne dépende que de $z_1 + z_2$.

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, nous n'aurions qu'à passer des constantes z aux constantes z' définies au n° 3.

Cela posé, voyons quelle sera la forme de la fonction A. On sait que les intégrations successives introduisent dans cette fonction des diviseurs de la forme

$$q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0,$$

q_1 et q_2 étant des entiers; c'est ce que nous appellerons les *petits diviseurs*.

Nous écrirons donc

$$A = \frac{B}{\Pi},$$

Π étant le produit des petits diviseurs et B une fonction de z_1 et z_2. La fonction B reste finie pour toutes les valeurs envisagées des

Digitized by Google

constantes z_1 et z_2. Au contraire, comme certains petits diviseurs peuvent s'annuler quand $\frac{n_1^0}{n_2^0}$ est commensurable, la fonction A pourrait devenir infinie.

Je puis considérer B comme fonction de z_1 et $z_1 + z_2$, ou, ce qui revient au même, de z_1 et de n_1^0. Quant à Π, c'est un polynome entier en n_1^0, car le petit diviseur

$$q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0 = (q_1 + q_2) n_1^0 - q_2.$$

Si donc je regarde un instant z_1 comme une constante, A sera égal à une fonction de n_1^0, holomorphe dans le domaine considéré, divisée par un polynome en n_1^0.

Je puis poser

$$B = C\Pi + D,$$

où C est une autre fonction holomorphe en n_1^0 et D un polynome d'ordre moindre que Π. Il vient donc

$$A = C + \frac{D}{\Pi}$$

et si l'on décompose la fraction rationnelle en éléments simples, on aura décomposé le terme envisagé en plusieurs autres

$$(11)\quad \mu^p C \frac{\sin}{\cos}(m_1 w_1 + m_2 w_2) + \Sigma \mu^p \frac{E}{(q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0)^h} \frac{\sin}{\cos}(m_1 w_1 + m_2 w_2),$$

où C est une fonction holomorphe de z_1 et n_1^0 et où les autres termes contiennent au numérateur une fonction E, holomorphe en z_1 seulement et au dénominateur une puissance entière h d'un seul petit diviseur.

Si l'on se rappelle la manière dont les différents termes des développements (3) ont été obtenus, on verra que le polynome Π sera le produit d'au plus $2p - 1$ petits diviseurs, en ce qui concerne le développement de x_1 et x_2, et d'au plus $2p$ petits diviseurs, en ce qui concerne le développement de y_1 et y_2. Ce polynome est donc au plus de degré $2p - 1$ (ou $2p$), p étant l'exposant de μ dans le terme considéré.

Dans chaque terme de (11) l'exposant h est au plus égal à $2p - 1$ (ou $2p$); j'ajoute que s'il atteint sa limite $2p - 1$ (ou $2p$), on doit avoir

$$\frac{m_1}{q_1} = \frac{m_2}{q_2}.$$

Digitized by Google

10. Supposons maintenant que, partant des séries (3), nous décomposions chaque terme en plusieurs autres par la formule (11). Nous pourrons répartir les termes de la série ainsi obtenue de la manière suivante.

Un premier groupe comprendra tous les termes qui ne contiennent au dénominateur aucun petit diviseur [tels que le premier terme de l'expression (11)].

Chacun des autres groupes sera formé des divers termes qui contiennent au dénominateur une puissance d'un même petit diviseur.

Considérons, par exemple, le groupe des termes qui contiennent au dénominateur une puissance de

$$\delta = q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0,$$

et qu'on peut appeler le groupe (q_1, q_2).

Chacun des termes du groupe (g_1, g_2) contiendra en facteur $\frac{\mu}{\delta^h}$, où la différence $2p - 1 - h$, en ce qui concerne x_1 et x_2 (ou $2p - h$ en ce qui concerne y_1 et y_2), est positive ou nulle.

Rangeons dans un même sous-groupe les termes où cette différence a la même valeur; nous appellerons *sous-groupe principal* celui où cette différence est nulle.

Voici ce qui justifie ce groupement. Si δ est très petit et par exemple de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, certains termes d'ordre élevé par rapport à μ pourront devenir sensibles par suite de la présence d'une puissance de δ au dénominateur.

L'importance du terme se trouve alors mesurée par la valeur de la différence $2p - 1 - h$. Les termes pour lesquels cette différence est nulle sont évidemment les plus importants; ce sont même, le plus souvent, les seuls dont on ait à tenir compte.

Les deux nombres q_1 et q_2 peuvent toujours être supposés premiers entre eux, de sorte qu'on peut toujours trouver deux entiers r_1 et r_2 tels que

$$q_1 r_2 - q_2 r_1 = 1$$

et poser

$$m_1 = \alpha q_1 + \beta r_1,$$
$$m_2 = \alpha q_2 + \beta r_2,$$

α et β étant deux nouveaux entiers. Nous pourrons classer dans

Digitized by Google

une même série partielle tous les termes d'un même sous-groupe qui correspondent à une même valeur de β.

Le diviseur δ étant en effet très petit, $q_1 n_1 + q_2 n_2$ est aussi très petit, de sorte que tous les termes d'une des séries partielles ainsi formées auront à peu près même période, je veux dire une période voisine de

$$\frac{2\pi}{\beta(r_1 n_1 + r_2 n_2)}.$$

Le sous-groupe principal ne contiendra qu'une seule série partielle, car pour ce sous-groupe on a

$$\frac{m_1}{q_1} = \frac{m_2}{q_2},$$

d'où $\beta = 0$.

A part les termes du premier groupe qui, ne contenant pas de petits diviseurs, sont généralement très petits, tous nos termes vont se trouver ainsi répartis en séries partielles.

Or, il arrive cette circonstance singulière que *chacune de ces séries partielles peut être facilement sommée,* je veux dire que sa sommation se ramène à un nombre fini de quadratures.

Généralement on n'aura à tenir compte que d'un petit nombre de termes isolés et en outre d'un petit nombre de séries partielles. On peut dire que dans les cas les plus difficiles traités jusqu'ici on n'a jamais eu à considérer qu'une seule série partielle provenant d'un seul sous-groupe principal.

C'est là, sous une forme nouvelle, la méthode de M. Bohlin qui se trouve ainsi rattachée à la méthode qui nous a donné les séries (3) et par elle aux anciens procédés.

Si l'on se borne à sommer la série partielle qui correspond au sous-groupe principal, et que l'on a seule à envisager en général, on retombe sur la méthode de Delaunay.

Si les moyens mouvements sont presque commensurables, il peut arriver que les séries partielles divergent. L'expression analytique à laquelle conduit leur sommation n'en conserve pas moins un sens. C'est ainsi que l'expression $\frac{1}{1-x}$ conserve un sens alors même que, x étant plus grand que 1, la série

$$1 + x + x^2 + \ldots$$

a cessé d'être convergente.

Digitized by Google

Lors même qu'une série partielle diverge, on peut encore légitimement la remplacer par cette expression analytique. C'est ce qui permet aux méthodes de Delaunay et de Bohlin d'être applicable à des cas où l'emploi direct des séries (3) deviendrait illusoire et même au cas de la libration où la forme des orbites est si différente de la forme ordinaire.

C'est ainsi que, malgré ces différences, ce cas de libration peut encore se rattacher à la méthode qui nous a fourni les séries (3).

11. Voyons maintenant comment les solutions périodiques et asymptotiques peuvent se déduire des séries (3). Nous avons vu que nos séries sont développables suivant les puissances de

$$\sqrt{z_1}\cos w_1, \quad \sqrt{z_1}\sin w_1,$$

les coefficients du développement dépendant d'ailleurs de z_2 et w_2.

Si nous donnons alors à la constante z_1 la valeur zéro, nos séries ne contiendront plus que l'argument w_2; elles seront périodiques. On retombe ainsi sur les solutions périodiques de la première sorte.

12. Cherchons maintenant à obtenir les solutions périodiques de la deuxième sorte. Pour cela reprenons nos séries (3) en supposant comme au n° 9

$$n_i = n_i^0 + \mu n_i^1, \qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1^0}{n_2^0}.$$

Si nous donnons au rapport $\frac{n_1^0}{n_2^0}$ une valeur commensurable, un des petits diviseurs

$$g_1 n_1^0 + g_2 n_2^0$$

s'annulera, de sorte que certains termes du développement pourraient devenir infinis.

Supposons $\varpi_2 = 0$ et remplaçons la constante ϖ_1 par un développement procédant suivant les puissances de μ

$$\varpi_1 = \varpi_1^0 + \mu\varpi_1^1 + \mu^2\varpi_1^2 + \ldots \tag{12}$$

et dont les coefficients sont des nouvelles constantes que je me réserve de déterminer plus loin.

Digitized by Google

Considérons un terme quelconque des séries (3) et remplaçons-y la constante ϖ_1 par son développement (12). Ce terme deviendra développable suivant les puissances de μ. Développons de même tous les termes des séries (3) et ordonnons de nouveau suivant les puissances de μ. Nous obtiendrons ainsi de nouvelles séries que j'appellerai (3 a).

Soit

$$\frac{\mu^p}{(q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0)^h} A \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(m_1 w_1 + m_2 w_2)$$

un terme de ces nouvelles séries, le coefficient A ne contenant plus le petit diviseur $q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$.

Pour plus de brièveté dans l'exposition, introduisons quelques dénominations nouvelles et d'abord définissons ce que nous appellerons l'*ordre* de ce terme. Pour les termes du développement de x_1 et x_2, ce sera le nombre

$$2p - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2},$$

$$2p - 1 - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} \gtrless \frac{q_1}{q_2}.$$

Pour les termes du développement de y_1 et y_2, ce sera le nombre

$$2p + 1 - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

$$2p - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} \gtrless \frac{q_1}{q_2}.$$

Cette classification laisse de côté les termes où $h = 0$, qui ne contiennent pas de petits diviseurs et dont nous n'avons pas à nous occuper.

J'appellerai *termes principaux* de chaque ordre les termes du développement de x_1 et de x_2 qui sont de cet ordre et qui de plus sont tels que

$$h = 1, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Il n'y aura, d'après cette définition, de termes principaux que dans les ordres impairs.

Les termes du premier et du second ordre ne dépendent que de ϖ_1^0; ceux du troisième et du quatrième ordre dépendent de ϖ_1^0

Digitized by Google

et ϖ_1^1; ceux du cinquième et du sixième ordre de ϖ_1^0, ϖ_1^1 et ϖ_1^2, et ainsi de suite.

L'ensemble des termes principaux du premier ordre dans x_1 se présente sous la forme d'un certain numérateur divisé par

$$q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0,$$

Comme pour tous ces termes on a

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{-n_2^0}{n_1^0} = \frac{-n_2}{n_1},$$

il vient

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0.$$

Le coefficient de t disparaît donc dans tous ces termes.

Notre numérateur est donc une constante qui dépend de ϖ_1^0; *je disposerai de* ϖ_1^0 *de façon à annuler ce numérateur,* ce qui détermine ϖ_1^0. Ces termes principaux, que nous pouvions craindre de voir devenir infinis, disparaissent donc.

Les termes principaux du premier ordre dans x_2 disparaissent *ipso facto,* en vertu de l'équation des forces vives.

Mais ce n'est pas tout : *tous les termes du premier et du second ordre disparaissent* ipso facto *dans les quatre développements.*

Considérons maintenant les termes principaux du troisième ordre dans x_1; leur ensemble est encore égal à un numérateur divisé par $q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$. Ce numérateur se réduit à une constante dépendant de ϖ_1^0 et ϖ_1^1; nous déterminerons ϖ_1^1 de façon à le faire disparaître et, avec lui, les termes principaux considérés.

Du même coup, disparaîtront les termes principaux du troisième ordre dans x_2 et, dans les quatre développements, tous les termes du troisième et du quatrième ordre.

On déterminerait de même ϖ_1^2 de façon à annuler les termes principaux du cinquième ordre dans x_1, ce qui annule du même coup tous les termes du cinquième et du sixième ordre; et ainsi de suite.

Ainsi disparaîtront tous les termes qui auraient pu devenir infinis; d'ailleurs, le rapport des moyens mouvements étant commensurable, nos séries ne dépendent plus que d'un argument unique et les solutions sont périodiques. Il est à noter que les

Digitized by Google

séries ainsi obtenues sont convergentes, tandis que les séries (3) ne l'étaient pas, au sens rigoureux du mot.

13. Soit C la constante des forces vives; la valeur de C dépendra des deux constantes z_1 et z_2 ou, ce qui revient au même, de n_1 et de n_2. Elle se présentera sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de μ et dont les termes seront des fonctions de z_1 et z_2 ou de n_1 et n_2.

Dans certains cas, on peut considérer C comme une des données de la question. Alors la relation

$$F = C,$$

où le second membre C est regardé comme donné, sera une relation entre z_1 et z_1, ou entre n_1 et n_2.

On pourra en tirer par exemple n_2 en fonction de n_1 sous la forme d'une série procédant suivant les puissances de μ et dont les coefficients seront des fonctions de n_1.

14. Nous venons de voir la manière de retrouver les solutions périodiques en partant des séries (3); on pourrait se proposer de se retrouver de la même façon les solutions asymptotiques.

Nous savons en effet qu'en dehors des développements (3) qui procèdent suivant les sinus et les cosinus des multiples de deux arguments w, nous pouvons représenter les coordonnées du corps troublé par des développements d'une forme toute différente.

A chaque solution périodique correspond un de ces développements.

Soient, en effet,

$$x_i = \varphi_i^{00}(W), \qquad \cos y_i = \psi_i^{00}(W), \qquad \sin y_i = \theta_i^{00}(W)$$

les équations d'une solution périodique, où φ_i^{00}, ψ_i^{00}, θ_i^{00} sont des tonctions périodiques de période 2π d'un argument unique

$$W = N_0 t + h;$$

N_0 et h sont deux constantes; la première doit être regardée comme donnée, la seconde est une constante arbitraire d'intégration.

Digitized by Google

Nous appellerons C_0 la valeur correspondante de la constante C des forces vives.

Nous pouvons alors représenter la solution générale sous la forme de développements

$$(13)\qquad \begin{cases} x_i = \Sigma(Ae^{\alpha t})^p(A'e^{-\alpha t})^q \varphi_i^{p,q}(W), \\ \cos y_i = \Sigma(Ae^{\alpha t})^p(A'e^{-\alpha t})^q \psi_i^{p,q}(W), \\ \sin y_i = \Sigma(Ae^{\alpha t})^p(A'e^{-\alpha t})^q \theta_i^{p,q}(W), \end{cases}$$

où les fonctions $\varphi_i^{p,q}$, $\psi_i^{p,q}$, $\theta_i^{p,q}$ sont des fonctions périodiques de

$$W = Nt + h.$$

Dans ces développements A, A′ et h sont des constantes d'intégration, α et N sont des constantes données qui peuvent se développer suivant les puissances du produit AA′ et de la différence $C - C_0$.

Si l'on développe les $\varphi_i^{p,q}$, $\psi_i^{p,q}$, $\theta_i^{p,q}$ en séries de Fourier, les coefficients de ces séries seront également développables suivant les puissances de $C - C_0$.

Si l'on fait $C = C_0$, et qu'on annule l'une des constantes A ou A′, N se réduit à la constante N_0 définie plus haut et α à une constante α_0.

Il ne reste dans les séries (13) que les termes où $p = 0$ (ou les termes où $q = 0$). On obtient ainsi les solutions dites *asymptotiques;* les séries sont alors convergentes.

Si les deux constantes A et A′ s'annulent à la fois, il reste seulement

$$x_i = \varphi_i^{0,0}(W)$$

et l'on retombe sur la solution périodique.

15. On peut alors se proposer de voir comment on pourrait passer des développements (3) aux développements (13).

On remarquera d'abord que ces séries (13) sont ordonnées suivant les puissances des deux constantes A et A′. On pourrait donc être tenté d'opérer de la manière suivante : introduire les deux constantes d'intégration A et A′; développer chaque terme des séries (3) suivant les puissances de A et A′; réunir les termes semblables et ordonner suivant les puissances de ces constantes.

On ne peut pas arriver au résultat par cette voie. On rencon-

Digitized by Google

trerait des difficultés analogues à celle qui se présenterait dans l'exemple simple suivant.

Envisageons la série

$$\Sigma_n \alpha e^{-n\alpha} \sin n\alpha t = \frac{\alpha e^{-\alpha} \sin \alpha t}{1 - 2e^{-\alpha} \cos \alpha t + e^{-2\alpha}}.$$

La somme de la série est développable suivant les puissances de α et de t. Il en est de même de chacun des termes de la série.

Cependant si l'on développe chaque terme de la série, qu'on réunisse les termes semblables, puis qu'on ordonne suivant les puissances de α et de t, on n'obtiendra pas du tout le même développement qu'en développant directement la somme de la série.

16. Pour bien faire comprendre la façon de passer d'un développement à l'autre, je prendrai d'abord un exemple simple; je supposerai

$$F = x_2 + x_1^2 + \mu \cos y_1.$$

On voit tout de suite que x_2 doit être une constante puisque $\frac{dF}{dy_2}$ est nul. On a donc

$$x_1^2 = C - \mu \cos y_1$$

et l'on en tire

$$t + h = \int \frac{dy_1}{\sqrt{C - \mu \cos y_1}}.$$

On voit ainsi que x_1, $\cos y_1$ et $\sin y_1$ sont des fonctions doublement périodiques de $t + h$. L'une des périodes que j'appellerai ω est réelle, l'autre que j'appellerai $i\omega'$ est purement imaginaire.

La fonction x_1, par exemple, étant périodique de période ω sera développable par la formule de Fourier suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{\omega}$. Le développement sera valable pour toutes les valeurs réelles de t.

D'autre part, cette fonction x_1 admettant la période $i\omega'$ sera développable par cette même formule de Fourier suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{i\omega'}$ ou, ce qui revient au même, suivant les puissances des exponentielles $e^{\frac{2\pi t}{\omega'}}$ et $e^{-\frac{2\pi t}{\omega'}}$. Ce développement nouveau ne sera plus valable pour toutes les valeurs réelles

Digitized by Google

de t, mais seulement pour les valeurs comprises entre t_0 et $t_0 + \omega$; entre les valeurs $t_0 + \omega$ et $t_0 + 2\omega$, ou entre les valeurs $t_0 + 2\omega$ et $t_0 + 3\omega$, ..., il faudrait le remplacer par d'autres développements de même forme.

Et bien, *le premier de ces développements correspond aux séries* (3) *et le second aux séries* (13).

La théorie des fonctions doublement périodiques nous enseigne plusieurs moyens de passer de l'un à l'autre.

La méthode de Delaunay conduit à des équations analogues à celle que nous venons de traiter, quand on ne conserve dans la fonction perturbatrice qu'un seul terme périodique.

17. Dans le cas général, on peut donner des quatre variables x_i et y_i des développements d'où l'on peut tirer facilement d'une part les séries (3), d'autre part les séries (13).

Les quantités x_1, x_2, $\cos y_1$, $\sin y_1$, $\cos y_2$, $\sin y_2$ seront développées suivant les puissances de μ, du produit AA′ et de la différence $C - C_0$ qui joueront le rôle de constantes d'intégration. Chaque coefficient de ce développement sera lui-même développé en série dont les différents termes seront le produit de deux facteurs.

Le premier de ces facteurs sera le cosinus ou le sinus d'un multiple d'un certain argument W.

Le second facteur sera une fonction doublement périodique d'un second argument W′.

Les deux arguments W et W′ seront des fonctions linéaires du temps.

On aura

$$W = Nt + \Pi,$$
$$W' = N't + \Pi'.$$

Π et Π' seront des constantes d'intégration. Nous pourrons donner à N′ une valeur arbitraire.

J'appellerai ω et $i\omega'$ les périodes de la fonction périodique considérée comme fonction de W′; de sorte que ses périodes seront $\frac{\omega}{N'}$ et $\frac{i\omega'}{N'}$ quand on la regardera comme fonction de t. Ces périodes seront d'ailleurs les mêmes pour tous les termes.

Digitized by Google

Les quantités N, $\frac{\omega}{N'}$, $\frac{i\omega'}{N'}$ seront développables suivant les puissances de μ, AA′, $C - C_0$.

De ce développement, on pourra facilement passer aux séries (3). Il suffira pour cela de développer chaque fonction doublement périodique suivant les cosinus et sinus des multiples de $\frac{2\pi W'}{\omega}$. On aura alors des séries procédant suivant les cosinus et sinus des multiples des deux arguments W et $\frac{2\pi W'}{\omega}$, ou, ce qui revient au même, des multiples des deux arguments

$$w_1 = n_1 t + \varpi_1,$$
$$w_2 = n_2 t + \varpi_2,$$

si l'on suppose

$$W = r_1 w_1 + r_2 w_2,$$
$$W' = q_1 w_1 + q_2 w_2,$$

q_1, q_2, r_1, r_2 étant les quatre entiers définis au n° 10. On a alors

$$N = r_1 n_1 + r_2 n_2, \qquad \Pi = r_1 \varpi_1 + r_2 \varpi_2,$$
$$N' = q_1 n_1 + q_2 n_2, \qquad \Pi' = q_1 \varpi_1 + q_2 \varpi_2.$$

On retrouve ainsi les séries (3) en regardant AA′ et $C - C_0$ comme des fonctions des constantes z_1 et z_2.

De ce même développement, on peut passer tout aussi facilement aux séries (13). Développons, en effet, chaque fonction doublement périodique suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi W'}{i\omega'}$ ou suivant les puissances des exponentielles $e^{\pm\frac{2\pi W'}{\omega'}}$.

On retrouvera les séries (13) en posant

$$\alpha = \frac{2\pi N'}{\omega'}, \qquad A = \sqrt{AA'}\,e^{\frac{2\pi\Pi'}{\omega'}}, \qquad A' = \sqrt{AA'}\,e^{-\frac{2\pi\Pi'}{\omega'}}.$$

On me pardonnera la longueur de cet exposé. Bien qu'il ne nous apprenne rien d'essentiellement nouveau, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de montrer comment se rattachent les unes aux autres les diverses séries auxquelles nous conduisent d'une façon qui paraît d'abord tout à fait indépendante les différentes théories proposées.

Digitized by Google

ÉLÉMENTS ET ÉPHÉMÉRIDE DE LA PLANÈTE (416) VATICANA POUR LA IIIe OPPOSITION;

PAR M. J. BOCCARDI.

Pendant les rares loisirs que m'a laissés l'application aux zones du Vatican des méthodes employées à Paris pour la construction du Catalogue photographique, je me suis occupé de la correction des éléments de la planète (416), que j'avais donnés l'année dernière dans le *Bulletin* (août 1897). L'orbite provisoire déterminée par la variation des distances était la suivante :

T = 1896 mai 14,5, t. m. de Paris.

M	337°.24'.41",4	
☊	58.32.28,7	Éclipt. 1900,0.
π	254.18.59,5	Éclipt. 1900,0.
ω	195.46.30,8	Éclipt. 1900,0.
i	12.56.26,2	Éclipt. 1900,0.
φ	12.41.25,2	
μ	756,6583	
log a	0,447405	

Ayant calculé les perturbations dues à l'action de Jupiter et de Saturne depuis cette époque, j'ai obtenu l'orbite perturbée

T = 1897 oct. 6,5, t. m. de Paris.

M	84°.33'. 5",9	
☊	58.31.55,0	Éclipt. 1900,0.
π	254.19.36,3	Éclipt. 1900,0.
ω	195.47.41,3	Éclipt. 1900,0.
i	12.56.23,9	
φ	12.42.28,8	
μ	756,3068	
log a	0,447539	

En partant de cette orbite, j'ai formé une éphéméride pour 1897, à laquelle j'ai comparé les 58 observations de la planète, qui ont été faites pendant la deuxième opposition dans neuf observatoires. J'ai tenu compte aussi des mesures de (416) que j'ai faites sur deux *clichés* photographiques, que je dois à l'obligeance du R. P. Laïs.

Digitized by Google

Les étoiles de comparaison ont été les suivantes, dont je donne les meilleures positions que j'ai pu déduire.

	(1897,0). α.	δ.
	h m s	° ′ ″
1. Radcliffe$_3$ 279	1. 7. 7,46	−11.29.13,6
2. Radcliffe$_3$ 245	1. 0.57,17	−11.32.10,6
3. 991 Weisse$_1$ h. O	0.58.37,94	−12.13.26,4
4. 924 Weisse$_1$ h. O	0.55. 4,56	−12.34.28,3
5. 910 Weisse$_1$ h. O	0.54.17,45	−12.26.22,6
6. 869 Weisse$_1$ h. O	0.53.15,42	−12.36.25,8
7. BB. VI — 13°, 164	0.52.26,48	−12.48. 8,8
8. 850 Weisse$_1$ h. O	0.50.57,32	−13. 4. 8,4
9. Radcliffe$_3$ 128	0.34.52,98	−14.27. 1,9
10. Déduite de Paris$_{2,3}$ 651	0.34.19,22	−14.11. 7,9
11. Paris$_{2,3}$ 651	0.27.31,76	−14. 3.20,9
12. 135 Weisse$_1$ h. O	0.18.42,58	−14.55. 0,6
13. 278 Weisse$_1$ h. O	0.18.27,84	−14.44.38,0
14. 276 Weisse$_1$ h. O	0.18.23,86	−14.39.28,6
15. Münich$_2$ 55	0.10.50,21	−14.37.35,1
16. Cordoba 144	0. 9.34,24	−14.44.54,5
17. Anonyme rapp. à Schjellerup 56.	0. 8.32,67	− 9.19.25,6
18. Cordoba 106	0. 7.21,39	−14.11. 0,0
19. Paris$_3$ 130	0. 6.47,94	−14.23. 8,9
20. Yarnall 9	0. 2.32,44	−11.42. 8,8
21. Anonyme rapp. à Santini 4	0. 2. 1,74	−12. 2.37,0

J'ai ensuite formé quatre lieux normaux pour 1897, auxquels j'ai joint les quatre lieux de 1896.

			Æ 1900,0.	(δ) 1900,0.
	1896.		° ′ ″	° ′ ″
I		18,5	207.35. 0,1	− 4. 2.30,8
II	Juin	3,5	205.30.30,8	− 7. 3. 7,1
III	Juill.	5,5	207.37.18,6	−10.30.48,4
IV	Aout	8,5	216.27.40,8	−16.34.46,2
	1897.			
V	Aout	25,5	14.25.51,9	−12. 5.51,5
VI	Sept.	25,5	8.29.34,0	−14.23. 1,2
VII	Oct.	26,5	2.15.14,9	−14.22.39,1
VIII	Nov.	19,5	0.32.41,1	−12.26.41,7

Voici les écarts respectifs et avec poids dans le sens Obs. — Calc. :

cos δ Δα	−2″,8	−0″,9	+1″,5	−0″,9	+175″,3	+148″,4	+120″,0	+43″,7
Δδ	−2″,4	−0″,1	−1″,8	+4″,5	+ 73″,5	+ 48″,4	+ 60″,1	+45″,8

J'ai donné le poids $\frac{1}{6}$ au lieu de IV, qui n'a qu'une observation, le poids 2 au lieu de VII qui est basé sur 23 observations, faites dans

Digitized by Google

cinq observatoires, et le poids $\frac{1}{2}$ au lieu de VIII qui résulte de 6 observations. Les autres lieux ont le poids 1. Je n'ai écarté que les observations qui m'avaient été indiquées comme douteuses par l'observateur lui-même, ou qui avaient été faites à la dernière limite de visibilité, lorsqu'elles s'éloignaient trop de la moyenne.

La diminution d'abord lente, ensuite brusquement rapide, des écarts en α pour 1897 faisait comprendre le rôle de la distance à la Terre et prévoir que les éléments exigeaient de fortes corrections. J'ai ensuite calculé les coefficients différentiels pour éléments équatoriaux, en prenant le premier lieu pour origine, et en vérifiant tous les coefficients moyennant une faible variation des éléments. Les coefficients suivants sont logarithmiques :

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial M_0$	0,310976	0.229979	0,161966	9.701939	0,040622	0,082590	0,196227	9,828609
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial\pi$	0,144862	0,057099	9,979767	9,504275	0,073986	0,113338	0,225330	9,862291
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial\varphi$	0,321113 n	0,228884 n	0,119483 n	9.509208 n	0,356681	0,387814	0,497519	0,130336
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial\Omega \sin i$.	9,632780	9,550549	9,428670	8,739153	9,556016	9,587289	9,692038	9,350900
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial i$	9,513208 n	9,589174 n	9,611259 n	9,216559 n	9,481158	9,364124	9,282360	8,705062
$\cos\delta\,\partial\alpha : \partial\mu$	1,794488 n	1,704425 n	1,441749 n	0,862210	2,755232	2,783945	2,885350	2,518062
$\partial\delta : \partial M_0$.....	0,103726 n	0,056681 n	0,062358 n	9,534737 n	9,886412	9,886736	9,960840	9,586295
$\partial\delta : \partial\pi$	9,937620 n	9,873047 n	9,875050 n	9,334203 n	9,892976	9,896225	9,980087	9,619788
$\partial\delta : \partial\varphi$	0,113914	9.994317	9,934690	9,149910	0.186843	0,185064	0,261485	9,888048
$\partial\delta : \partial\Omega \sin i$.....	0,200512	0,114490	0,014536	9,445981	0,128077 n	0,164268 n	0,290173 n	9,942961 n
$\partial\delta : \partial i$.....	9,720440 n	9,793102 n	9,815782 n	9,418212 n	9,684494 n	9,579311 n	9,517859 n	8,947298 n
$\partial\delta : \partial\mu$	1,587507	1,041958	0,769716 n	1,215445 n	2,554955	2,550659	2,632069	2,275396

J'ai posé les facteurs d'homogénéité

$$0,225330\,\partial\pi = a, \qquad 0,310976\,\partial M_0 = b, \qquad 2,885350\,\partial\mu = c,$$
$$0,497319\,\partial\varphi = d, \qquad 0,290173\,n \sin i = e, \qquad 9,815782\,n\,di = f.$$

Des 16 équations de condition, j'ai déduit, par la méthode des moindres carrés, les équations normales suivantes

f.	a.	e.	b.	c.	d.	n.
5,345000	−0,109494	−0,440382	−0,122847	−0,082591	+0,016972 =	−61,25143
−0,109494	+5,297572	+1,353136	+5,085693	+2,976301	+1,484669 =	458,26149
−0,440382	+1,353136	+3,894549	+1,350351	+0,735571	+0,414518 =	65,11459
−0,122847	+5,085693	+1,350351	+5,147434	+2,229932	+0,400409 =	352,57585
−0,082591	+2,976301	+0,735571	+2,229932	+3,180192	+3,299418 =	466,50968
0,016972	+1,484669	+0,414518	+0,400409	+3,299418	+4,450757 =	465,68649

La résolution de ces équations, en employant 5 équations de vérification, m'a donné les valeurs

log a.	log b.	log c.	log d.	log e.	log f.
3″,197118 n	2,158079	3,579900	3,342265 n	1,556015	1,464578

Digitized by Google

Il résultait donc les corrections suivantes pour les éléments équatoriaux

$$-15'37'',75\,\partial\pi \quad +1'10'',32\,\partial M_0 \quad +4'',94937\,\partial\mu \quad -11'39'',43\,\partial\varphi \quad -34'',76\,\partial\Omega \quad -44'',54\,\partial i$$

La représentation différentielle laissait les écarts suivants sans poids

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Pour α....	$-1'',1$	$+4'',3$	$-2'',9$	$(-12'',5)$	$+3'',2$	$-3'',3$	$+0'',6$	$-2'',4$
Pour δ....	$-1'',8$	$+4'',0$	$+3'',1$	$+0'',5$	$+5'',1$	$+1'',1$	$-2'',4$	$-4'',8$

J'ai représenté directement les 8 lieux avec l'orbite corrigée suivante, en tenant compte des perturbations pour les 4 derniers :

T = 1896, mai 18,5, t. m. de Paris.

M_0	338°.16'.18",4	
Ω	21. 5.19,6	Équateur 1900,0.
π	256.23. 7,2	
ω	235.17.47,6	
i	32. 2.17,3	
φ	12.29.45,8	
μ	756",6077	
$\log a$	0,445517	

Cette représentation directe laissait les écarts

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
$\cos\delta\,\Delta\alpha$.....	$+3'',2$	$+8'',9$	$+1'',3$	$(-8'',8)$	$+7'',3$	$-2'',4$	$+1'',5$	$-0'',8$
$\partial\,\Delta\delta$.....	$-4'',6$	$+0'',4$	$-3'',4$	$-4'',5$	$+2'',0$	$0'',0$	$-3'',7$	$-5'',7$

Comme ces écarts concordent assez bien avec ceux de la représentation différentielle, il n'y avait pas lieu d'espérer que d'autres solutions auraient permis de mieux représenter les lieux. J'ai essayé cependant, mais sans résultats satisfaisants. D'ailleurs, je ne pouvais espérer un accord parfait, eu égard à ce que je n'ai osculé qu'*une fois* pour l'orbite perturbée. Une confirmation de l'exactitude des éléments auxquels je me suis arrêté a été donnée par une observation de (416) faite à Teramo, le 14 décembre 1897, par M. Cerulli, que j'ai représentée en osculant pour cette date. Quoique cette observation s'éloigne d'environ un mois de mon dernier lieu, elle ne laisse que les écarts suivants

$$\Delta\alpha = -1'',9 \qquad \Delta\delta = -11'',2.$$

Ayant calculé les perturbations dues à l'action de Jupiter et de Saturne, j'ai obtenu les éléments suivants, pour l'osculation du 20 décembre 1898. Pour me conformer à l'usage généralement reçu, je me suis rapporté à 0,0 temps moyen Berlin.

Digitized by Google

T = 1898 décembre 20,0, t. moy. de Berlin.

M	178°.10'.38",2	
π	254. 4.19,2	Éclipt. 1900,0.
☊	58.32.44,4	
ω	195.31.34,8	
i	12.55.44,5	
φ	12.31.57,2	
μ	761".46654	
log *a*	0,4455706	

Éphéméride pour la IIIe opposition.

(Les positions sont rapportées à l'équinoxe *vrai* de la date.)

24 h. t. m. de Berlin. 1898.		Æ. h m s	Ⓓ.	log *r*.	log Δ.
Nov.	22	4.40.13,59	+25°.29'.13",4	0,53040	0,38372
	23	4.39.15,18	25.30.17,6		
	24	4.38.16,25	25.31.17,4		
	25	4.37.16,90	25.32.12,7		
	26	4.36.17,21	25.33. 3,8	0,53049	0,38229
	27	4.35.17,36	25.33.50,9		
	28	4.34.17,29	25.34.34,2		
	29	4.33.17,00	25.35.13,8		
	☍30	4.32.16,58	25.35.50,0	0,53058	0,38181
Dec.	1	4.31.16,22	25.36.23,2		
	2	4.30.15,85	25.36.53,4		
	3	4.29.15,49	25.37.20,3		
	4	4.28.15,23	25.37.44,0	0,53065	0,38223
	5	4.27.15,26	25.38. 4,3		
	6	4.26.15,50	25.38.21,7		
	7	4.25.15,98	25.38.36,5		
	8	4.24.16,77	25.38.48,6	0,53071	0,38356
	9	4.23.18,06	25.38.58,8		
	10	4.22.19,78	25.39. 6,7		
	11	4.21.21,95	25.39.12,3		
	12	4.20.24,68	25.39.15,5	0,53077	0,38578
	13	4.19.28,14	25.39.16,1		
	14	4.18.32,26	25.39.14,4		
	15	4.17.37,06	25.39.10,9		
	16	4.16.42,61	25.39. 5,7	0,53081	0,38886
	17	4.15.49,08	25.38.59,0		
	18	4.14.56,40	25.38.50,9		
	19	4.14. 4,57	25.38.41,6		
	20	4.13.13,67	25.38.31,3	0,53084	0,39275
	21	4.12.23,85	25.38.20,2		
	22	4.11.35,03	25.38. 8,3		
	23	4.10.47,20	25.37.55,8		
	24	4.10. 0,46	25.37.42,5	0,53085	0,39734
	25	4. 9.14,98	25.37.28,4		
	26	4. 8.30,67	25.37.13,9		
	27	4. 7.47,66	25.36.59,4		
	28	4. 7. 5,57	25.36.45,1	0,53086	0,40270

Digitized by Google

24 h. t. m. de Berlin.		Æ.	⑮.	log r.	log Δ.
	1898.	h m s			
	29.....	4. 6.24,89	25°.36'.31",4		
	30.....	4. 5.45,46	25.36.18,0		
	31.....	4. 5. 7,29	25.36. 4,9		
	1899.				
Janv.	1.....	4. 4.30,42	25.35.51,9	0,53085	0,40863
	2.....	4. 3.54,92	25.35.39,1		
	3.....	4. 3.20,76	25.35.26,4		
	4.....	4. 2.47,95	25.35.14,2		
	5.....	4. 2.16,51	+25.35. 2,0	0,53084	0,41510

Grandeur : 12,1, Variation : ±1^m en Æ, ± 2',1 en ⑮.

En terminant, j'adresse tous mes remercîments à MM. Bossert, Millosevich et Schulhof pour les conseils si autorisés qu'ils ont bien voulu me donner. Je témoigne aussi ma reconnaissance à MM. Abetti, Borelly, Callandreau, Cerulli, Coggia, Millosevich, Petit et Villiger, qui ont eu l'obligeance de me communiquer leurs observations manuscrites de (416).

OBSERVATIONS DE PLANÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE D'ALGER (équatorial coudé de 0^m,318 d'ouverture);

PAR MM. RAMBAUD ET SY.

Dates.	T. m. d'Alger.	ΔÆ.	ΔⅮ.	N. dec.	Æ app.	log f. p.	Ⅾ app.	log f. p.	★	Obs.
				Unitas (306).						
1898.	h m s	m s	' "		h m s					
Janv. 25.	10.39.01	—0.27,36	— 2.44,4	17:10	9.23.54,59	$\bar{1}$,457n	+13°.45'.49",0	0,575	1	R
25.	10.57.37	—0.27,81	— 2.38,4	18:10	9.23.54,14	$\bar{1}$,403n	+13.45.55,0	0,566	1	S
26.	10. 5.22	—1.21,57	+ 3.49,5	15:10	9.23. 0,40	$\bar{1}$,523n	+13.52.22,8	0,589	2	R
26.	10.23.49	—1.22,29	+ 3.55,1	15:10	9.22.59,68	$\bar{1}$,483n	+13.52.28,4	0,579	2	S
28.	10.43.02	—1.16,98	— 5.22,5	15:10	9.21. 6,95	$\bar{1}$,404n	+14. 6. 4,8	0,561	3	S
28.	10.58.10	—1.17,71	— 5.18,7	15:10	9.21. 6,22	$\bar{1}$,353n	+14. 6. 8,6	0,554	3	R
Févr. 2.	9.55.27	—2. 8,40	+ 2.18,0	15:10	9.16.19,19	$\bar{1}$,470n	+14.40.22,3	0,565	4	R
2.	10. 9.55	—2. 9,03	+ 2.22,0	15:10	9 16.18,56	$\bar{1}$,431n	+14.40.26,3	0,567	4	S
11.	9.21.57	—3.11,61	— 9.39,2	14:10	9. 7.30,96	$\bar{1}$,444n	+15.42.43,6	0,543	5	R
11.	9.55.23	—3.13,19	— 9.28,7	15:10	9. 7.29,38	$\bar{1}$,334n	+15.42.54,1	0,525	5	S
12.	9.18.08	+0.44,14	— 9.58,3	15:10	9. 6.33,16	$\bar{1}$,441n	+15.49.29,4	0,541	6	R
12.	9.43.44	+0.42,81	— 9.51,8	15:10	9. 6.31,83	$\bar{1}$,360n	+15.49.35,9	0,526	6	S
14.	9.18.51	—0.12,47	+ 2.59,7	21:10	9. 4.38,46	$\bar{1}$,411n	+16. 2.57,2	0,532	7	R
14.	9.37.52	—0.13,18	+ 3. 4,2	21:10	9. 4.37,75	$\bar{1}$,346n	+16. 3. 1,7	0,521	7	S
15.	9.17.51	—1. 8,71	+ 9.35,7	15:10	9. 3.42,22	$\bar{1}$,399n	+16. 9.33,2	0,527	8	R
15.	9.40.02	—1. 9,66	+ 9.43,8	15:10	9. 3.41,27	$\bar{1}$,319n	+16. 9.41,3	0,515	8	S
16.	8.53.01	—1.12,45	—14. 9,0	15:10	9. 2.47,48	$\bar{1}$,457n	+16.16. 0,8	0,537	9	R
16.	9.15.48	—1.13,45	—14. 1,7	15:10	9. 2.46,48	$\bar{1}$,390n	+16.16. 8,1	0,524	9	S
17.	9.15.41	—2. 8,33	— 7.30,5	14:10	9. 1.51,61	$\bar{1}$,374n	+16.22.39,3	0,519	10	R
17.	9.39.08	—2. 9,31	— 7.25,7	15:10	9. 1.50,63	$\bar{1}$,281n	+16.22.44,1	0,507	10	S

Digitized by Google

Dates.	T. m. d'Alger.	ΔR.	ΔD.	N. de c.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	*	Obs.
					Eleonora (354).					
1898.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″			
Févr. 14.	10.31.11	−0.30,00	+ 1.59,8	14:12	11.15.28,67	$\bar{1}$,546 *n*	+14.17. 0,0	0,591	11	S
14.	10.59.59	−0.30,65	+ 2.15,9	14:12	11.15.28,02	$\bar{1}$,486 *n*	+14.17.16,1	0,574	11	R
15.	10. 8.22	−2. 7,52	+ 0.15,3	15:12	11.14.56,51	$\bar{1}$,578 *n*	+14.30. 9,3	0,600	12	S
15.	10.26.01	−2. 8,31	+ 0.26,2	15:12	11.14.55,72	$\bar{1}$,548 *n*	+14.30.20,2	0,588	12	R
16.	10. 1.34	+0.39,88	− 5.51,5	14:14	11.14.21,89	$\bar{1}$,582 *n*	+14.43.46,8	0,599	13	S
16.	10.30. 6	+0.39,23	− 5.37,4	14:14	11.14.21,24	$\bar{1}$,533 *n*	+14.44. 0,9	0,581	13	R
17.	10. 7. 5	+0. 4,31	+ 7.39,0	18:12	11.13.46,34	$\bar{1}$,566 *n*	+14.57.17,3	0,590	14	S
17.	10.35.40	+0. 3,59	+ 7.55,2	18:12	11.13.45,62	$\bar{1}$,512 *n*	+14.57.33,5	0,571	14	R
18.	10.41.12	−1.58,09	− 7.54,1	12:10	11.13. 8,99	$\bar{1}$,490 *n*	+15.11. 4,5	0,562	15	S
18.	10.58.44	−1.58,86	− 7.44,3	12:10	11.13. 8,22	$\bar{1}$,445 *n*	+15.11.14,3	0,552	15	R
Mars 9.	9.13. 1	+0.31,83	− 8.45,8	12:10	10.59.55,45	$\bar{1}$,500 *n*	+19.13.42,0	0,501	16	R
9.	9.34.53	+0.31,12	− 8.36,0	12:10	10.59.54,74	$\bar{1}$,444 *n*	+19.13.51,8	0,482	16	S
10.	9.59. 0	−1.11,19	+ 2.21,9	15:10	10.59.11,49	$\bar{1}$,349 *n*	+19.25.19,8	0,457	17	R
10.	10.13.31	−1.11,70	+ 2.28,5	15:10	10.59.10,98	$\bar{1}$,289 *n*	+19.25.26,4	0,447	17	S
14.	10.21. 8	+0.28,60	+10.32,9	10:10	10.56.23,61	$\bar{1}$,150 *n*	+20. 8.21,2	0,417	18	S
14.	10.51.27	+0.27,81	+10.45,6	10:10	10.56.22,82	$\bar{2}$,881 *n*	+20. 8.33,9	0,404	18	R
15.	9.46.11	−0. 6,62	−11.33,2	12:10	10.55.44,35	$\bar{1}$,310 *n*	+20.18.13,8	0,430	19	S
15.	10.17.03	−0. 7,40	−11.19,9	12:10	10.55.43,57	$\bar{1}$,147 *n*	+20.18.27,1	0,412	19	R
17.	9.23.24	−1.24,68	+ 7.42,5	18:10	10.54.26,29	$\bar{1}$,365 *n*	+20.37.29,7	0,434	20	R
17.	9.53.59	−1.25,52	+ 7.54,6	18:10	10.54.25,45	$\bar{1}$,230 *n*	+20.37.41,8	0,412	20	S
					Tyche (258).					
Févr. 28.	9.42. 3	−1.15,24	− 5.43,8	18:10	11.14.12,62	$\bar{1}$,525 *n*	− 9.13.42,0	0,780	21	S
28.	9.59.36	−1.15,82	− 5.39,8	18:10	11.14.12,04	$\bar{1}$,488 *n*	− 9.13.38,0	0,784	21	R
Mars 1.	10.35.27	−2. 4,12	+ 1.13,2	15:8	11.13.23,75	$\bar{1}$,376 *n*	− 9. 6.45,2	0,791	22	S
1.	10.51.42	−2. 4,54	+ 1.16,1	15:8	11.13.23,33	$\bar{1}$,317 *n*	− 9. 6.42,3	0,794	22	R
					Sibylla (168).					
Févr. 28.	10.28.58	−2.39,19	− 8.35,0	18:10	11.53.18,61	$\bar{1}$,504 *n*	− 3. 9. 1,7	0,745	23	R
28.	10.53.10	−2.39,85	− 8.29,8	18:10	11.53.17,95	$\bar{1}$,448 *n*	− 3. 8.56,5	0,747	23	S
Mars 1.	11.22. 8	+2.28,64	− 2.34,0	12:8	11.52.41,39	$\bar{1}$,345 *n*	− 3. 4.40,9	0,748	24	R
1.	11.43.30	+2.28,13	− 2.31,1	12:8	11.52.40,88	$\bar{1}$,259 *n*	− 3. 4.38,0	0,750	24	S
					Austria (136).					
Mars 14.	9.30.13	−0.18,35	− 8.26,4	12:10	10.22.52,52	1,223 *n*	+ 3.32.45,0	0,686	25	R
14.	9.50.54	−0.19,30	− 8.22,2	12:10	10.22.51,57	$\bar{1}$,102 *n*	+ 3.32.49,2	0,685	25	S
15.	8.53.11	−1. 3,17	+ 0.47,1	15:10	10.22. 7,70	1,358 *n*	+ 3.41.58,4	0,687	26	R
15.	9.16.16	−1. 4,31	+ 0.55,7	15:10	10.22. 6,56	1,267 *n*	+ 3.42. 7,0	0,685	26	S
18.	8.43. 7	−0.46,38	− 7.47,6	14:10	10.19.55,40	$\bar{1}$,310 *n*	+ 4. 9.56,1	0,430	27	S
18.	9.13.43	−0.46,92	− 7.33,7	15:10	10.19.54,86	1,147 *n*	+ 4.10.10,0	0,412	27	R
19.	9.34.35	−1.29,33	+ 1.41,5	18:10	10.19.12,44	$\bar{1}$,365 *n*	+ 4.19.25,1	0,434	28	S
19.	9.50.54	−1.29,82	+ 1.47,8	18:10	10.19.11,95	$\bar{1}$,230 *n*	+ 4.19.31,4	0,412	28	R

Digitized by Google

Dates.	T. m. d Alger	ΔR.	Δ(D).	N. dec.	R app.	log f. p.	(D) app.	log f. p.	★	Obs.
				Eos (221).						
1898.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″			
Mars 18.	10.59.53	+0.44,27	− 4. 2,8	12:8	11.14.23,46	$\bar{2}$,778 *n*	+12.21.58,5	0,561	29	R
18.	11.15. 9	+0.43,75	− 3.58,7	12:8	11.14.22,94	$\bar{2}$,444 *n*	+12.22. 2,6	0,560	29	S
19.	10. 7.58	+0. 4,08	+ 1.55,2	12:10	11.13.43,27	$\bar{1}$,197 *n*	+12.27.56,6	0,568	30	R
19.	10.13.36	+0. 3,66	+ 2. 1,8	12:10	11.13.42,85	$\bar{1}$,022 *n*	+12.28. 3,2	0,563	30	S

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1898,0.	Réd. au j.	(D) moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	9,0	9.24.19,29	+2,66	+13.48.43,2	− 9,8	Weisse I, n° 468.
2.	»	»	+2,68	»	− 9,9	Id.
3.	8,0	9.22.21,21	+2,72	+14.11.37,2	− 9,9	Paris, n° 11646.
4.	9,3	9.18.24,80	+2,79	+14.38.14,3	−10,0	$\frac{1}{3}$[2(Paris, n° 11569) + Weisse I, n° 330].
5.	9,1	9.10.39,68	+2,89	+15.52.32,6	− 9,8	$\frac{1}{3}$[2(A. G. Berlin, n° 3747) + Weisse II, n° 162].
6.	9,1	9. 5.46,12	+2,90	+15.59.37,2	− 9,5	$\frac{1}{3}$[2(A. G. Berlin, n° 3713) + Weisse II, n° 52].
7.	8,3	9. 4.48,02	+2,91	+16. 0. 7,0	− 9,5	$\frac{1}{3}$[2(A. G. Berlin, n° 3707) + Weisse II, n° 28].
8.	»	»	+2,91	»	− 9,5	Id.
9.	8,4	9. 3.57,01	+2,92	+16.30.19,2	− 9,4	$\frac{1}{3}$[2(A. G. Berlin, n° 3698) + Weisse II, n° 1531].
10.	»	»	+2,93	»	− 9,4	Id.
11.	9,0	11.15.55,96	+2,71	+14.15.17,0	−16,8	Weisse I, n° 224.
12.	9,0	11.17. 1,31	+2,72	+14.30.10,8	−16,8	Weisse I, n° 245.
13.	7,8	11.13.39,26	+2,75	+14.49.55,1	−16,8	$\frac{1}{2}$(Paris, n° 13809 + A. G., n° 4405).
14.	»	»	+2,77	»	−16,8	Id.
15.	9,5	11.15. 4,29	+2,79	+15.19.15,5	−16,9	B. B. t. VI, n° 2322.
16.	9,0	10.59.20,56	+3,06	+19.22.43,7	−15,9	Weisse II, n° 1148.
17.	8,0	11. 0.19,62	+3,06	+19.23.15,7	−17,8	Weisse II, n° 1171.
18.	9,0	10.55.51,93	+3,08	+19.58. 3,6	−15,3	Weisse II, n° 1076.
19.	9,2	10.55.47,88	+3,09	+20.30. 2,2	−15,2	B. B. t. VI, n° 2542.
20.	»	»	+3,09	»	−15,0	Id.
21.	8,0	11.15.25,16	+2,70	− 9. 7.42,4	−15,8	Weisse I, n° 216.
22.	»	»	+2,71	»	−16,0	Id.
23.	9,0	11.55.55,12	+2,68	− 3. 0. 9,6	−17,1	Seeliger, n° 7500.
24.	9,0	11.50.10,05	+2,70	− 3. 1.49,8	−17,1	Weisse I, n° 820.
25.	»	10.23. 8,05	+2,82	− 3.41.26,7	−15,3	Rumker, n° 3204.
26.	»	»	+2,82	»	−15,4	Id.
27.	9,3	10.20.38,96	+2,82	− 4.17.59,0	−15,3	B. B. t. VI, n° 2327.
28.	»	»	+2,81	»	−15,4	Id.
29.	9,0	11.13.36,21	+2,98	+12.26.18,1	−16,8	Weisse I, n° 176.
30.	»	»	+2,98	»	−16,7	Id.

Digitized by Google

SUR LA PROBABILITÉ D'UNE COINCIDENCE ENTRE LES ÉLÉMENTS DE DEUX PLANÈTES;

PAR M. JEAN MASCART.

En même temps que les recherches récentes appelaient l'attention des astronomes sur les lacunes qui paraissent exister dans l'anneau d'astéroïdes du système solaire, l'étude même des orbites prenait une importance toute particulière au point de vue des analogies qu'elles pourraient présenter; en effet, bien que l'hypothèse d'Olbers soit désormais insuffisante pour expliquer une origine commune à toutes les petites planètes, il n'est pas impossible, et il est même probable, que plusieurs d'entre elles constituent effectivement des fragments de masses primitives plus considérables. Il existe de ces corpuscules dont les orbites présentent des analogies curieuses, difficilement imputables au seul hasard, quasi-identité d'éléments qui doit encore se maintenir pendant fort longtemps; mais, à cet égard, la théorie n'a pas encore défini exactement le rôle de Jupiter pour savoir si son action perturbatrice doit tendre à augmenter ou à diminuer le nombre de ces coïncidences d'éléments.

Nous avons ailleurs montré comment on pouvait définir l'espérance mathématique d'un joueur qui eût spéculé sur les coïncidences d'éléments, et le calcul a indiqué, en première approximation, que la théorie du hasard ne pouvait encore donner de renseignement précis sur l'effet perturbateur de Jupiter. Au reste, cette question est difficile à élucider par cette voie; on doit choisir arbitrairement une fonction pour représenter la distribution des astéroïdes dans l'anneau, et nous montrerons ultérieurement quelle peut être l'influence de la fonction adoptée. Mais, et c'est là le point important du Calcul des probabilités, l'espérance mathématique que deux éléments présentent une différence au plus égale à α est proportionnelle à α.

Les éléments étudiés ici sont le moyen mouvement et l'excentricité, indépendants du système d'axes choisi. Pour les moyens mouvements, par exemple, l'observation fournit les résultats suivants :

0",01	0",02	0",04	0",06	0",08	0",1	0",2	0",4	0",6	0",8	1",0	10"
0	7	16	23	30	39	76	178	236	320	403	1220
»	3,50	4,00	3,83	3,75	3,90	3,80	4,45	3,93	4,00	4,03	4,11

Digitized by Google

Dans la deuxième ligne, on trouve le nombre des groupes de deux petites planètes dont les moyens mouvements présentent une différence au plus égale au nombre correspondant de la première ligne; les nombres de la dernière ligne sont les mêmes que les précédents, mais considérés proportionnellement à l'intervalle correspondant et devraient précisément être égaux entre eux.

Pour ce qui est des excentricités, les résultats analogues sont :

0,000002.	0,000003.	0,00001.	0,00002.	0,00003.	0,00004.	0,00005.	0,00007.	0,0001.	0,0002.	0,0003.	0,0004.	0,004.
1	2	6	12	16	22	29	35	57	119	187	243	2335
1,000	0,800	1,200	1,200	1,066	1,100	1,160	1,100	1,140	1,190	1,246	1,215	1,168

On est alors frappé de la constance de ces nombres, si l'on songe que la latitude laissée aux coïncidences varie dans la proportion de 1 à 1000.

D'ailleurs la fréquence des coïncidences est à peu près la même pour les moyens mouvements et les excentricités; en effet, les 398 petites planètes considérées (*Annuaire du Bureau des Longitudes,* 1895) ont des moyens mouvements compris entre 1183″ et 403″, soit dans un intervalle de 780″; la différence moyenne de deux moyens mouvements serait donc de 2″ pour une distribution uniforme, et l'intervalle de 1″ par exemple, qui se présente dans 403 combinaisons, est la 780ᵉ partie de la différence extrême, Comme les excentricités varient de 0,00895 à 0,4478, la même fraction de l'intervalle extrême correspond à une différence d'excentricité de 0,000563; ainsi, en multipliant par $\frac{563}{400}$ le nombre 243 des coïncidences à 0,0004 près en excentricité, on trouve 342. Ce dernier nombre est encore sensiblement inférieur, il est vrai, à 403, mais la différence peut simplement tenir, cette fois, aux neuf planètes dont le périhélie n'était pas déterminé et qui n'ont pu intervenir dans les combinaisons d'excentricités.

En résumé, l'action de Jupiter ne tend, d'une manière générale, ni à augmenter ni à diminuer les coïncidences pour les valeurs quelconques; et, cependant, comme ces coïncidences se produisent de préférence en certaines régions de l'anneau, qui ne coïncident pas forcément avec les maxima de densité, il resterait à étudier la distribution même des coïncidences dans l'anneau pour avoir une raison des légers écarts présentés par les nombres expérimentaux.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

OBSERVATIONS DE COMÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE BESANÇON (équatorial coudé);

PAR M. P. CHOFARDET.

Dates.		T. m. Besançon.	ΔR.	ΔP.	N. déc.	R app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
				1898 (Perrine, mars 19).						
1898.		h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
AVRIL	7.	14.38.17	+2.14,49	+ 1.22,1	15:20	22.34.25,56	1,679 *n*	54.54. 2,5	0,781 *n*	1
	7.	15.47.21	+2.27,95	— 1.11,0	12:16	22.34.39,02	1,689 *n*	54.51.29,4	0,699 *n*	1
	8.	14.28. 4	+2.35,52	—14.32,1	15:20	22.39. 0,63	$\bar{1}$,680 *n*	54. 1.37,9	0,790 *n*	2
	8.	15.32.14	+2.47,77	—16.51,5	12:16	22.39.12,88	$\bar{1}$,695 *n*	53.59.18,5	0,716 *n*	2
	13.	15.21.14	+0.35,82	— 8. 5,5	18:12	23. 3. 5,01	$\bar{1}$,718 *n*	49.51.57,8	0,712 *n*	3
	13.	16. 8.58	+0.45,63	— 9.38,8	12:9	23. 3.14,82	$\bar{1}$,714 *n*	49.50.24,5	0,639 *n*	3
	18.	15.11.26	+1.51,20	— 0. 0,9	12:12	23.28.12,33	$\bar{1}$,743 *n*	46.13.24,4	0,714 *n*	4
	23.	15. 3. 2	+3.58,66	— 7. 8,0	12:16	23.54.23,42	$\bar{1}$,762 *n*	43. 5.35,8	0,719 *n*	5
	23.	15.50.59	+4. 8,77	— 8.17,3	3:4	23.54.33,53	$\bar{1}$,769 *n*	43. 4.26,5	0,635 *n*	5
	24.	14.42.30	+2. 2,22	+ 2.51,9	12:13	23.59.38,12	$\bar{1}$,756 *n*	42.32.12,9	0,749 *n*	6
	24.	15.44.26	+2.16,02	+ 1.26,1	9:8	23.59.51,92	$\bar{1}$,774 *n*	42.30.47,1	0,644 *n*	6
	25.	14.48.56	—1.36,07	—25.27,0	9:12	0. 5. 2,54	1,763 *n*	41.59.30,3	0,739 *n*	7
	30.	15.13.35	+3.42,07	+ 0.40,0	9:12	0.32.15,73	$\bar{1}$,793 *n*	39.34.35,7	0,695 *n*	8
MAI	13.	13.34.29	—2.34,80	— 3. 3,6	12:14	1.42.11,15	$\bar{1}$,724 *n*	35.31.46,7	0,839 *n*	9
	21.	14. 1.30	+2.49,00	—20.46,8	12:15	2.23. 3,05	1,763 *n*	34.17.49,9	0,815 *n*	10
	23.	13.24.35	—1.11,61	— 3.23,1	9:6	2.32.34,47	1,702 *n*	34. 6.41,0	0,855 *n*	11
	27.	14. 2.55	—2.26,81	—10.18,6	12:16	2.51.24,00	1,762 *n*	33.50.39,3	0,817 *n*	12
JUIN	7.	13.18.31	—0.30,60	—13.10,5	12:12	3.37.39,00	1,682 *n*	33.44.19,8	0,864 *n*	13
	11.	13.54.58	+1.43,10	+ 8.36,1	12:12	3.52.47,31	$\bar{1}$,748 *n*	33.51.43,0	0,829 *n*	14
				1898 (Coddington, juin 11).						
JUIN	15.	10.44.44	+0.17,43	—12.37,9	12:9	16.12.19,68	$\bar{2}$,263	117.34.59,4	0,930 *n*	15
	15.	11.20.36	+0.12,25	—11.44,1	12:9	16.12.14,50	$\bar{2}$,946	117.35.53,2	0,929 *n*	15
	15.	12.16.46	+0. 3,81	—10.14,8	9:6	16.12. 6,06	$\bar{1}$,285	117.37.22,5	0,917 *n*	15
	16.	11.20.21	+2.43,53	+ 4. 6,8	12:12	16. 8.45,51	$\bar{1}$,014	118.13.26,6	0,928 *n*	16
	17.	10.53.50	—2. 3,87	+ 2. 1,8	12:12	16. 5.18,77	$\bar{2}$,820	118.49.57,6	0,931 *n*	17
	18.	10.41.59	—2.56,91	+17.30,4	9:9	16. 1.49,22	$\bar{2}$,705	119.26.31,7	0,933 *n*	18
	20.	10.14.35	—1.46,57	— 1.16,2	12:12	15.54.46,64	$\bar{2}$,516	120.38.23,8	0,936 *n*	19
				1898 (Perrine, juin 14).						
JUIN	17.	13.12.15	—1.56,77	— 8. 3,0	9:9	3.44.52,02	$\bar{1}$,752 *n*	31.57.27,7	0,834 *n*	20
	18.	12.25. 2	+5.20,15	— 7.56,8	6:8	3.50.47,56	$\bar{1}$,644 *n*	32.11.42,6	0,879 *n*	21
	20.	12.42.55	—3.38,30	— 2.58,0	9:8	4. 3. 1,01	$\bar{1}$,676 *n*	32.45. 2,5	0,870 *n*	22

Digitized by Google

Dates.	T. m. Besançon.	ΔÆ.	ΔΦ.	N. de c.	Æ app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	★
				☄ 1898 (Giacobini, juin 18).					
1898.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JUIN 20.	14. 8. 9	—1.25,69	+ 2. 1,8	9:6	20.14.14,69	$\bar{2}$,213*n*	111.46. 6,1	0,915*n*	23
28.	13.21.51	—0.48,62	—14.22,6	12:9	18.14.46,33	$\bar{1}$,245	111.49.46,1	0,906*n*	24
29.	13.10.44	—2.32,21	— 2.34,9	9:6	17.58.36,42	$\bar{1}$,280	111.24.41,3	0,904*n*	25
JUILL. 9.	10.28.48	+0.24,61		9	15.44.20,94	1,302			26
9.	10.36.21		+ 0.59,4	9			104.14.50,8	0,878*n*	26

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	Æ moy. 1898,0.	Réd. au j.	Φ moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	7	22.32.10,85	+ 0,22	54.52.35,9	+ 4,5	687 Weisse$_2$, 22^h.
2.	6,5	22.36.24,89	+ 0,22	54.16. 5,6	+ 4,4	4864 BB. VI + 35°.
3.	8	23. 2.29,04	+ 0,15	50. 0. 0,0	+ 3,3	1383 Weisse$_2$, 22^h.
4.	10	23.26.21,02	+ 0,11	46.13.22,9	+ 2,4	Anonyme rapportée à 6132 Radcl.
5.	6,5	23.50.24,66	+ 0,10	43.12.42,4	+ 1,4	6217 Radcliffe.
6.	9	23.57.35,81	+ 0,09	42.29.19,9	+ 1,1	Anon. rapp. à 4368 BB. VI + 47°.
7.	6,7	0. 6.38,51	+ 0,10	42.24.56,7	+ 0,6	16 Radcliffe.
8.	8,4	0.28.33,55	+ 0,11	39.33.55,8	— 0,1	136 Radcliffe.
9.	7,2	1.44.45,62	+ 0,33	35.34.52,9	— 2,6	532 Radcliffe.
10.	9	2.20.13,49	+ 0,56	34.38.39,7	— 3,0	Anonyme rapportée à 717 Radcl.
11.	8	2.33.45,46	+ 0,62	34.10. 7,4	— 3,3	3267 Paris$_1$.
12.	9	2.53.50,06	+ 0,75	34. 1. 1,3	— 3,4	5450 Lalande.
13.	8,9	3.38. 8,48	+ 1,12	33.57.33,3	— 3,0	4381 Paris$_1$.
14.	9	3.51. 2,96	+ 1,25	33.43. 9,6	— 2,7	865 BB. VI + 56°.
15.	7	16.11.58,00	+ 4,25	117.47.23,7	+13,6	8858 Cape.
16.	6	16. 5.57,74	+ 4,24	118. 9. 5,6	+14,2	8806 Cape.
17.	7	16. 7.18,37	+ 4,27	118.47.41,6	+14,2	8818 Cape.
18.	5,6	16. 4.41,87	+ 4,27	119. 8.46,7	+14,6	8793 Cape.
19.	7	15.56.28,92	+ 4,29	120.39.24,4	+15,6	8713 Cape.
20.	10	3.46.47,36	+ 1,43	32. 5.32,4	— 1,7	Anonyme rapportée à ★ 21.
21.	5,6	3.45.25,94	+ 1,47	32.19.41,0	— 1,6	4508 Paris$_1$.
22.	8	4. 6.37,77	+ 1,54	32.48. 2,1	— 1,6	Anonyme rapportée à 4886 Paris$_1$.
23.	8	20.15.36,34	+ 4,04	111.44.15,3	—11,0	20433 Arg. Œltzen.
24.	8	18.15.30,51	+ 4,44	112. 4. 7,9	+ 0,7	51 BB. VI — 14°40′ à 31°20′.
25.	6,8	18. 1. 4,21	+ 4,42	111.27.14,0	+ 2,2	7631 Yarnall.
26.	8,5	15.43.52,58	+ 3,75	104.13.38,3	+13,1	6517 Yarnall.

Remarques. — Pour la ☄ Perrine (mars 19) le 23 (deuxième série) et le 25 avril le ciel se couvre. Le 9 juillet, la ☄ Giacobini est extrêmement faible et les pointés sont très difficiles.

Digitized by Google

VARIÉTÉS.

LES COMÈTES PÉRIODIQUES : ÉTAT ACTUEL DE LEURS THÉORIES

PAR M. L. SCHULHOF.

1. Nos connaissances sur les comètes périodiques ont fait dans notre siècle, et surtout dans les cinquante dernières années, des progrès de plus en plus rapides.

Lorsque Halley eut l'heureuse idée de former le premier catalogue d'orbites cométaires, basé exclusivement sur ses propres calculs, il en fut récompensé par la découverte de l'identité des comètes de 1531, 1607 et 1682. Cette mémorable découverte, qui provoqua les belles recherches de Clairaut sur les perturbations de la comète Halley jusqu'à son prochain retour, en 1759, n'eut immédiatement aucune autre suite heureuse. Les astronomes ont dû longtemps se contenter de tentatives, d'ailleurs infructueuses, pour trouver d'autres comètes périodiques par la simple comparaison des éléments, en se basant sur une ressemblance plus ou moins vague des orbites calculées. Les découvertes cométaires étaient trop rares et ne se rapportaient généralement qu'à des astres brillants dont les orbites sont presque toutes fort allongées. Les observations étaient trop imparfaites et n'embrassaient pas des intervalles de temps assez considérables pour qu'on pût déterminer des orbites bien exactes. D'ailleurs les méthodes de calcul étaient elles-mêmes assez imparfaites et très laborieuses. Les calculateurs ignoraient encore les moyens d'utiliser l'ensemble des observations et se contentaient d'en choisir, un peu au hasard, quelques-unes.

2. L'infatigable chercheur de comètes, Messier, *le furet des comètes*, ouvrit l'ère de la recherche systématique de ces astres et de leur observation plus soignée. C'est à lui que nous sommes redevables de la première comète connue de courte période, de la fameuse comète 1770 II (Lexell). Toutes les tentatives de Pingré, de Prosperin et d'autres astronomes, pour faire cadrer les observations de cet astre avec une orbite parabolique, restèrent infructueuses. Comme, vers la fin de juin, la comète s'était rapprochée extrêmement de la Terre, Prosperin et Widder émirent l'opinion que les perturbations produites par la Terre avaient modifié son mouvement, mais cette hypothèse ne put expliquer le désaccord des observations en août et septembre. Prosperin et Pingré songèrent à la possibilité d'une orbite sensiblement elliptique, mais ne firent aucun calcul à ce sujet. C'est le grand mérite de Lexell d'avoir rigoureu-

Digitized by Google

sement démontré que la comète avait parcouru une orbite elliptique et que sa durée de révolution était d'environ 5 années $\frac{2}{3}$. Comme il n'existait encore à cette époque aucune méthode pratique pour déterminer une orbite elliptique, Lexell dut exécuter d'énormes calculs pour arriver à ce résultat. Il fit huit différentes suppositions sur le nœud et l'inclinaison et il combina de vingt manières différentes les observations, pour calculer ensuite, d'après la méthode d'Euler, autant d'orbites elliptiques dont il adopta finalement la moyenne. Sa tâche fut rendue plus difficile encore par le fait que les perturbations de la Terre, assez considérables vers la fin de juin, produisaient des écarts très notables dans la représentation des observations par les éléments elliptiques non perturbés. Il reconnut la cause de ces écarts, mais, ne connaissant pas de méthode pour en tenir compte, il dut se borner à montrer qu'ils étaient conformes à l'effet que devaient produire les perturbations terrestres.

Mais comment un astre aussi brillant, d'une période aussi courte, avait-il jusqu'alors échappé toujours à l'attention des observateurs? Lexell put en donner une explication satisfaisante. Il montra que la comète s'était, le 27 mai 1767, trouvée 58 fois plus rapprochée de Jupiter que du Soleil et que, dans ces conditions, l'action de la planète avait dû certainement transformer l'ancienne orbite. A l'approche du retour présumé en 1781-1782, Lexell donna des éphémérides de recherche, mais il douta fort que l'on retrouvât la comète. Il fit remarquer qu'à la date du 23 août 1779 la distance de l'astre à Jupiter serait 491 fois plus petite que sa distance au Soleil, et que dans ces conditions son orbite serait certainement entièrement changée.

Le cas de cette comète, qui bouleversa toutes les idées des astronomes sur la nature des orbites cométaires, suggéra à Laplace l'hypothèse de la capture des comètes, dont plus tard Le Verrier fut un chaud partisan. Laplace a donné une méthode très simple et très élégante de calcul pour le cas où une planète devient temporairement le corps central et où le Soleil ne joue que le rôle d'un corps troublant. Cette méthode, dont se servirent Burckhardt et plus tard Le Verrier dans leurs calculs concernant la comète de Lexell, est encore aujourd'hui souvent employée, lorsqu'on veut négliger les perturbations assez considérables exercées par le Soleil. M. Harzer est le premier astronome qui ait déterminé d'une manière rigoureuse l'ancienne orbite d'une comète, celle de Brorsen, en calculant les perturbations que cet astre avait subies de la part du Soleil durant son séjour dans la sphère d'activité de Jupiter.

La théorie de la capture des comètes n'a été traitée dans toute sa généralité que récemment par M. Tisserand et M. Callandreau, qui ont élucidé dans leurs recherches magistrales un des problèmes les plus compliqués. Le résultat le plus important des recherches de M. Tisserand est la déco

Digitized by Google

verte d'une relation remarquable qui subsiste entre les anciens et les nouveaux éléments, quelle que soit la modification de l'orbite due à l'action de Jupiter. Cette relation fournit le meilleur criterium dans des recherches sur l'identité de deux comètes.

La comète de Lexell a recommencé à agiter l'esprit des astronomes lorsque Le Verrier reconnut que les comètes Faye et De Vico-E. Swift rencontrent l'orbite de Jupiter dans la région du ciel dans laquelle cet astre avait subi la modification profonde de son orbite. Cette coïncidence ne paraissait pas être l'effet d'un pur hasard. Le Verrier supposa que l'une ou l'autre de ces comètes pouvait bien être l'astre si longtemps perdu. Avec une ardeur sans égale il calcula, approximativement, les perturbations que ces deux astres avaient dû subir depuis 1770. Ayant constaté l'inanité de son hypothèse, il ne fut pas rebuté par cet insuccès. Il entreprit immédiatement une recherche encore plus étendue, de la plus grande importance, dont le but était d'élucider le passé immédiat de la comète de Lexell avant les grandes perturbations de 1767 et sa course après celles qu'elle avait subies en 1779. La solution de la première question était relativement aisée. L'incertitude dans la durée de révolution n'affecte pas sensiblement les positions relatives de la comète et de Jupiter en 1767, trois années avant l'apparition; en outre, les perturbations, bien que considérables, n'étaient pas démesurées. Par contre, le second problème était extrêmement ardu, sinon insoluble. Les positions relatives de la comète et de la planète, lors de leur rencontre en 1779, neuf années après l'apparition, sont déjà très incertaines. En variant le mouvement moyen diurne entre des limites qui sont compatibles avec les observations de 1770, on obtient pour l'époque postérieure à 1779 des orbites qui diffèrent totalement entre elles et qui vont de l'hyperbole à des ellipses peu allongées. Le Verrier a vaincu toutes les difficultés en calculant de nombreuses hypothèses correspondant à des valeurs équidistantes du mouvement moyen diurne. Le résultat de sa pénible recherche est condensé dans un tableau synoptique qui donne les différentes orbites possibles de la comète après 1779. De nouvelles perturbations, subies depuis cette époque, ont dû naturellement modifier ces orbites. Si ces modifications n'étaient pas trop profondes, grâce à ce précieux tableau, on reconnaîtrait, sans trop de difficulté, la comète de Lexell dans le cas où elle ferait son apparition. Dans ces dernières années M. Chandler a essayé de l'identifier avec la comète Brooks (1889 V); nous-même, nous avons cru à son identité soit avec la comète Finlay (1886 VII), soit avec la comète Swift (1895 II), mais nos calculs n'ont pu aboutir à un résultat certain.

3. Pendant quarante années après la belle découverte de Lexell aucun nouveau fait ne vint se révéler. Les émules de Messier : Méchain, Caroline

Digitized by Google

Herschel et plus tard Pons, découvrirent bien chacun une ou plusieurs comètes périodiques, mais le calcul des orbites restait trop rudimentaire pour qu'on reconnût des orbites elliptiques par les écarts plus ou moins grands que des éléments paraboliques auraient laissés subsister dans les observations. Il fallut qu'Olbers publiât sa méthode si expéditive de la détermination des orbites paraboliques, que Gauss donnât, dans son immortelle *Theoria motus*, le moyen de calculer des orbites elliptiques ayant des excentricités quelconques, qu'on fît de plus en plus usage de la théorie des probabilités et surtout de l'admirable méthode des moindres carrés, pour que l'Astronomie calculatrice se mît au pas des découvertes cométaires toujours plus nombreuses.

Grâce à Gauss lui-même et à Bessel, grâce surtout à Encke, cet infatigable calculateur qui ne recula jamais devant l'énormité d'une tâche lorsqu'il s'agissait de tirer le meilleur parti des observations, les calculs astronomiques prirent ce bel essor qui eut sa répercussion naturelle sur l'ardeur de la phalange dévouée des chercheurs de comètes et plus tard de planètes.

Au début de cette ère, en 1805, furent découvertes, à 18 jours d'intervalle, deux comètes qui portent aujourd'hui les noms d'*Encke* et de *Biela*. Bessel, qui calcula l'orbite de la première, remarqua bien que la parabole laisse subsister des écarts montant à quelques minutes d'arc et présentant une marche systématique. Il se proposa même de calculer une orbite elliptique, sans d'ailleurs donner suite à son projet. Comment aurait-il pu soupçonner, à une époque où l'on ne connaissait que les comètes Halley et Lexell, que ces écarts relativement faibles trahissaient une durée de révolution de $3\frac{1}{3}$ années?

Quant à l'autre comète de 1805, Bessel aussi bien que Gauss remarqua la grande ressemblance de ses éléments avec ceux de la comète de 1772. Tous deux calculèrent des orbites elliptiques. Bessel, supposant que la comète n'avait fait qu'une seule révolution entre les deux apparitions, détermina les orbites des deux comètes qui correspondent à une durée de révolution de 34 années. Gauss, ne faisant aucune supposition sur l'excentricité, trouva une durée de révolution de 4,74 années. Les orbites elliptiques des deux comètes ne concordèrent pas suffisamment. Gauss fit alors la remarque importante, reconnue dans la suite comme juste, que les écarts entre les éléments s'expliqueraient aisément, si l'astre avait passé, entre 1772 et 1805, dans le voisinage d'une grosse planète. Aucun de ces deux grands astronomes ne songea à aborder les énormes calculs qu'aurait exigés la recherche de la véritable période.

4. Les astronomes ne connaissaient donc, avec certitude, d'autres comètes périodiques que celles de Halley et de Lexell, lorsque Olbers

Digitized by Google

découvrit en 1815 une comète que Bessel et peu après Gauss reconnurent, encore pendant le cours des observations, comme périodique. Sa durée de révolution, comparable à celle de la comète Halley, put être déterminée avec assez d'exactitude pour que Bessel crût utile d'entreprendre le long calcul des perturbations jusqu'au prochain retour de l'astre.

A partir de cette époque l'Astronomie calculatrice a pris conscience de sa puissance. Confiante dans ses méthodes et dans la bonté des observations, elle prend l'habitude de tirer rapidement de ces dernières les meilleurs résultats et arrive ainsi souvent à désigner à temps au zèle des observateurs les objets qui méritent une attention particulière. Déjà en 1816 Encke fit connaître aux astronomes que la comète de 1812 (Pons-Brooks) avait également une durée de révolution comparable à celle de la comète de Halley. De même, Burckhardt, qui a le grand mérite d'avoir calculé de nombreuses orbites d'anciennes comètes, publia en 1818 et 1819 les éléments elliptiques des comètes 1766 II (Helfenzrieder), 1783 (Pigott) et 1793 II (Perny) (1), pour lesquelles il avait trouvé de courtes durées de révolution. Ces trois comètes, aussi bien que celle de Lexell et les deux comètes de 1805 dont Bessel et Gauss avaient soupçonné l'ellipticité, ont un mouvement direct. Les astronomes commencèrent dès lors à se familiariser avec l'idée que des astres d'une courte durée de révolution ne devaient pas être trop rares parmi les comètes dont le mouvement est direct.

5. En 1819 parurent trois comètes ayant un mouvement direct et une faible inclinaison, les comètes Encke, Winnecke et Blanpain, pour lesquelles Encke trouva coup sur coup de courtes durées de révolution. La plus importante de ces trois comètes est, sans conteste, celle d'Encke. Voici un astre dont la durée de révolution n'est que de $3\frac{1}{3}$ années, qui reste, même à son aphélie, très loin de Jupiter et qui est, à lui seul, tellement en contradiction avec l'opinion universellement acceptée de Laplace sur l'origine étrangère de toutes les comètes, qu'on est contraint de recourir à des hypothèses peu vraisemblables pour expliquer sa présence actuelle dans notre système planétaire avec une pareille orbite.

Encke remarqua immédiatement, après le calcul d'éléments paraboliques, leur ressemblance avec ceux des comètes de 1795 et 1805, et fut ainsi conduit à la supposition d'une rédue de révolution de $3\frac{1}{3}$ années. Cette supposition trouva une nouvelle confirmation lorsque Olbers le prévint que

(1) Pour cette comète les calculs définitifs de D'Arrest n'ont pas confirmé la courte période donnée par Burckhardt, qui a basé tous ses calculs, aussi bien pour cette comète que pour d'autres, sur un nombre restreint d'observations.

Digitized by Google

la comète insuffisamment observée, qui fut découverte par Méchain, le 17 janvier 1786, pouvait bien être une apparition antérieure de la comète. Encke ne se contenta pas d'une vague prédiction du prochain retour, qui serait sans doute restée inefficace, mais il se mit immédiatement avec enthousiasme à l'énorme travail, sans précédent, du calcul approché des perturbations entre 1819 et 1786 et à la détermination des meilleurs éléments pour les quatre apparitions observées. Dès août 1820 il publia les résultats de sa recherche. Le plus inattendu était que le mouvement de la comète paraît avoir éprouvé une accélération d'un retour à l'autre. En effet, déduction faite de l'effet des perturbations, les valeurs de la période étaient les suivantes : 1208,112 jours de 1786 à 1795; 1207,879 jours entre 1795 et 1805; et 1207,424 jours de 1805 à 1819. A cette occasion déjà Encke fait la remarque que la comète pourra utilement servir à la détermination des masses planétaires restées les plus incertaines, notamment de celle de Mercure, dont elle peut se rapprocher jusqu'à 0,017 (1). Il ajoute que l'observation suivie de l'astre jettera certainement une vive lumière sur la constitution physique des comètes.

Tout en ne se prononçant pas encore sur la cause probable de l'accélération constatée, Encke était tellement convaincu de la réalité du fait qu'il en tint compte dans le calcul de l'éphéméride pour l'apparition de 1822. Grâce à cette éphéméride, la comète fut observée par Ch. Rümker à Paramatta. Ces observations confirmèrent l'accélération. Encke expose alors, en 1823, sa fameuse hypothèse sur le milieu résistant. Il montre qu'aucun changement dans les masses des corps troublants ne peut amener une représentation satisfaisante des observations, représentation qui est d'autre part immédiatement obtenue par l'introduction d'un terme proportionnel au carré du temps. Il rappelle que Laplace avait démontré que, dans le cas du mouvement d'un astre dans un milieu résistant, le mouvement diurne augmente et l'excentricité diminue constamment, tandis que la longitude du périhélie ne subit que des perturbations périodiques et que le nœud et l'inclinaison ne varient pas.

Olbers appuya immédiatement, de toute son autorité et très chaudement, les vues d'Encke, auxquelles adhérèrent peu à peu presque tous les astronomes, lorsque l'accélération de la comète se confirma à chaque retour ultérieur. Mais Bessel, en 1836, combattit vivement l'hypothèse d'un milieu résistant. Il venait de publier sa théorie classique sur la formation des queues et sur les émissions nucléaires, élaborée à la suite de l'observation attentive des merveilleuses variations que la comète de Halley avait présentées dans sa structure et dans sa forme. Voici en sub-

(1) D'après M. Backlund la plus courte distance descend même à 0,004.

Digitized by Google

stance ses arguments : Les hypothèses les plus diverses peuvent expliquer un fait dûment constaté. Il ne faut pas recourir à une cause qui n'expliquerait que ce fait unique et ne trouverait sa confirmation nulle part ailleurs. Or, ni les planètes, ni la Lune ne présentent dans leur mouvement une anomalie qu'on pourrait attribuer à un milieu résistant. D'autre part, il est certain que des émissions nucléaires existent dans le cas de plusieurs comètes. Lorsque des matières se détachent du noyau avec une certaine vitesse, celle du noyau acquiert une variation correspondante dans la direction opposée. A moins donc que les émissions ne soient symétriques tout autour du noyau, le mouvement de celui-ci sera nécessairement modifié. Ces émissions de matières produiront une accélération ou un retard, selon qu'elles auront lieu avant ou après le passage au périhélie. S'il y a des émissions aussi bien dans l'une que dans l'autre branche de l'orbite, la modification du mouvement sera moindre, et son sens dépendra de la prépondérance des unes sur les autres. Lorsqu'une comète qui a subi de telles émissions de matières aura été, dans une même apparition, observée pendant un grand espace de temps, la représentation des observations ne pourra, par suite de ces anomalies, être satisfaisante. Ainsi s'expliquerait la difficulté qu'a rencontrée Argelander dans la détermination de l'orbite de la grande comète de 1811 ([1]).

Ces vues de Bessel ne prévalurent pas contre l'hypothèse d'Encke, surtout parce qu'elles n'auraient pu expliquer que difficilement l'apparente constance de l'accélération que les recherches d'Encke d'abord, puis celles de M. von Asten mirent de plus en plus en lumière. Ce dernier astronome entreprit un travail immense sur l'ensemble des observations, entre 1819 et 1868. Il recalcula rigoureusement toutes les perturbations pour ce long intervalle. Il réussit, après une correction appropriée des masses de Jupiter, de la Terre, de Vénus et de Mercure, à déterminer l'accélération du mouvement diurne et, indépendamment de celle-ci, la diminution de l'excentricité, et à représenter parfaitement par une théorie unique toutes les observations. Comme les valeurs ainsi trouvées de l'accélération du mouvement et de la diminution de l'excentricité étaient rigoureusement dans le rapport exigé par l'hypothèse d'un milieu résistant, il parut non seulement à M. von Asten lui-même, mais à tous les astronomes, que ces recherches avaient réellement mis en évidence l'existence du milieu résistant.

([1]) M. Herz a publié récemment les résultats de ses recherches très approfondies sur cette comète. Les écarts de ses nombreux lieux normaux présentent effectivement une marche systématique, mais ils ne sont pas tellement considérables qu'on ne puisse les attribuer à des erreurs systématiques d'observation.

Digitized by Google

A l'époque où von Asten publia ses résultats, on ne possédait des théories assez parfaites que pour les comètes Faye et Winnecke. Il n'était pas étonnant que M. Mœller n'eût trouvé aucune anomalie dans le mouvement de la comète Faye dont la distance périhélie est de 1,74, environ cinq fois plus grande que celle de la comète Encke. A une telle distance l'action du milieu résistant pouvait déjà être insensible. Pour la comète Winnecke qui se rapproche jusqu'à 0,89 du Soleil, les calculs de M. von Oppolzer n'excluaient pas la possibilité d'une faible accélération. C'est une nouvelle anomalie dans le mouvement de la comète Encke elle-même qui devait bientôt ébranler la confiance dans l'hypothèse d'Encke. M. von Asten dut constater, quelques années avant sa mort prématurée, qu'il était impossible de faire cadrer l'apparition de 1871 avec les précédentes. Il dut admettre que quelque cause inconnue avait troublé le mouvement de la comète entre 1868 et 1871 et presque annihilé l'effet de l'accélération dans cet intervalle. Il ne lui fut pas donné de reconnaître que l'accélération est restée aussi dans la suite beaucoup plus faible que par le passé.

Lorsque le calculateur est contraint d'introduire beaucoup d'inconnues dans la solution d'un problème, il est exposé à se laisser tromper par le bon accord des observations avec sa théorie et à attribuer un degré illusoire d'exactitude à ses résultats. C'est ce qui est arrivé à M. von Asten. Il croyait avoir démontré la constance de l'accélération pendant quinze révolutions, entre 1819 et 1868. Mais de fâcheuses circonstances avaient vicié certaines parties de ses calculs d'ailleurs bien conduits et avaient fortuitement dissimulé des désaccords réels que la supposition d'une accélération absolument constante aurait produits dans les lieux normaux. Cela tenait à quelques petites erreurs dans les formules dont M. von Asten s'était servi pour le calcul des termes du second ordre, erreurs qui ne deviennent appréciables que pour les époques où les perturbations sont considérables. M. Backlund, qui a entrepris la continuation de l'œuvre et la revision des calculs de cet habile calculateur, a récemment publié les résultats de son grand travail sur l'ensemble des apparitions entre 1819 et 1891. Il trouve que l'accélération n'est restée à peu près constante que de 1819 à 1858; à partir de cette époque elle a diminué de plus en plus jusqu'après 1868, pour garder entre 1871 et 1891 une valeur sensiblement constante qui est environ d'un tiers plus faible que la valeur de la première période. Comme conclusion finale M. Backlund rejette l'hypothèse d'Encke et attribue l'accélération variable de la comète à l'action d'un essaim de corpuscules qu'elle traverserait dans un point inconnu de son orbite. Cette hypothèse a été déjà suggérée en 1841 par M. Walker, plus tard par M. Faye, et tout récemment par M. Seeliger. En l'admettant, il faut supposer que les parties de l'essaim, rencontrées par la comète entre 1819 et

Digitized by Google

1858, étaient à peu près également denses et que c'est de nouveau le cas depuis 1871.

La variabilité de l'accélération, dûment constatée, rend précaires les déterminations des masses planétaires à l'aide des observations de la comète Encke. Aussi, M. Backlund a-t-il renoncé à chercher une détermination indépendante des masses de Jupiter et de la Terre, et s'est-il contenté de déduire de nouvelles valeurs pour les masses de Mercure et de Vénus, qui sont encore assez mal connues en raison de l'absence d'un satellite et de leur action trop faible sur les planètes voisines. Malgré les graves objections qu'on pourrait, en considération des circonstances mentionnées, élever contre ces déterminations, M. Backlund leur attribue un haut degré d'exactitude. Elles ne pourront que gagner en poids, si l'on démontre sensi-jour ou l'autre que l'accélération entre 1786 et 1819 ne diffère blement de celle entre 1819 et 1858.

6. Après les découvertes de Burckhardt et d'Encke, il devint évident, pour beaucoup d'astronomes, qu'il doit exister assez grand nombre de comètes périodiques, surtout parmi celles possèdent un mouvement direct et une faible inclinaison. Un autre astronome, Biela, revint au procédé qui avait si bien réussi à Halley, et nota dans le catalogue des orbites cométaires toutes celles qui montraient entre elles une vague ressemblance. Les comètes de 1772 et 1805 attirèrent avec raison tout particulièrement son attention. Il conte que, convaincu de leur identité et volution d'environ 6 années $\frac{3}{4}$, il aurait exprès, soupçonnant une durée de révolution d'environ 6 années $\frac{3}{4}$, il aurait exprès, dûment le ciel pour retrouver l'astre dont il en 1825 et 1826, exploré attendait le retour. Ce est donc pas au pur hasard qu'il doit d'avoir 1826, dix jours avant Gambart, la comète qui porte découvert, le 27 février, était Gambart qui reconnut le premier l'identité de aujourd'hui son nom. ec celles de 1772 et 1805, quelques jours avant Biela la nouvelle comète rencontra aucun astronome pour entreprendre le travail et Clausen. Il ne se xigé le calcul rigoureux des perturbations depuis 1772. énorme qu'aurait es calculs plus ou moins approchés, suffisants pour la On se contenta d rs retours, mais pas assez exacts pour reconnaître si le prédiction de fut t astre présente également des anomalies.

La théorie de cette comète est extrêmement difficile à établir. Les perturbations, qui sont très considérables, entre 1772 et 1805, ne peuvent être calculées rigoureusement qu'à l'aide d'une valeur très exacte du mouvement moyen diurne. Or, on ne dispose, pour la détermination de celui-ci, que des observations des trois apparitions de 1805, 1826 et 1832. Si l'on n'arrive pas à une représentation satisfaisante de ces observations, sans faire intervenir d'autres forces que l'action du Soleil et des planètes, on ne sait plus exactement avec quelle valeur du mouvement diurne on doit con-

Digitized by Google

tinuer le calcul des perturbations entre 1805 et 1772. Entre 1832 et 1846, probablement après le passage de la comète dans le voisinage de Jupiter en 1841, eut lieu la division en deux noyaux distincts (1). Comme on ignore s'il n'existait pas, en dehors de ces deux noyaux, d'autres débris qu'on n'aurait pu voir à cause de leur petitesse et de la faiblesse de leur éclat, on n'est pas autorisé à placer, sans preuve à l'appui, le centre de gravité de l'ancienne comète vers le milieu de leur ligne de jonction. L'inconvénient, pour 1846, n'est pas encore trop grand, la distance entre les deux noyaux ne dépassant pas 6′. Mais en 1852 cette distance atteignait déjà un demi-degré. La position du centre de gravité ne peut donc être fixée sans l'introduction d'une nouvelle inconnue, représentant soit la masse relative des deux noyaux, soit l'effet de la force inconnue qui les aurait violemment séparés.

En réalité, les conditions du problème se révèlent encore plus compliquées. M. von Hepperger, qui a eu le courage et l'abnégation d'entreprendre une recherche de longue haleine sur cette comète, n'a pu arriver à une représentation satisfaisante des observations des trois apparitions de 1805, 1826 et 1832, sans recourir à l'hypothèse d'une accélération du mouvement. Il a bien voulu nous communiquer le résultat provisoire de ses calculs sur la période 1805-1846, calculs qui ne sont pas encore terminés. Il trouve que l'accélération du mouvement avait produit dans l'anomalie moyenne une variation d'environ 12′ entre 1805 et 1826 et de 10′ entre 1832 et 1846, par rapport aux éléments basés sur les observations de 1826 et 1832.

Nous espérons que M. von Hepperger poussera plus loin ses pénibles calculs. S'il déterminait la correction empirique nécessaire à la représentation des observations de 1852, il trouverait peut-être une réponse à différentes questions qui se sont posées depuis la disparition des deux noyaux. Il pourrait élucider notamment la question de savoir si aucun des objets nébuleux que divers astronomes ont rencontrés pendant leur recherche assidue de la comète, en 1865, n'a pu être identique avec un des noyaux.

Ces recherches infructueuses de tant d'observateurs zélés, à une époque où les conditions de visibilité étaient particulièrement favorables, ont amené les astronomes à penser que la fragmentation des noyaux avait suivi son cours entre 1852 et 1865, et que les divers débris ne furent pas remarqués simplement à cause de leur petitesse et de la faiblesse de leur

(1) Quelques astronomes croient, à tort, encore aujourd'hui, que la division a eu lieu en 1846, presque sous les yeux des observateurs; les calculs de M. Hubbard et de M. Clausen contredisent formellement cette opinion.

Digitized by Google

éclat. Cette explication, toute naturelle qu'elle soit, ne doit pas être acceptée sans réserve. On constate assez souvent dans les comètes des changements d'éclat imprévus, très notables et d'une durée relativement courte; même les deux noyaux de la comète Biela en ont présenté de très considérables, aussi bien en 1846 qu'en 1852. On peut donc parfaitement admettre que l'éclat des deux noyaux était en 1865 simplement très faible, sans qu'aucun changement profond ait eu lieu dans leur masse. Il n'est même pas interdit de supposer que quelques débris, invisibles en 1846 et 1852, aient, en 1865, acquis momentanément un éclat suffisant pour être aperçus, et qu'ils aient ensuite bientôt perdu cette intensité lumineuse exceptionnelle. Il ne faut pas oublier que les astronomes de cette époque ont été pris à l'improviste par des phénomènes auxquels rien ne les avait préparés, et que leurs instruments chercheurs étaient relativement faibles. Même une sorte de désarroi parmi les calculateurs, chargés de la préparation des éphémérides pour 1865, qui ne fixèrent pas suffisamment les limites entre lesquelles on devait chercher, augmenta l'embarras des observateurs et diminua leur confiance dans le succès de leur exploration du ciel.

C'est une question pendante de savoir si l'on doit attribuer directement à un des deux noyaux connus, ou plutôt à des débris inconnus, les magnifiques pluies d'étoiles filantes qu'on a observées en 1872 et 1885, dans la nuit du 27 novembre. Nous penchons pour la deuxième supposition. En effet, le passage des deux noyaux par leur nœud a eu lieu en 1872, environ onze semaines avant l'essaim, et en 1885 à peu près cinq semaines après le phénomène. Nous pouvons à la rigueur encore admettre que les perturbations entre 1852 et 1885 (personne ne les a encore calculées pour l'intervalle 1866-1885), jointes à l'accélération, constatée par M. von Hepperger, expliqueraient en totalité ou en partie cette avance de cinq semaines. Il n'en est pas de même pour le phénomène de 1872. La simple désagrégation des deux noyaux ne pourrait en aucun cas produire un retard de onze semaines dans leur retour. Aussi M. Newton, qui considère les trois essaims de 1872, 1885 et 1892 comme issus des deux noyaux, a-t-il recours à l'hypothèse d'une force qui serait analogue à l'électricité. D'après lui cette force agit différemment sur les divers débris, accélère le mouvement des uns, ralentit celui des autres, et provoque ainsi leur dissémination rapide le long de leur orbite. S'il en était ainsi, on ne pourrait plus trop compter dans l'avenir sur de grands essaims de Biélides. Si, au contraire, la seule force attractive du Soleil, des planètes et éventuellement d'amas de corpuscules, agissait sur les deux noyaux ou sur leurs débris, si, par conséquent leur masse est restée confinée dans une portion infime de l'orbite, nous pouvons encore compter sur des surprises. Celles-ci ne deviendraient impossibles que le jour où les per-

Digitized by Google

turbations de Jupiter auront notablement augmenté la plus courte distance entre l'orbite de ces débris et l'orbite terrestre. Une première grande perturbation aura lieu en 1901 et amènera une dispersion plus grande des divers débris, sur lesquels Jupiter agira plus ou moins fortement, en raison de leurs différentes distances.

Il serait très important d'observer attentivement, au moins pendant une quinzaine d'années, la durée et la richesse des essaims des Biélides. On aurait ainsi le moyen de se former une idée plus précise sur la manière d'après laquelle se produit la dissémination de ces corpuscules. Selon que ces observations militeraient en faveur d'une dispersion lente ou rapide, nous aurions à modifier nos conceptions sur les comètes périodiques et sur les systèmes que quelques-unes d'entre elles paraissent former.

7. La reconnaissance de l'identité de la comète Biela avec celles de 1772 et 1805 encouragea de nouveau les astronomes à faire des rapprochements entre des comètes dont les éléments présentent une ressemblance plus ou moins grande. Ces spéculations n'offrent aucun intérêt. Il n'en est pas de même des remarques très judicieuses que ce sujet suggéra à M. Clausen. Cet astronome condensa en quelques propositions les conditions nécessaires pour qu'on pût considérer comme identiques deux comètes dont les éléments diffèrent. Voici ces propositions : Il faut d'abord que les deux orbites aient un point d'intersection situé dans le voisinage de l'orbite de Jupiter. Leurs vitesses par rapport à cette planète doivent être égales à des distances jovicentriques égales, tant que ces distances ne diffèrent pas trop sensiblement du rayon de la sphère d'activité de Jupiter ([1]). Les deux astres doivent avoir pu passer simultanément par le point d'intersection, à un moment où Jupiter se trouvait également dans son voisinage.

M. Clausen montra, en appliquant ces propositions, que les comètes 1766 II (Helfenzrieder) et 1819 III (Winnecke) et les comètes 1743 I (Grischow) et 1819 IV (Blanpain) étaient probablement identiques. La seconde proposition de M. Clausen n'attira pas suffisamment l'attention des astronomes. Elle dit au fond la même chose qu'une importante relation constante qu'a découverte beaucoup plus tard M. Tisserand entre les éléments de l'ancienne et de la nouvelle orbite. Mais dans la forme dans laquelle cette proposition fut exprimée par M. Clausen, elle est d'une application extrêmement difficile. En effet, la vitesse jovicentrique dépend de la vitesse héliocentrique et celle-ci, en un point donné, du grand axe de

([1]) Il convient de mentionner que M. Clausen s'appuya sur ce criterium pour déclarer peu probable l'identité de la comète de Faye avec celle de Lexell.

Digitized by Google

l'orbite qui est inconnu au moins pour l'ancienne comète. Il faudrait donc faire de longs tâtonnements avant d'arriver à trouver une valeur du grand axe qui satisfasse à la condition de vitesses jovicentriques égales, tout en restant compatible avec la possibilité d'une rencontre simultanée des deux comètes et de Jupiter. Avec le criterium de M. Tisserand on est certes aussi dans les ténèbres lorsqu'on ne connaît pas la durée de révolution de l'ancienne comète, mais au moins peut-on trouver après de légers calculs toutes les combinaisons possibles qui sont compatibles avec l'hypothèse de l'identité des deux corps. Les difficultés ne viennent qu'après, lorsqu'il faut décider pour chacune de ces combinaisons soit par le calcul approché des perturbations, soit par tout autre moyen s'il en existe, si elle correspond ou non à la réalité.

Le premier criterium de M. Clausen est trop peu souple et ne pourrait servir si, entre les deux apparitions, l'astre avait plusieurs fois de suite subi de grandes perturbations dans des points sensiblement différents de son orbite ([1]). Le second, celui qui est identique avec le criterium de M. Tisserand, ne peut être en défaut que dans le cas de grandes perturbations, produites dans l'intervalle par une autre planète. Il deviendrait également inapplicable, si un astre s'était divisé, à la suite d'une explosion, en deux ou plusieurs morceaux, parce que dans ce cas chacun des débris aurait changé sa vitesse.

8. Nous avons déjà mentionné les recherches de Le Verrier pour élucider la question de l'identité des comètes Faye et De Vico-E. Swift, découvertes en 1843 et 1844, avec la comète Lexell. Au cours de ces recherches Le Verrier fut conduit à une remarque très importante au sujet de la comète de Vico. L'orbite de cet astre est actuellement, tout comme celle de la comète Encke, entièrement située à l'intérieur de l'orbite de Jupiter. Dans ces conditions les astronomes se sont demandé comment un tel astre, dont la plus courte distance à la planète ne descend pas au-dessous de 0,4, aurait pu avoir à l'origine une orbite parabolique, comme l'exige l'hypothèse de Laplace. Le Verrier, fervent partisan de cette hypothèse, démontre que la longitude du périhélie d'un astre croît nécessairement d'une façon constante, si cet astre reste toujours entre le Soleil et la planète troublante. Ainsi l'aphélie de la comète de Vico, qui est actuellement dans la direction de l'aphélie de Jupiter, a dû coïncider, dans un passé lointain, avec le périhélie de la planète. A cette époque le rayon

---

([1]) M. Clausen l'a lui-même remarqué; aussi considère-t-il déjà comme un indice de l'identité la circonstance que les deux astres se rapprochent de la planète, à peu près dans la même région du ciel.

Digitized by Google

vecteur de la comète a été plus grand que celui de Jupiter, qui a pu ainsi transformer en une ellipse peu allongée l'orbite originairement parabolique. Se basant sur cette remarque importante et sur ses calculs approchés des perturbations que la comète a pu subir dans le passé, Le Verrier démontra avec sagacité, d'une manière indirecte, l'identité de la comète avec celle de 1678. Il est superflu de faire remarquer que le calcul direct des perturbations effectivement subies aurait exigé un travail de longues années et ne serait possible qu'avec la connaissance d'une valeur très exacte du mouvement diurne. La comète De Vico qui, après celle de Halley, a le plus long passé, a accompli environ trente révolutions depuis 1678, sans avoir jamais été revue dans l'intervalle; après 1844 elle s'est soustraite de nouveau pendant un demi-siècle aux yeux des astronomes et ne fut observée qu'à son neuvième retour en 1894. Il est impossible de décider si c'est simplement l'effet du hasard ou si l'éclat de la comète subit en réalité de grandes variations.

On connaît déjà une demi-douzaine de comètes dont l'aphélie est actuellement situé à l'intérieur de l'orbite de Jupiter. Sur ce nombre il y en a trois, les comètes Encke, Tempel (1873 II) et Barnard (1884 II), et peut-être même celle de Blanpain (1819 IV), dont la distance aphélie est inférieure à la distance périhélie de Jupiter. Si l'on tient absolument à l'hypothèse de Laplace, il faut admettre qu'à un instant donné une des planètes intérieures ait fortement modifié l'ancienne orbite elliptique et ait diminué sa distance aphélie. Pour la comète Encke on peut recourir, en dehors de l'accélération qui raccourcit nécessairement le demi grand axe, à l'action de Mercure dont elle peut, d'après M. Backlund, se rapprocher jusqu'à 0,004. Pour les comètes Tempel et Barnard, il faudrait invoquer l'action de Mars. La comète Barnard se rapproche effectivement de l'orbite de Mars jusqu'à 0,008; d'ailleurs sa distance aphélie de 4,876 n'est pas sensiblement inférieure à la distance périhélie de Jupiter qui est de 4,952. Mais dans le cas de la comète Tempel les conditions sont bien différentes. D'après ses éléments actuels elle resterait encore à 0,28 à l'intérieur de l'orbite de Jupiter, si son aphélie coïncidait avec le périhélie de la planète; sa plus courte distance à Mars ne peut descendre au-dessous de 0,08. Il faut donc admettre qu'après l'époque où Mars avait fortement modifié l'orbite de la comète, l'action lente des perturbations de Jupiter ait sensiblement dévié la comète de son point de proximité à l'orbite de Mars. Dans tous les cas, il faut attribuer à cette comète un passé extrêmement long, si l'on ne veut pas recourir à la supposition, certainement très commode, mais bien arbitraire, de forces différentes de l'attraction, ou d'explosions violentes qui modifieraient instantanément des orbites cométaires.

9. La comète Faye est la première comète dont la durée de révolution

Digitized by Google

ait été, dans sa première apparition, déterminée avec une telle exactitude, qu'elle a pu, grâce à une éphéméride de Le Verrier, être aisément retrouvée lors de son retour en 1851. C'était, jusque dans ces derniers temps, la seule comète dont la théorie eût pu être rigoureusement établie, à l'aide des seules lois de l'attraction. M. A. Moeller a réussi à représenter les observations des apparitions 1843, 1851, 1858, 1865 et 1873 avec une exactitude qui provoqua l'admiration des astronomes. La représentation des observations de 1880 était moins satisfaisante. M. A. Moeller est mort, sans avoir communiqué le résultat de ses recherches sur les causes des écarts présentés par ces dernières observations. M. von Haerdtl, juge compétent, en voit la cause principale dans le fait que M. Moeller avait calculé les perturbations des coordonnées rectilignes. Cette méthode exigeant trois intégrations doubles, avec le temps, l'effet des erreurs inévitables se fait nécessairement sentir de plus en plus. Cette méthode, d'ailleurs si commode et si expéditive, présente encore l'inconvénient de ne pas faire connaître séparément l'action des diverses planètes, de sorte qu'on a, dans la suite, besoin de calculs supplémentaires, si l'on veut, après coup, introduire d'autres valeurs pour certaines masses. On peut espérer que le continuateur de l'œuvre de M. Moeller saura remédier à l'insuffisance constatée de la méthode et faire cadrer rigoureusement les apparitions de 1880, 1888 et 1895 avec les cinq apparitions précédentes. Cette comète fournira alors un excellent moyen de déterminer très exactement la masse de Jupiter.

Il serait injuste d'oublier que la théorie de la comète Winnecke, fournie par M. von Oppolzer, ce merveilleux calculateur, pour les apparitions de 1858, 1869 et 1875 et d'une manière plus approchée pour 1819, était très bien établie. Mais son élève et continuateur, M. von Haerdtl, qui a pu disposer et profiter de tous ses calculs, a porté la théorie de cet astre, embrassant les apparitions de 1858, 1869, 1875 et 1886, à un degré de perfection qui est sans précédent. La comète ayant subi entre 1875 et 1886 d'énormes perturbations de la part de Jupiter, M. von Haerdtl a pu en déduire la masse de cette planète avec une exactitude à laquelle aucune autre détermination de cette masse ne peut prétendre. Il a pu également déduire une valeur assez précise de la masse de Mercure, bien que la comète ne se rapproche pas suffisamment de cette planète. Une mort prématurée a empêché cet habile calculateur de corriger encore les valeurs de ces deux masses à l'aide d'observations ultérieures de la comète. Le continuateur de son œuvre, M. Hillebrand, ne tardera certainement pas à étendre la théorie aux apparitions de 1892 et 1898, de sorte que celle-ci embrassera un espace de 40 années. Quant à l'apparition de 1819, M. von Haerdtl trouva que le calcul des perturbations pour 39 années exigerait un effort de longues années et qu'il ne vaudrait pas la peine de faire un aussi grand sacrifice à seule fin de joindre une apparition de plus

Digitized by Google

au reste. Il serait toutefois d'un grand intérêt de représenter cette apparition d'une manière plus précise que n'ont pu faire MM. von Oppolzer et Clausen. Le travail ne coûterait pas trop de temps, si l'on disposait de leurs calculs approchés. On réussirait alors à résoudre la question de l'identité de la comète avec celle de Helfenzrieder (1766 II).

10. La comète Brorsen (1), découverte en 1846, présente plusieurs particularités remarquables. Elle fut, comme la comète Lexell, trouvée immédiatement après qu'elle eut subi, en 1842, de fortes perturbations de la part de Jupiter. Il est très singulier, et nous ne croyons pas que ce soit l'effet d'un simple hasard, que beaucoup de comètes périodiques aient été découvertes au lendemain de leur passage dans le voisinage de Jupiter, soit à leur premier passage au périhélie, soit au second, si le précédent avait eu lieu dans des circonstances défavorables de visibilité. Nous connaissons déjà au moins sept comètes pour lesquelles cette curieuse coïncidence se présenta. Ce sont celles de Lexell, Faye, Brorsen, Wolf, Brooks (1879 V), Swift (1895 II) et Perrine (1896 VII). On peut se demander si les comètes ne subissent pas dans le voisinage de Jupiter quelques modifications dans leur structure interne, accompagnées d'une augmentation plus ou moins durable de leur éclat.

La comète ne fut observée que dans les apparitions de 1846, 1857, 1868, 1873 et 1879. Elle paraît être perdue depuis cette dernière époque. Il est inexplicable qu'elle n'ait pu être retrouvée en 1890, dans des circonstances très favorables de visibilité, malgré des recherches assidues avec de puissants instruments et malgré la bonté de l'éphéméride de M. Lamp.

La théorie encore incomplète de cette comète, que sa distance périhélie de 0,59 range immédiatement après la comète Encke, contredit absolument l'hypothèse d'un milieu résistant. M. Schulze qui s'était pendant quelque temps occupé de cette théorie n'est parvenu à représenter les observations de 1868, 1873 et 1879 qu'en admettant un retard de la comète qui monte de 1873 à 1879 à un demi-jour environ. M. Lamp, ayant repris et vérifié les calculs de M. Schulze, confirme ce curieux résultat qui est bien conforme aux vues de Bessel, que nous avons relatées. Comme on n'a, dans aucune apparition, constaté des émissions de matières, M. Lamp admet la possibilité que des éruptions aient eu lieu bien après le passage au périhélie. En raison de l'inclinaison de la comète qui dépasse 29°, il ne croit pas à la rencontre de la comète avec une petite planète qui aurait

(1) Il est plus juste et plus conforme aux usages des astronomes de l'appeler comète Brorsen-Bruhns; en effet, M. Bruhns l'a trouvée, en 1857, par hasard et non à l'aide de l'éphéméride très erronée de M. van Galen.

Digitized by Google

troublé sa marche. La suite de ses recherches nous apprendra si le retard se manifeste aussi dans les apparitions antérieures.

Bientôt après la découverte de la comète 1894 I (Denning), M. Hind reconnut que son orbite se rapproche extrêmement de celle de la comète Brorsen et que les deux astres ont dû, vers le milieu de janvier 1881, passer presque simultanément par leur point de rencontre. M. Lamp ayant confirmé cette curieuse remarque par un calcul plus rigoureux, à l'aide de meilleurs éléments de la comète Denning, émet l'hypothèse hardie d'une violente explosion qui aurait eu lieu à cette époque et qui aurait jeté un des débris dans l'orbite de la comète Denning et d'autres dans des orbites inconnues. Malheureusement, on ne connaît pas assez la durée de révolution de la comète Denning pour pouvoir décider si les deux astres se trouvaient, à cette époque, effectivement au même instant à leur point de rencontre.

L'hypothèse de M. Lamp est très séduisante; elle expliquerait très bien la disparition de la comète Brorsen; néanmoins, elle nous paraît difficilement acceptable. Elle exigerait une explosion d'une force extraordinaire qui aurait augmenté de 3^{km} par seconde la vitesse de l'astre, vitesse qui était auparavant de $7^{km},5$. L'inclinaison se serait changée de 29° en 5°, et la durée de révolution de 5,5 en 7,4 années. Aussi préférons-nous une autre hypothèse qui nous paraît plus simple et qui nous est suggérée par a circonstance que le point d'intersection des orbites des deux astres est, en même temps, leur point de rencontre avec Jupiter. Nous supposons qué les deux comètes formaient, dans le passé, un seul corps qui a été divise en deux parties, dans son point de rencontre avec Jupiter, par l'action de cette planète ou par d'autres forces. Les grandes perturbations ultérieures de Jupiter ont bien pu modifier de plus en plus les éléments des deux comètes, sans déranger le point d'intersection de leurs orbites qui reste constamment le point dans lequel la planète les rencontre. Dans ces conditions, il n'y a rien d'étonnant à ce que les deux comètes se rencontrent parfois et subissent même des anomalies dans leur mouvement, si leur action mutuelle a pu devenir sensible. Nous ajouterons même, toutefois avec de grandes réserves, qu'on pourrait trouver, dans cette circonstance, une explication du retard qu'a éprouvé la comète Brorsen de 1873 à 1879. Admettons que chacune des deux orbites soit jonchée de divers débris dont la durée de révolution ne diffère pas trop de celle de la comète qu'ils accompagnent. La comète de Brorsen dont la vitesse, au point de rencontre, n'est que de $7^{km},5$, pourrait alors, à un moment donné, être frappée par un débris qui arrive avec une vitesse de $10^{km},5$. Sa vitesse augmenterait ainsi un peu, ce qui équivaut à une augmentation de son grand axe et de sa durée de révolution. Si cette explication répondait à la réalité, on pourrait s'attendre à constater ultérieurement une accélération dans le mouvement de la comète de Denning. Il est possible que la

Digitized by Google

comète Brorsen ait rencontré, en janvier 1881, un débris plus gros de la comète Denning et en ait éprouvé un retard considérable; dans ce cas, ses futurs passages au périhélie auraient lieu beaucoup plus tard que d'après les éléments de M. Lamp.

Par une coïncidence curieuse, un fait tout récent paraissait apporter un appui à l'hypothèse de M. Lamp. Les éléments de la comète Perrine (1896 VII) montrent une certaine ressemblance avec les éléments de la comète Biéla dans sa dernière apparition en 1852, notamment les plans des deux orbites sont presque identiques. Tant qu'on ne connaissait pas la véritable durée de révolution de la comète Perrine, on pouvait admettre la possibilité que les deux astres s'étaient, depuis 1852, trouvés simultanément dans le point d'intersection de leurs orbites, et recourir à l'hypothèse d'une explosion, à la suite de laquelle un des débris aurait été lancé dans l'orbite actuelle de la comète Perrine. Mais maintenant nous savons que celle-ci a, depuis 1852, toujours devancé la comète Biéla, de plus d'une année, dans leur point de rencontre. Fixer l'époque de leur séparation violente avant la première apparition de la comète Biéla, en 1772, est absolument arbitraire. Qui pourrait savoir, sans de longs calculs, s'il y avait, à cette époque, la moindre ressemblance entre les deux orbites et si notamment celles-ci avaient déjà un point commun, soit dans la région du point d'intersection actuel, soit ailleurs? Les perturbations de Jupiter ont, depuis 1772, plusieurs fois modifié l'orbite de la comète Perrine; les points de rencontre des deux comètes avec la planète ne coïncident pas et sont presque dans une direction opposée à celle de leur point d'intersection actuel. Nous nous arrêtons d'autant moins à la supposition d'une explosion que nous croyons à la possibilité de l'identité de la comète Perrine avec les comètes Blanpain (1819 IV) et Grischow (1743 I).

En attendant que quelque nouveau fait nous fixe sur les causes de l'invisibilité de la comète Brorsen en 1890, nous pouvons très bien admettre un affaiblissement temporaire ou durable de son éclat. La comète avait d'ailleurs montré, dans ses apparitions successives, des changements rapides dans son éclat et une diminution progressive indiscutable de son intensité lumineuse. On a également constaté un affaiblissement progressif de l'éclat de la comète d'Arrest et l'on a des raisons pour le soupçonner pour d'autres comètes encore. Il y a donc lieu de continuer le calcul rigoureux des positions de la comète Brorsen à chaque nouveau retour et de la chercher sans se décourager. Qui sait si un grand succès n'est pas, au bout de ces recherches pénibles, une belle découverte qui jetterait une vive lumière sur le mystère des variations d'éclat de ces astres?

11. La comète d'Arrest, découverte en 1851, ne présente rien de parti-

Digitized by Google

culier. Elle a subi, en 1861, de fortes perturbations de la part de Jupiter. Une théorie qui embrasserait les six apparitions connues de 1851, 1857, 1870, 1877, 1890 et 1897, permettrait une excellente détermination de la masse de Jupiter, si toutefois aucune anomalie ne se manifeste dans le mouvement de la comète. Nous sommes à ce sujet encore dans l'ignorance; les recherches de M. Leveau qui s'est chargé de la théorie de cet astre, ne sont pas encore terminées.

En 1858 trois comètes périodiques furent découvertes. Nous avons déjà parlé de la comète Winnecke. La comète 1858 III, trouvée par M. Tuttle, n'a pu être observée que pendant trois semaines. Sa périodicité ne fut reconnue que plusieurs années après son apparition. Ce faible astre dont la durée de révolution n'a pu être déterminée qu'approximativement, n'a plus été revu, bien qu'il ait passé, depuis 1858, au moins cinq fois à son périhélie. Il est donc probable que son éclat s'est encore affaibli depuis 1858.

La troisième comète de 1858, la comète Méchain-Tuttle, est bien remarquable. Sa durée de révolution est de 13,8 années, deux fois plus grande que celle de la plupart des autres comètes périodiques. Son inclinaison est de 55°. Elle ne peut se rapprocher des orbites de Jupiter et de Saturne qu'à 0,8 et 1,8 respectivement; elle reste toujours très loin de Mars : sa plus courte distance à l'orbite terrestre ne descend pas actuellement au-dessous de 0,09. Dans ces conditions il est assez difficile de concevoir comment la comète aurait pu, à un instant donné, être capturée, si à l'origine son orbite avait été parabolique. L'action de Jupiter sur le mouvement d'un astre qui marche, à la distance 0,8, avec une vitesse relative considérable, n'est pas assez puissante pour modifier aussi sensiblement l'excentricité. Il faut donc tout au moins admettre que la comète ait été, dans un passé lointain, beaucoup plus rapprochée de Jupiter, et qu'après sa capture par cette planète, elle soit entrée dans la sphère d'activité de la Terre, qui l'aurait détournée du voisinage de Jupiter; plus tard les perturbations lentes de cette dernière planète l'auraient à leur tour éloignée de l'orbite terrestre. A ce sujet il n'est pas sans intérêt de comparer la valeur de la distance périhélie en 1790 avec sa valeur actuelle. Les calculs assez précis de M. Tischler donnent pour 1790 $q = 1,044$ tandis que M. Rahts trouve pour 1899 $q = 1,027$. La comète restait donc, il y a un siècle, plus loin de la Terre qu'actuellement. Mais cette comparaison n'est pas si défavorable à l'hypothèse de la capture des comètes. Elle montre que les lentes perturbations de Jupiter peuvent très bien avoir augmenté de 0,1 la plus courte distance de la comète à l'orbite terrestre, si cette distance était, à un moment donné, excessivement faible.

La théorie des apparitions de 1858, 1871 et 1885 a pu être établie par M. Rahts d'une manière tout à fait satisfaisante, sans qu'il ait eu besoin d'admettre d'autres actions troublantes que celles des planètes.

Digitized by Google

12. L'histoire de l'Astronomie enregistre plusieurs coïncidences vraiment remarquables. Une des plus curieuses est la découverte, presque coup sur coup, de trois comètes de longue période, qui sont dans une connexion intime avec de grands essaims d'étoiles filantes dont on peut suivre les manifestations périodiques loin dans le passé. Ce sont : la comète 1861 I (Thatcher), à laquelle se rattache l'essaim des Lyrides qui apparaissent entre le 19 et le 30 avril; la comète 1862 III (Tuttle), qui est en connexion avec le riche *courant de Saint-Laurent,* les Perséides du 10 août, et la comète 1866 I, dans l'orbite de laquelle circulent les Léonides du 13 novembre, qui se manifestent toutes les 33 années environ avec une abondance extraordinaire. Sans ces heureuses découvertes, les admirables vues de M. Schiaparelli sur la connexion des comètes et des météores n'auraient pas trouvé de longtemps leur confirmation et sa théorie ne serait pas sortie du domaine des spéculations sagaces, mais dénuées de preuves.

La comète 1866 I est particulièrement intéressante par les importantes recherches de MM. Newton et Adams qui ont mis hors de doute sa connexion intime avec l'essaim des Léonides. MM. Schiaparelli et Le Verrier avaient calculé les éléments elliptiques de l'essaim, en supposant arbitrairement que sa durée de révolution était d'environ 33 $\frac{1}{3}$ années, c'est-à-dire égale à la période du phénomène. Ils écartèrent ainsi de parti pris, l'hypothèse que l'essaim aurait, dans cet intervalle, accompli plusieurs fois sa révolution. Grâce à M. Adams, nous sommes absolument fixés à ce sujet. Lors de ses recherches sur le passé de l'essaim, M. Newton avait démontré que le nœud de son orbite avait, entre 902 et 1833, avancé annuellement de 1',71, quantité deux fois plus grande que la précession annuelle. Avec une grande sagacité, il avait fait remarquer que le calcul des perturbations séculaires du nœud permettrait de reconnaître la véritable durée de révolution de l'essaim. M. Adams entreprit cette délicate et longue recherche, en faisant diverses suppositions sur la durée de révolution. Il trouva alors que les perturbations séculaires du nœud montaient, dans la supposition d'une durée de révolution de 33 $\frac{1}{3}$ années, exactement à 1',71, tandis que les variations correspondant à des périodes plus petites étaient beaucoup plus faibles. Comme la comète 1866 I a également une durée de révolution d'environ 33 années, il n'est plus permis d'attribuer au hasard la concordance de ses éléments avec ceux de l'essaim. Malheureusement, la comète ne fut pas observée assez longtemps en 1866, de sorte que sa période est incertaine dans les limites de $\pm 1,5$ années. Son retour est attendu entre 1898 et 1901; il serait bien désirable que les éphémérides de recherche données par M. Bidschof amenassent sa découverte : la connaissance de sa véritable durée de révolution jetterait une vive lumière sur beaucoup de questions concernant la nature de sa connexion avec

Digitized by Google

l'essaim des Léonides. D'après MM. Newton et Hind, la comète est certainement identique avec celle de 1366.

13. La comète 1867 II (Tempel) est remarquable à plusieurs points de vue. Son orbite est entièrement à l'intérieur de l'orbite de Jupiter. Sa vitesse relative par rapport à la planète est la plus petite connue après celle de la comète Encke ([1]). En raison de cette circonstance, elle reste, en cas de rencontre avec Jupiter, extrêmement longtemps dans son voisinage et subit, même à des distances relativement grandes, des perturbations très considérables. Le mouvement direct de son périhélie est assez rapide. Son aphélie ne dépasse le périhélie de Jupiter que de 50° environ; il a dû coïncider avec celui-ci, il y a 200 ou 300 ans. A cette époque, la comète était extrêmement rapprochée de l'orbite de la planète. Il n'est pas impossible que sa capture ait eu lieu vers cette époque. Dans ce cas, elle serait la plus jeune parmi les comètes périodiques de notre système planétaire. Mais il serait téméraire de prétendre que son orbite a été effectivement parabolique avant cette époque. Il est plus probable que l'orbite était simplement beaucoup plus allongée. Les comètes qui, même à leur aphélie, restent entièrement à l'intérieur de l'orbite de Jupiter, paraissent suivre une évolution assez régulière. Pendant un certain laps de temps, l'excentricité diminue de plus en plus et l'orbite devient presque circulaire. Après avoir atteint un minimum, l'excentricité augmente de nouveau, sans qu'on puisse dire qu'elle atteindra ou dépassera certainement la valeur 1,0, c'est-à-dire que la comète sera rejetée dans les espaces stellaires.

La comète 1867 II présente un exemple saisissant de cette évolution. Son excentricité qui était en 1867 encore égale à 0,510, n'est plus en 1898 que de 0,402 ([2]). M. Gautier, qui s'est chargé de la théorie de cet astre, soupçonne qu'après 1898 l'excentricité augmentera de nouveau. Même, s'il en était ainsi, on ne pourrait pas conclure que l'excentricité ne descend jamais au-dessous de 0,40. L'amplitude de ses variations peut être bien différente à différentes époques.

En raison de la forte diminution de l'excentricité, la distance périhélie

---

([1]) L'hypothèse de la capture des comètes ne se concilierait pas avec l'existence d'une vitesse relative encore plus faible. Une comète qui posséderait une telle vitesse aurait appartenu dès l'origine au système solaire.

([2]) La comète De Vico-E. Swift présente également l'exemple de la diminution lente et continue de l'excentricité; celle-ci était en 1844 encore de 0,617; en 1894, elle était déjà descendue au-dessous de 0,572 et a dû encore considérablement diminuer en 1897, époque à laquelle la comète a passé dans le voisinage de Jupiter.

Digitized by Google

est devenue de plus en plus grande. Dans ces conditions, la comète reste très loin de la Terre, même si l'époque de son passage au périhélie coïncide avec celle de son opposition. Aussi cet intéressant astre n'a-t-il pu être retrouvé depuis 1879. M. Gautier ne dispose pour ses recherches que des trois apparitions de 1867, 1873 et 1879. Ses calculs ne sont pas encore terminés. Nous ne savons donc pas s'il existe des anomalies dans le mouvement de la comète. L'établissement d'une théorie rigoureuse est rendu difficile par la circonstance que la comète a éprouvé entre 1867 et 1873 des perturbations très considérables de la part de Jupiter.

14. Nous avons déjà parlé de la comète 1873 II (Tempel). Cette comète

a été observée en 1873, 1878 et 1894. Nous nous sommes chargé de sa théorie. Nous croyons pouvoir affirmer que le mouvement moyen diurne subit une accélération d'environ $0^{s},02$.

Cette comète paraît avoir une origine commune avec celle de Barnard (1884 II). Il est probable que ces deux comètes sont des débris d'une ancienne comète qui fut, dans le passé, divisée par l'action de Jupiter.

Lorsqu'on examine le Tableau des comètes périodiques, en s'appuyant sur le criterium de M. Tisserand, on y trouve plusieurs groupes dont les membres sont actuellement des astres distincts, mais qui ont dû avoir une origine commune. Le groupe le plus riche renferme les comètes Lexell, Finlay et Swift (1895 II); peut-être faut-il aussi ajouter à ce groupe celles de Wolf, Faye et Barnard (1892 V) qui forment entre elles certainement un système. Si les comètes Grischow, Blanpain et Perrine (1896 VII) ne sont pas identiques, elles forment un second groupe. Un troisième système contient les comètes Helfenzrieder et Winnecke, à moins qu'elles ne soient identiques; un quatrième renferme fort probablement les comètes Pigott et Denning (1881 V), un cinquième les comètes Brorsen et Denning (1894 I), un sixième, comme nous l'avons déjà dit, les comètes Tempel (1873 II) et Barnard (1884 II); les comètes Tempel (1869 III) et Spitaler appartiennent à un septième groupe.

M. Herz (*Handwörterbuch der Astronomie,* livraison 8, p. 96) est de l'avis qu'on n'est pas autorisé de conclure à une connexion intime entre deux astres pour la seule raison qu'ils satisfont au criterium de M. Tisserand et qu'ils ont à peu près le même point de proximité à l'orbite de Jupiter. Il est certain que ces conditions, bien qu'absolument nécessaires, ne sont pas encore suffisantes, pour qu'on puisse, d'une manière indubitable, attribuer à deux comètes une origine commune. Deux comètes, arrivant, à des époques séparées par un grand intervalle de temps, de différentes régions de l'espace stellaire, peuvent très bien rencontrer Jupiter dans le même point de son orbite, et avoir, toutes les deux, à une distance donnée de la planète, la même vitesse jovicentrique. Il faut tou-

Digitized by Google

tefois reconnaître que les chances d'une telle coïncidence sont bien faibles. D'un autre côté on ne peut nier que la plupart des comètes périodiques sont, sinon des membres permanents du système solaire, tout au moins des hôtes qui y séjournent depuis fort longtemps. Dans ces conditions les débris d'une comète, divisée anciennement, peuvent actuellement circuler dans des orbites qui ne se ressemblent plus. Nous croyons donc qu'on ne s'écartera que rarement de la vérité, en attribuant une origine commune à des comètes qui possèdent un même point de proximité à l'orbite de Jupiter et dont les vitesses jovicentriques sont égales.

15. La grande comète 1882 II forme avec la comète 1843 I, et probablement encore avec d'autres, un système des plus remarquables. Ces comètes ont une distance périhélie excessivement petite. Elles ont probablement formé dans le passé un seul corps qui a été, à l'un de ses passages au périhélie, divisé en plusieurs parties par l'action dissolvante du Soleil.

La comète 1882 II elle-même s'est divisée, sous les yeux des observateurs, en cinq noyaux distincts. Cette division était accompagnée d'un phénomène que les astronomes n'avaient jamais constaté auparavant. On observa, pendant plusieurs semaines, dans les environs de la comète, même à la distance de plusieurs degrés, diverses masses nébuleuses extrêmement ténues et très étendues qui avaient dû s'en détacher et s'en éloigner avec une vitesse considérable. Presque toutes ces nébulosités s'évanouissaient rapidement. Une seule a pu être suivie pendant trois jours; on a même essayé de déterminer son orbite. On ne peut pas décider si ces nébulosités s'étaient détachées de la chevelure ou de la queue. A en juger d'après des observations faites dans ces derniers temps sur plusieurs comètes, on serait porté de les regarder comme des fragments de la queue. Il est donc probable que la masse de ces divers fragments était minime et que ceux-ci auront, dans la suite, formé tout au plus un des innombrables petits essaims de météores qui sillonnent l'espace. Par contre, on peut regarder les divers noyaux comme autant de petites comètes distinctes qui repasseront dans un certain temps au périhélie, sans avoir, dans l'intervalle, subi de perturbations sensibles, aucune planète ne croisant leur trajectoire. Ces noyaux qui, au bout de cinq mois, ne s'écartaient pas encore l'un de l'autre de plus de 1′, ont, par suite des particularités de l'orbite extrêmement allongée, des durées de révolution étonnamment différentes. M. Kreutz qui a pu déterminer les orbites de quatre d'entre eux, trouve comme périodes : 671, 772, 875 et 955 années respectivement.

Ce qui est encore plus étonnant c'est l'infime variation de vitesse à l'époque de la division, qui a suffi pour produire cet effet. M. Kreutz

Digitized by Google

trouve, en confirmation d'une remarque de M. Tisserand, que la vitesse originelle au périhélie, de 478052 mètres par seconde, n'a dû subir qu'une variation de — 1,58, — 0,46, + 0,46 et + 1,05 mètres respectivement.

Dans sa recherche approfondie sur la théorie de cette comète, M. Kreutz n'a pu arriver à des résultats indiscutables. Le problème qui se posait est vraiment ardu, et sa solution rencontre des difficultés inextricables. Comment fallait-il combiner les observations, faites avant la séparation des noyaux, et celles obtenues pendant le dernier tiers de l'apparition, lorsqu'on ne distingua plus les divers noyaux et qu'on pointait simplement la partie la plus condensée de la nébulosité étendue, avec les observations intermédiaires qui se rapportent distinctement à l'un ou à l'autre noyau? M. Kreutz a trouvé nécessaire de faire plusieurs suppositions et de calculer, pour chacune de ces hypothèses, les orbites des quatre noyaux. Dans ces diverses hypothèses les éléments sont presque absolument identiques, sauf la durée de révolution, dont la valeur varie selon la supposition qu'on fait.

Cette comète aurait pu, si ces difficultés théoriques ne subsistaient pas, apporter une vive lumière à la question du milieu résistant. L'action de celui-ci devrait être tellement forte, sur un astre qui passe à 0,00775 du centre du Soleil, que les quelques observations faites avant le passage au périhélie ne pourraient se concilier avec les observations postérieures dans une même ellipse. Les diverses orbites qu'a trouvées M. Kreutz s'accordent très bien avec la supposition qu'un milieu résistant n'existe pas, mais ses calculs ne s'opposent pas non plus à l'admission de cette hypothèse, et lui sont plutôt favorables. Les durées de révolution extrêmement incertaines auxquelles arrive M. Kreutz, en n'employant que les observations antérieures au passage au périhélie ou celles antérieures à la division de la comète, sont plus grandes que les valeurs déduites de l'ensemble des observations. Mais, vu le petit nombre des observations et le court espace de temps qu'elles embrassent, l'apparente diminution de la période ne mérite pas de confiance.

16. En dehors de cette comète et de celle de Biela, il y a encore un autre cas remarquable d'une comète multiple. C'est celle de Brooks (1889V) qui apparut en compagnie de quatre comètes distinctes dont la plus considérable l'égalait, par moments, en éclat, mais dont aucune ne put être retrouvée lors de son retour en 1896. MM. Bredikhine et Chandler attribuent, avec un haut degré de probabilité, la division de la comète à l'action de Jupiter, dont elle s'était rapprochée, à la date du 20 juillet 1896, à une distance qui ne dépasse pas 2,2 rayons équatoriaux de la planète. La comète avait, à cette époque, traversé le système des satellites de

Digitized by Google

Jupiter [1]. Des calculs ultérieurs montreront si elle a pu subir des perturbations de la part du premier satellite; sa distance aux quatre autres satellites surpassa au moins 40 fois le rayon de leur sphère d'activité.

La durée de révolution de la comète était, antérieurement aux énormes perturbations de 1886, d'environ 31,5 années. Il est remarquable qu'à cette époque son excentricité ne dépassait pas 0,45, valeur que les perturbations de 1886 n'ont pas beaucoup augmentée. On peut en conclure que cette comète doit appartenir depuis longtemps à notre système solaire.

M. Poor Lane a fait une très belle recherche sur les perturbations de la comète entre 1884 et 1889. Lorsqu'on aura déterminé avec plus d'exactitude la durée de révolution que l'astre possédait vers 1884, on pourra fixer l'époque à laquelle celui-ci avait acquis son orbite de 1884.

Il est probable que l'excentricité de la comète augmentera dans la suite. Il en est de même de la comète Wolf dont l'excentricité n'était, avant 1875, que de 0,391, tandis qu'elle monte actuellement à 0,555.

17. Lorsque Laplace imagina l'hypothèse de l'origine étrangère des comètes, il ne connaissait que deux comètes périodiques, celles de Halley et de Lexell. Toutes les autres comètes paraissaient marcher dans des orbites extrêmement allongées dont l'excentricité ne s'écarte pas sensiblement de l'unité. Pour expliquer la présence de la comète Lexell dans le système solaire, Laplace eut recours à l'hypothèse de la capture de certaines comètes sous l'action d'une grosse planète, dans le voisinage de laquelle elles auraient passé lors de leur arrivée de l'espace stellaire. Il ne fit pas assez d'attention au cas de la comète Halley dont le mouvement est rétrograde et qui reste assez éloignée des orbites des planètes extérieures; peut-être estima-t-il que les perturbations subies vers l'époque du premier passage au périhélie avaient pu être assez considérables, pour changer le grand axe dans une aussi forte mesure. La grande diversité des orbites des comètes qui coupent l'écliptique sous tous les angles entre 0° et 90°, et leurs mouvements indifféremment directs et rétrogrades, étaient pour lui l'indice d'une distribution entièrement due au hasard, distribution qui se concilie à merveille avec la supposition que ces astres arrivent de tous les points de l'espace stellaire.

Mais quelle doit être en général l'excentricité des orbites dans lesquelles ces corps marcheront autour du Soleil, après leur arrivée dans les régions planétaires? Laplace appliqua le Calcul des probabilités à la solution de

---

[1] D'après les recherches de Le Verrier la comète Lexell a également pu passer, en 1779, à travers les satellites de Jupiter.

Digitized by Google

ce problème ardu. En admettant que les distances périhélie restent inférieures à 2,0 et en supposant que toutes les directions et toutes les vitesses entre 0 et ∞ sont également probables, il trouva que, sur 5713 comètes, on ne doit s'attendre à en rencontrer qu'une seule dont l'orbite soit nettement hyperbolique. Il arriva ainsi à la conclusion que son hypothèse était en accord avec le fait que les orbites cométaires ne s'écartent pas sensiblement de la parabole.

Bien que l'analyse de Laplace ne fût pas suffisamment rigoureuse, comme l'ont montré d'abord Gauss et plus tard MM. Schiaparelli, Seeliger et Fabry, ses résultats seraient néanmoins exacts, si le Soleil n'avait pas un mouvement de translation. Mais cette circonstance change complètement les conditions du problème. M. Schiaparelli a le grand mérite d'avoir montré, le premier, qu'en raison du mouvement de translation du Soleil, les orbites de presque toutes les comètes devraient être sensiblement hyperboliques, si elles venaient effectivement avec des vitesses quelconques de tous les points de l'espace [1]. Il arrive à la conclusion que les comètes, sans appartenir directement au système solaire, ont dû, dès l'origine, accompagner le Soleil dans sa course, animées de vitesses à peu près égales à la sienne.

Les vues de M. Schiaparelli ont immédiatement trouvé un accueil très favorable et sont aujourd'hui presque généralement adoptées. Son hypothèse rend parfaitement compte de cette circonstance qu'un grand nombre de comètes marchent dans des ellipses extrêmement allongées. Mais il existe un certain nombre de faits qu'elle est impuissante à expliquer et qui nous contraignent d'ores et déjà à admettre qu'au moins certaines aient pris naissance dans le système solaire lui-même. Mentionnons tout d'abord un fait encore insuffisamment établi qui, s'il se confirmait dans la suite, affaiblirait beaucoup le crédit de cette hypothèse. Il s'agit de la rareté des comètes qui marchent dans des orbites même faiblement hyperboliques. Il est remarquable qu'on a pu, pour quelques-unes des comètes dont l'excentricité dépasse certainement l'unité, démontrer que leur orbite, elliptique à l'origine, n'est devenue hyperbolique qu'à la suite des perturbations planétaires qu'elles avaient subies peu avant leur passage au périhélie.

Aujourd'hui on observe un grand nombre de comètes assez longtemps, pour que le calcul puisse souvent faire reconnaître avec certitude de combien leur excentricité s'écarte de l'unité. A notre avis, toute bonne

---

[1] M. Fabry a traité récemment ce sujet dans sa belle thèse de doctorat : « Études sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes. » Il confirme entièrement les résultats de M. Schiaparelli.

Digitized by Google

détermination de l'orbite d'une comète qui marche dans une orbite faiblement hyperbolique ou dans une ellipse extrêmement allongée, devrait avoir pour complément indispensable le calcul approché des perturbations du grand axe pour l'époque antérieure au passage au périhélie. Si l'on trouvait ainsi quelques cas d'orbites actuellement elliptiques qui dérivent d'une hyperbole, on obtiendrait immédiatement une confirmation directe de l'hypothèse de M. Schiaparelli. Inversement, plus on rencontrerait de comètes dont l'excentricité était antérieurement plus faible que lors du passage au périhélie, plus cette hypothèse deviendrait sujette à caution.

Examinons maintenant comment se concilie l'hypothèse de M. Schiaparelli, secondée par la théorie de la capture des comètes, avec l'existence des comètes périodiques dont la durée de révolution ne dépasse pas quelques centaines d'années. Pour qu'on puisse mieux comprendre les remarques que nous allons faire, il est indispensable de rappeler la relation, découverte par M. Tisserand, qui existe entre les anciens et les nouveaux éléments d'une comète ayant subi de fortes perturbations de la part d'une seule planète.

Nous en donnerons ici l'expression approchée dans deux formes différentes.

Soient a, p et i le demi grand axe, le paramètre et l'inclinaison de la comète sur l'orbite de la planète, M et P la masse et le paramètre de cette dernière. Désignons encore par r et R les rayons vecteurs de la comète et de la planète au point de proximité même ou dans un point situé dans son voisinage, et par ρ et γ la distance de la comète à la planète et la vitesse relative qu'auraient les deux astres, s'ils se trouvaient simultanément en ce point (l'unité de temps étant égale à 58,13 jours).

Nous avons alors, en ne négligeant que des termes qui ont l'excentricité de la planète pour facteur,

$$(1) \qquad \frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2}\sqrt{p}\cos i = -\frac{2M}{\rho} + \text{const.}$$

$$(2) \qquad \frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2}\sqrt{p}\cos i = \frac{2}{r} + \frac{1}{R^3}(r^2 - \rho^2) - \gamma^2.$$

Désignons par K la valeur de l'expression $\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2}\sqrt{p}\cos i$ qui correspond à des distances suffisamment grandes avant et après l'époque des fortes perturbations, pour qu'on puisse négliger le terme $\frac{2M}{\rho}$. Cette valeur de K est presque absolument constante, si le point de proximité se trouve près du périhélie ou de l'aphélie de la planète, comme par exemple dans

Digitized by Google

le cas des comètes Lexell (1) et Brooks (1889 V). Mais si le point de proximité se trouve à environ 90° du périhélie ou de l'aphélie de la planète, la variation de K est assez sensible, surtout lorsque la vitesse γ est très petite et que la comète reste longtemps dans la sphère d'activité de la planète. Nous ne connaissons encore aucun cas où toutes ces conditions soient remplies. Pour la comète de Brorsen le point de proximité est à 88° du périhélie de Jupiter, mais la valeur de γ est une des plus grandes; néanmoins K a varié en 1842 de 0,009.

En posant $r^2 = R^2(1+\varepsilon)$, on a pour γ^2 l'expression

$$\gamma^2 = \frac{3}{R}(1+\varepsilon^2) - \frac{\rho^2}{R^3} + \frac{2M}{\rho} - K. \tag{3}$$

On voit que γ est, pour une valeur donnée de ρ, d'autant plus petit que K est plus grand, et inversement. On en conclut qu'une comète pourra subir des perturbations très considérables, à des distances relativement grandes de la planète, lorsque la quantité K est grande. Plus la valeur de K diminue, plus la plus courte distance de la comète à la planète doit être faible, pour qu'elle puisse subir des perturbations notables.

Nous avons donné, dans le n° 2964 des *Astronomische Nachrichten*, un tableau contenant, pour 23 comètes périodiques, leur point de proximité à l'orbite de Jupiter et la valeur de K. Actuellement le nombre des comètes de courte période monte déjà à 30. Les remarques qui suivent sont basées sur l'examen d'un tableau qui embrasse l'ensemble de ces comètes.

Les points de proximité ne conservent pas invariablement une même position. Dans le cas des comètes dont l'orbite est entièrement renfermée à l'intérieur de l'orbite de Jupiter, la longitude de leur point de proximité, qui est naturellement situé à leur aphélie, augmente continuellement. Pour les autres comètes ce point n'est suffisamment fixe que lorsque leurs inclinaisons restent supérieures à 10°. Les comètes dont l'inclinaison est faible changent facilement la position de leur point de proximité, et cela d'autant plus qu'elles possèdent souvent un point secondaire de proximité. Si donc la distribution des points de proximité est, à un moment donné, très iné-

---

(1) On a, pour 1767, 1770 et 1779, $\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{P}}{R^2}\sqrt{p}\cos i$ égal à 0,483, 0,487 et 0,478 respectivement. Mais, comme Le Verrier n'a poussé, pour 1767 et 1779, le calcul des perturbations que jusqu'au moment où ρ était égal à environ 0,3, il faut tenir compte du terme $-\frac{2M}{\rho}$, après quoi on a à peu près :

$$K = 0{,}489,\ 0{,}487 \text{ et } 0{,}485.$$

Digitized by Google

gale, on n'est pas encore autorisé à conclure qu'il en a été toujours ainsi. Il est néanmoins très remarquable que 22 comètes sur 30 ont leur point de proximité dans une étendue de 150°, entre les longitudes 125° et 275°. Parmi les 8 autres comètes on trouve celles d'Encke, Tempel (1867 II) et Brooks (1886 IV) dont l'aphélie est à l'intérieur de l'orbite de Jupiter. La première a une place à part dans le groupe des comètes périodiques; il est donc justifié de ne compter que 7 comètes dans cette énorme étendue de 210°. La disproportion ne change pas sensiblement, si l'on fait la supposition fort acceptable que certaines des comètes actuellement connues proviennent d'une ancienne comète périodique qui s'est divisée en plusieurs parties. Dans ce cas on peut admettre qu'à l'origine le premier groupe ne contenait que 12 ou 13 astres, tandis que les 7 comètes du second groupe proviennent de 4 ou 5 anciennes comètes. Au point de vue de l'hypothèse de M. Schiaparelli on ne trouve pas une explication tout à fait satisfaisante de cette énorme prédominance d'un groupe sur l'autre. Il est vrai que la moitié des comètes du premier groupe est située vers l'aphélie de Jupiter, où les chances pour la capture d'une comète sont plus grandes, aussi bien en raison de la plus grande distance du Soleil qu'à cause de la marche plus lente de la comète et de la planète; mais cette circonstance ne peut avoir une aussi grande influence sur la distribution des points de proximité. Il faut donc gratuitement supposer que les masses nébuleuses qui suivent le Soleil dans sa course ne sont pas uniformément distribuées.

La valeur de K est, pour ces 30 comètes, comprise entre 0,41 et 0,59; 27 astres ont leur K entre 0,46 et 0,56, une à 0,41, et deux, la comète Encke y comprise, à 0,59. Nous avons déjà mentionné que les orbites des comètes Encke et Tempel (1873 II) restent entièrement à l'intérieur de l'orbite de Jupiter à une distance considérable de celle-ci, et qu'il faut, dans la supposition de leur capture, recourir à l'intervention hypothétique, mais, somme toute, possible, de Mercure pour la première, de Mars pour la seconde.

En général, on trouve que les comètes, pour lesquelles la valeur de K est considérable, ne se rapprochent pas trop sensiblement de Jupiter, tandis que des plus courtes distances très faibles correspondent à de petites valeurs de K. Ce fait est dans un très bon accord avec ce qu'exige l'hypothèse de la capture des comètes. Mais il y a une exception frappante. La comète Swift 1889 VI ($K = 0,461$, $i = 10°$, période $= 9$ ans) ne peut se rapprocher de Jupiter qu'à 0,7 et reste également loin des autres grosses planètes.

On peut bien faire la supposition que beaucoup de comètes, qui passent à l'origine à une distance relativement considérable, acquièrent à ce moment une durée de révolution de quelques milliers d'années qui diminue de plus en plus lors des retours successifs. Mais lorsque la vitesse rela-

Digitized by Google

tive γ est aussi considérable que dans le cas de cette comète 1889 VI, il faut tout au moins admettre que cette transformation de la durée de révolution a dû exiger un énorme espace de temps, rien que pour la réduire de 100 à 10 années, par exemple.

La comète Méchain-Tuttle ($K = 0,337$, $i = 54°$, période $= 13^a,8$) nous autorise bien autrement que la comète mentionnée à soulever de graves objections contre l'hypothèse qui attribue l'existence de toutes les comètes périodiques à leur capture par de grosses planètes. Elle ne se rapproche de l'orbite de Jupiter qu'à 0,8, distance à laquelle les perturbations du grand axe ne peuvent pas être bien sensibles.

Les quatre comètes : Colla 1854 V, Westphal, Barnard 1889 III et Brorsen 1847 V se concilient mieux avec cette hypothèse. Elles ont respectivement des durées de révolution de 994; 61; 128 et 99 années; le K correspondant est égal à 0,30; 0,25; 0,25 et 0,21; leur distance à l'orbite de Jupiter ne dépasse pas 0,3; 0,4; 0,5 et 0,4 respectivement. La comète Olbers ($K = 0,24$, période $= 73$ ans) ne se rapproche de cette orbite qu'à 0,8, distance assez considérable.

Constatons à cette occasion le nombre relativement restreint des comètes, passant à moins de 1,0 de l'orbite de Jupiter, pour lesquelles K est compris entre 0,45 et 0,20, limite inférieure à laquelle nous nous arrêtons un peu arbitrairement. On peut invoquer plusieurs raisons pour expliquer ce fait. Voici les deux principales : 1° la plupart des comètes ne furent pas assez longtemps observées, pour qu'on puisse déterminer l'excentricité; il est donc possible que la lacune signalée ne soit pas réelle. 2° Si la probabilité est encore assez grande qu'une comète, arrivant des confins du système solaire, passe près de l'orbite de Jupiter, celle de sa rencontre avec la planète est beaucoup plus faible. En effet, aux valeurs considérées de K correspond une grande vitesse relative γ, de sorte qu'une telle comète ne cheminera que peu de temps près de l'orbite de la planète. Tout en reconnaissant le bien-fondé de cette dernière raison, nous sommes néanmoins frappé du fait qu'il n'existe que deux comètes qui ont leur K entre 0,45 et 0,31 et qu'une d'elles est la comète Méchain-Tuttle, qui reste toujours si loin de Jupiter. Ce fait méritera d'attirer l'attention des astronomes, si de futures découvertes ne viennent pas combler la lacune mentionnée.

Les comètes périodiques qui ont un mouvement rétrograde, possèdent presque toutes des durées de révolution considérables. Sur 47 astres dont la période est inférieure à 400 ans, on ne connaît que trois rétrogrades, tandis que celles-ci forment une bonne moitié des comètes d'une durée de révolution plus grande. La plupart des comètes de ce groupe n'ont pu être observées longtemps; la valeur de leur grand axe est donc assez incertaine, de sorte qu'on ne peut pas bien fixer leur plus courte distance

Digitized by Google

aux orbites des grosses planètes. La connaissance de cet élément est ici plus importante que dans le cas des comètes directes, lorsqu'on veut se faire une idée de l'importance des perturbations que les éléments ont pu subir.

D'après les équations données plus haut, les conditions que présente le mouvement rétrograde ne sont pas bien favorables à la capture d'une comète, à moins qu'elle ne passe très près de la planète. A cause du signe négatif du terme $2\frac{\sqrt{P}}{R^2}\sqrt{p}\cos i$ la valeur de K sera très souvent négative par rapport aux planètes intérieures et même à Jupiter, tandis qu'elle reste toujours faible, et plutôt positive que négative, pour Saturne, Uranus et Neptune. Lorsque K est négatif, la vitesse relative γ est au moins 1,7 fois plus grande que la vitesse héliocentrique de la planète. L'action de celle-ci ne pourra donc être très sensible que dans le cas d'une grande proximité de la comète. On arrive à une conclusion semblable pour des valeurs positives de K. Alors la première équation exige pour $\frac{1}{a} = 0$ un mouvement direct. Les perturbations ne peuvent provoquer une variation aussi considérable dans l'inclinaison que si la distance des deux astres est très faible. Il nous paraît donc que l'existence d'un grand nombre de comètes rétrogrades, même d'une longue durée de révolution, ne se concilie pas bien avec l'hypothèse de leur capture.

Considérons les trois comètes dont la période est la plus courte. La comète 1866 I ($i = 163°$, pér. $= 33^{j}$), qui est en connexion avec l'essaim des Léonides, se rapproche de la Terre à 0,007, de Saturne à 0,45 et d'Uranus à 0,4. Elle aurait été, d'après Le Verrier, capturée par Uranus. Nous trouvons comme valeurs de K à peu près 0,066 par rapport à Uranus et 0,009 par rapport à Saturne. L'action combinée des deux planètes peut facilement changer non seulement la grandeur des plus courtes distances, mais aussi les valeurs de K [1].

Rien ne s'oppose donc sérieusement à l'hypothèse qu'à l'origine le mouvement de la comète ait été presque parabolique et que celui-ci ait été de plus en plus modifié par l'une et l'autre des deux planètes.

Par contre, le cas de la comète Halley ($i = 162°$, pér. $= 76^{a}$) est absolument défavorable à l'hypothèse de la capture. Celle-ci ne se rapproche que de Jupiter à la distance 0,8, son K est égal à $-0,12$, γ^2 monte à environ 0,7. Dans ces conditions, même dans le cas le plus favorable, elle ne reste pas longtemps sous l'action de la planète, qui modifie sa durée

---

[1] K ne reste constant que dans le cas où la comète ne subit pas de fortes perturbations de la part d'une seconde planète.

Digitized by Google

de révolution tout au plus de quelques années, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre.

La comète Tuttle 1862 III ($i = 114°$, pér. $= 120^a$) à laquelle se rattache l'essaim des Perséides, se rapproche de l'orbite de la Terre à 0,005 et de celle de Saturne à 0,75. Le point de proximité est environ à 47° du périhélie de Saturne, la valeur de K est à 0,005. Supposons qu'en tenant compte des termes négligés qui ont l'excentricité de la planète pour facteur, on trouve $K = 0$; il faudrait encore toujours admettre que l'inclinaison était, au moment de la capture, d'environ 90°. On n'entrevoit pas bien comment depuis cette époque la plus courte distance à l'orbite de Saturne aurait été, à la suite des perturbations ultérieures de la planète, de plus en plus augmentée, jusqu'à atteindre sa valeur actuelle.

Les deux grandes comètes 1843 I et 1882 II qui se distinguent par une distance périhélie extrêmement petite, ne se rapprochent d'aucune grosse planète. Mais leur périodicité s'expliquerait aisément, si l'on admettait la moindre action d'un milieu résistant, action qu'on n'est pas encore autorisé à nier.

En dehors des comètes 1866 II et 1862 III, il existe encore environ une demi-douzaine de comètes dont la périodicité pourrait être attribuée à la capture par Saturne, et environ autant que l'action d'Uranus a pu jeter dans leurs orbites actuelles.

Nous laissons Neptune de côté; nous avons déjà dit que le grand axe de la plupart des comètes n'est pas assez bien connu pour qu'on puisse fixer avec une approximation suffisante leur distance à l'orbite de cette planète.

Parmi les comètes dont la périodicité serait due à l'action d'Uranus, il faut noter, en dehors de la comète 1866 I, encore trois autres astres d'une période relativement courte, savoir les comètes Coggia 1867 I, Pons-Brooks et De Vico 1846 IV qui ont respectivement des périodes de 40, 72 et 76 années. La plus courte distance à l'orbite de la planète n'est exactement connue que pour la comète Pons-Brooks. Celle-ci, qui a une inclinaison de 74°, ne peut se rapprocher d'Uranus à moins de 1,2. Il est douteux que la planète puisse, à une telle distance, produire une profonde modification de l'orbite de la comète. En effet, malgré leur lent mouvement héliocentrique, les deux astres ne cheminent jamais longtemps côte à côte, étant donnée la grandeur de leur vitesse relative.

Chose remarquable : en dehors des comètes 1866 I et 1862 III, la comète Thatcher 1861 I ($i = 80°$, pér. $= 415^a$, distance à l'orbite terrestre $= 0,002$) qui a donné naissance à l'essaim des Lyrides, devrait également être rattachée à Saturne, dont elle peut se rapprocher jusqu'à 0,3. Ainsi, sur nos quatre essaims périodiques d'étoiles filantes nous en devrions trois à l'action de cette planète lointaine! Il serait vraiment extraordinaire si c'était Saturne qui a jeté les comètes géné-

Digitized by Google

ratrices de ces trois essaims dans des trajectoires qui coupent presque exactement la route de notre Terre. Combien il paraît plus simple de chercher leur origine près de l'orbite terrestre même et d'attribuer tout bonnement au hasard le fait qu'elles se rapprochent plus ou moins de l'orbite de Saturne, voire de celle d'Uranus!

Nous sommes ainsi amené à considérer le cas des innombrables essaims d'étoiles filantes qui sillonnent de toutes parts la route de notre Terre. Chacun de ces essaims représente une sorte de petite comète. Comme leurs orbites sont les plus diverses, ces petits corps doivent, dans l'hypothèse de M. Schiaparelli aussi bien que dans celle de Laplace, arriver des points les plus différents de l'espace. Même au point de vue de M. Schiaparelli il faudrait admettre un nombre inconcevable d'amas de corpuscules, marchant dans toutes les directions, pour expliquer le fait que tant d'essaims puissent croiser l'orbite terrestre. Cette difficulté préoccupe depuis longtemps les astronomes. Parmi ceux qui tiennent à conserver l'hypothèse de M. Schiaparelli, même pour les étoiles filantes, M. Brédikhine émet une hypothèse qui, si elle se confirme, est propre à diminuer sensiblement cette difficulté et à rendre compte, dans une certaine mesure, du nombre étonnant des essaims connus. Il suppose que les comètes, surtout celles dont la distance périhélie est inférieure à 1, projettent, vers l'époque de leur passage au périhélie, sous l'action de la force répulsive du Soleil, des matières dans des directions qui forment des angles assez grands avec le rayon vecteur. Une seule comète peut ainsi, par ses émissions nucléaires successives, donner naissance à plusieurs amas de corpuscules. Comme ces émissions ont lieu pour la plupart à l'intérieur d'une sphère dont le rayon est égal à 1, et comme le nombre des comètes qui peuvent les produire est très considérable, cette hypothèse explique assez bien comment d'aussi nombreux essaims croisent notre route.

D'autres astronomes déclarent nettement que l'hypothèse de M. Schiaparelli ne peut s'appliquer aux étoiles filantes et aux aérolithes. M. Faye, notamment, dit aux sujet de ces derniers (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 1703) que « leur forme fragmentaire, leur petitesse constante, leur identité de constitution chimique et minéralogique avec les masses profondes de la Terre et l'extrême fréquence de leur chute sont absolument incompatibles avec une provenance étrangère à notre système solaire. » A son avis, l'hypothèse de Lagrange que nous allons exposer rend bien mieux compte de toutes ces circonstances. M. Tisserand partageait l'opinion de M. Faye au sujet de l'origine des étoiles filantes et des aérolithes.

18. Olbers, ayant remarqué que les orbites de Cérès et de Pallas ont un point d'intersection commun, émit l'opinion que ces astres seraient des

Digitized by Google

fragments d'une ancienne planète, située entre Mars et Jupiter, qui aurait été détruite par une explosion.

Lorsque Harding et Olbers découvrirent, à la suite de recherches systématiques, deux nouvelles planètes dans la région du ciel où se trouve le point de rencontre de Cérès et de Pallas, les vues d'Olbers parurent avoir trouvé une confirmation éclatante. Ce sont elles qui suggérèrent à Lagrange l'hypothèse d'après laquelle les comètes proviendraient d'explosions violentes sur les planètes, explosions qui se seraient produites à l'origine à diverses reprises et auraient projeté dans les espaces des matériaux cométaires. Ces explosions auraient été provoquées par « l'action du calorique que le passage de l'état aériforme à l'état solide aura concentré dans leur intérieur. » Lagrange était de l'avis que cette hypothèse était plus conforme à la théorie de Laplace concernant la formation du système solaire que la supposition de l'origine étrangère des comètes.

Mais cette hypothèse exige impérieusement que toutes les comètes passent, ou puissent avoir passé à un moment donné, dans le voisinage de l'orbite d'une grosse planète. Or, il existe un assez grand nombre de comètes qui ne satisfont pas à cette condition. Aussi M. Faye, et après lui M. Tisserand, déclarent-ils inacceptable l'hypothèse de Lagrange au sujet des comètes.

Lagrange a développé sa théorie dans les *Additions à la Connaissance des Temps pour* 1814. M. Tisserand en a donné un exposé lumineux (*Bull. Astr.*, t. VII, p. 452), duquel nous extrayons les formules données ci-après.

Soient u la vitesse d'impulsion qu'a reçue la planète, α, β, $\varkappa$ les angles que u forme avec le prolongement du rayon vecteur R, avec la perpendiculaire à R dans le plan de l'orbite primitive, et avec la normale au plan de cette orbite. Désignons encore par a, p, et i le demi grand axe, le paramètre et l'inclinaison de la nouvelle orbite après le choc. En supposant, pour simplifier, que l'orbite primitive est circulaire, on a :

$$u = \sqrt{\frac{3}{R} - \frac{1}{a} - \frac{2\sqrt{p}}{R^{\frac{3}{2}}}\cos i}, \tag{4}$$

$$u\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{R} - \frac{1}{a} - \frac{p}{R^2}}, \tag{5}$$

$$u\cos\beta = \frac{\sqrt{p}}{R}\cos i - \frac{1}{\sqrt{R}}, \tag{6}$$

$$u\cos\varkappa = \frac{\sqrt{p}\sin i}{R}. \tag{7}$$

Digitized by Google

On remarquera que u est analogue à la quantité γ dans les équations (2) et (3).

M. Tisserand examine plus particulièrement le cas des aérolithes. En leur supposant des orbites paraboliques, il donne d'après le P. Carbonnelle, pour différentes valeurs de la distance périhélie entre 1,0 et 0,25 et pour différentes inclinaisons entre 0° et 180°, les valeurs correspondantes de la vitesse d'impulsion, qui vont, pour $i = 0°$, de $12^{km},4$ par seconde à $37^{km},8$, et, pour $i = 180°$, de $72^{km},4$ à $63^{km},4$. Il conclut que la distribution des distances périhélie et des inclinaisons dans les orbites de 116 bolides, calculées par M. Newton, s'accorde assez bien avec l'hypothèse de l'éjection, mais que celle-ci ne peut rendre compte des quelques orbites hyperboliques qu'on a déterminées avec certitude.

Quant aux comètes, M. Tisserand ne croit pas que cette hypothèse puisse expliquer les particularités de leurs orbites. Il considère principalement les comètes qui ne se rapprochent d'aucune planète connue. A cause de celles-ci il faudrait supposer l'existence d'une ou de plusieurs planètes lointaines : pour une valeur considérable de R les termes en $\frac{\sqrt{p}}{R}$ deviennent faibles; la vitesse d'impulsion devrait donc être à peu près égale à $\sqrt{\frac{3}{R}}$ $\left(\text{celle de la planète est } \frac{1}{\sqrt{R}}\right)$, se trouver presque dans le plan de l'orbite primitive et former avec R un angle voisin de 35°. M. Tisserand conclut ainsi : « Ces conditions très restrictives rendent l'hypothèse tout à fait improbable ».

A notre avis l'hypothèse de Lagrange mérite encore, après certaines modifications, d'être prise en considération sérieuse. Lorsqu'on accepte les vues de Laplace, on ne peut pas s'empêcher de penser que la formation de chaque planète a dû être accompagnée d'explosions, d'une violence extrême, qui ont projeté des matières dans toutes les directions. Mais on peut aller plus loin et dire que de telles explosions ont dû également avoir lieu en tout temps dans l'énorme globe gazeux qu'a formé le Soleil, et plus particulièrement vers les époques auxquelles les planètes se détachèrent de ce globe. Ne pourrait-on pas admettre que certaines comètes proviennent d'explosions sur les planètes, et d'autres de matières projetées par le Soleil lui-même? C'était l'opinion de M. Proctor, qui admit même un troisième groupe de comètes, dues à des explosions sur des étoiles autres que le Soleil. C'est en partie l'avis de M. Schaeberle qui a établi tout récemment (*Astr. Journ.*, t. XIII, p. 151) une théorie d'après laquelle toutes les comètes auraient été projetées par le Soleil [1].

---

[1] M. Schaeberle y rappelle les prodigieuses hauteurs qu'atteignent certaines protubérances.

Digitized by Google

L'objection signalée qu'ont élevée MM. Faye et Tisserand, ne subsiste plus, dès qu'il s'agit d'anneaux détachés ou du corps du Soleil lui-même : il n'y a plus rien d'étonnant, si certaines comètes passent loin des orbites des planètes.

L'hypothèse de Lagrange ainsi modifiée présente encore d'autres avantages : elle fait très bien comprendre pourquoi les comètes périodiques sont rares et semblent être presque exclusivement dues à la capture par une planète. En attribuant à la vitesse d'impulsion toutes les valeurs possibles jusqu'à une certaine limite supérieure, on voit immédiatement par la relation (4) que des vitesses relativement faibles ont produit des orbites elliptiques. Comme les distances périhélies sont nécessairement égales ou inférieures à R, les corps projetés sont retombés sur le Soleil, après avoir parcouru une certaine partie de leur orbite. Seules les comètes dont la durée de révolution était énorme, sont revenues à leur périhélie à une époque où le corps du Soleil ne s'étendait plus jusqu'à ce périhélie. On peut même admettre qu'à l'époque de leur premier retour certaines comètes avaient rencontré près de leur périhélie des matières projetées récemment, qui opposèrent une résistance considérable à leur mouvement et contribuèrent ainsi à diminuer sensiblement leurs périodes. Ce serait notamment le cas des comètes périodiques, citées précédemment, pour lesquelles on ne peut invoquer que malaisément l'hypothèse de la capture par une planète (il est évident que ceux qui veulent maintenir l'hypothèse de M. Schiaparelli peuvent également recourir à quelque supposition analogue).

Nous avons mentionné plus haut la distribution très inégale des points de proximité des comètes périodiques qui se rattachent à Jupiter. On a constaté un fait analogue dans la distribution des points radiants des essaims qui sont particulièrement nombreux dans le mois d'août. Rien ne s'oppose à l'hypothèse que certaines parties des anneaux qui dans la suite devaient former ces planètes étaient soumises à des actions éruptives plus fortes et plus fréquentes. Si certains jets de matière ont eu une longue durée, on comprend bien l'énorme étendue de plusieurs essaims, notamment de celui des Perséides, ou de l'anneau de corpuscules hypothétique à l'action duquel M. Backlund attribue l'accélération de la comète Encke. L'hypothèse de la dissémination de corpuscules le long de leur orbite, par suite de la désagrégation d'une comète, ne fournit pas une explication aussi simple de ce fait.

Lorsqu'on admet que des explosions n'avaient pas lieu exclusivement sur les planètes, mais aussi dans les anneaux détachés du globe solaire, on comprend mieux comment des essaims aussi nombreux croisent tous les points de l'orbite terrestre. Il nous paraît même qu'on parviendrait

Digitized by Google

ainsi à se rendre compte du fait énigmatique que certains points radiants se manifestent pendant des mois.

Deux graves objections s'élèvent contre l'hypothèse si séduisante de Lagrange ainsi modifiée. Une première est que celle-ci doit recourir à des vitesses énormes d'impulsion. Ainsi, par exemple, la comète 1866 I (essaim des Léonides) aurait dû se détacher de la Terre avec une vitesse de près de 80^{km} par seconde, et même la comète 1861 I (essaim des Lyrides) exige encore une vitesse de 55^{km}. C'est cette objection qui nous frappe le plus. Certes, on pourrait admettre que les comètes de mouvement rétrograde dont la distance périhélie est inférieure à 1,0, doivent leur origine à des explosions de planètes plus éloignées et non à la Terre. Mais alors il faudrait attribuer au pur hasard le fait que les orbites des comètes-mères de nos trois essaims périodiques les plus remarquables coupent exactement la route de notre Terre. Ce hasard serait ici beaucoup moins difficile à admettre que dans l'hypothèse de M. Schiaparelli, mais on ne pourrait se résigner à l'accepter que s'il n'existait que peu d'essaims rétrogrades. Il n'en est pas ainsi : les essaims rétrogrades sont aussi nombreux que les essaims directs; la formation de tous ces essaims exige de grandes vitesses d'impulsion.

Une seconde objection contre cette hypothèse est fournie par le fait bien constaté que les comètes périodiques se divisent et se désagrègent facilement et qu'au moins deux d'entre elles se sont évanouies en moins de cent ans. Il est impossible d'expliquer comment des comètes périodiques peuvent, peut-être depuis des millions d'années, circuler dans notre système solaire, si leur existence est aussi précaire que celle des comètes Biéla et Brorsen. On peut encore comprendre le cas des comètes d'une très longue durée de révolution qui ne sont que rarement exposées à l'action dissolvante du Soleil et des planètes. Toutes les comètes périodiques se sont trouvées dans cette situation avant leur capture par une planète. On peut donc affirmer que l'hypothèse de Schiaparelli rencontre juste la même difficulté que celle de Lagrange. Nous avons déjà mentionné que certaines comètes périodiques doivent, depuis un intervalle de temps énorme, appartenir à notre système solaire. Des calculs approchés nous ont montré, en particulier, que la capture de la comète Brorsen remonte, dans le cas le plus favorable, à des milliers d'années. Et cette comète a disparu après trente années d'observations!

Pour comprendre ce mystère, on est forcé de choisir entre deux hypothèses également arbitraires. On peut admettre en premier lieu que la capture d'aucune comète ne remonte dans un passé lointain. Les quelques comètes pour lesquelles les particularités de leurs orbites semblent exiger une longue existence dans notre système solaire, y auraient subi, à un instant donné, à la suite de quelque accident que nous ignorons, une

Digitized by Google

profonde modification de leur mouvement : peut-être ont-elles rencontré un corps inconnu ou ont-elles fait explosion.

On peut encore faire cette autre supposition au sujet des comètes périodiques : Pendant que les unes se désagrègent plus ou moins rapidement, d'autres se formeraient parmi les innombrables corpuscules qui circulent dans des orbites elliptiques autour du Soleil. Cette reconstitution serait due à des forces électriques et magnétiques ayant leur siège dans les corpuscules mêmes. Si les comètes possèdent, ce qui est assez probable, un noyau indestructible, celui-ci servirait comme centre d'attraction, autour duquel se grouperaient les corpuscules rencontrés. Cette hypothèse très séduisante a été, plus ou moins vaguement, formulée par divers astronomes, et encore tout récemment par M. Herz (*Handwörterbuch der Astronomie*, livraison 9, p. 223 et 225).

C'est donc seulement à la matière première des comètes actuelles, qui a été à l'origine, à la suite de la capture de comètes presque paraboliques, incorporée au système solaire, qu'on doit attribuer une longue existence. Chacune de ces comètes s'est, tôt ou tard, désagrégée; les débris se sont de plus en plus disséminés le long d'orbites elliptiques très peu différentes; de temps en temps ces corpuscules forment de nouvelles agglomérations passagères qui sont nos comètes périodiques, destinées à se dissoudre à leur tour. Ce mode de formation est même indiqué par l'aspect granulé de ces comètes qui est, selon M. Barnard, un indice presque certain, d'après lequel il saurait prédire, même avant le calcul de l'orbite, que la comète est périodique.

Si le mode indiqué de la formation des comètes périodiques est conforme à la réalité, on comprend mieux comment il existe tant de comètes qui ont un même point de proximité, et pour lesquelles la constante de M. Tisserand est identique. Tant qu'on suppose simplement que celles-ci sont des débris d'une ancienne comète, on est forcé d'admettre un espace de temps énorme, pour que les perturbations aient pu modifier leurs orbites dans une mesure aussi considérable. Il n'en est plus de même dans la nouvelle hypothèse. Les corpuscules qui proviennent de la lente désagrégation d'une comète capturée dans un passé fort lointain, et qui tout en gardant un point de proximité commun, ont été avec le temps disséminés dans les orbites les plus diverses, peuvent s'être groupés de nouveau en plusieurs amas distincts.

Cette hypothèse rend fort probable l'existence d'anomalies dans le mouvement des comètes périodiques. Or, on sait déjà que de telles anomalies ne semblent pas être très rares. Nous avons mentionné l'accélération du mouvement des comètes Encke, Biéla et Tempel 1873 II, et le ralentissement de celui de la comète Brorsen. Il est probable qu'avec le temps on constatera encore d'autres cas analogues.

Digitized by Google

On ne peut savoir si l'action combinée du Soleil et des planètes suffit ou non à l'explication du mouvement d'une comète tant qu'on n'a pas relié les observations d'au moins trois apparitions. On connaît actuellement quatorze comètes qui ont été observées dans plus de deux apparitions. Pour six d'entre elles on ne possède pas une théorie qui relie trois apparitions. On ne peut citer que les trois comètes Faye, Winnecke et Méchain-Tuttle, dont les théories n'indiquent aucune anomalie dans leurs mouvements, contre quatre où de telles anomalies existent certainement (la comète Wolf, retrouvée tout récemment dans sa troisième apparition, paraît avoir une marche absolument conforme à la théorie). La décision de cette question n'exigerait un travail énorme que pour la comète De Vico-E. Swift. Pour les cinq autres comètes on a déjà déterminé au moins les perturbations de Jupiter; pour quelques-unes les calculs sont même plus avancés. On n'aurait donc pas trop de difficulté pour arriver promptement, à la suite d'une recherche provisoire, à une réponse décisive.

19. Tous les calculateurs savent quel énorme travail exige la théorie rigoureuse d'une comète de courte période. Il faut calculer les perturbations de toutes les planètes, sauf Neptune (les perturbations de Mercure lui-même ne sont pas négligeables; pour la comète 1873 II dont la distance périhélie est de 1,35, elles montent dans la longitude à 3″ au bout d'une révolution). Le calcul est particulièrement fastidieux pour les planètes intérieures. En adoptant, par exemple, pour Vénus et la Terre un intervalle de 20 jours, on a déjà une marche un peu irrégulière. Dans leurs théories des comètes Encke et Winnecke, MM. Backlund et von Haerdtl ont calculé les perturbations de ces planètes pour la révolution entière de la comète; ils n'ont employé la méthode très rapide de la réduction au centre de gravité : Soleil-planète (☉ — pl.) que pour Mercure seul. Dans nos calculs sur la comète 1873 II nous suivons le même procédé. Mais nous croyons qu'on peut employer pour Vénus et la Terre la même méthode que pour Mercure, tant qu'on n'exige pas une exactitude extrême. Il faut seulement prendre une précaution que nous indiquerons ultérieurement.

Lorsque des planètes, Mercure et Vénus par exemple, restent constamment éloignées de la comète à une distance supérieure à leur rayon vecteur, il est très avantageux de réduire les éléments héliocentriques de la comète, une fois pour toutes, au centre de gravité : ☉ + ☿ + ♀ et de calculer leurs perturbations par rapport à ce centre de gravité (les formules nécessaires donnent exactement le même travail que dans la méthode ordinaire). Pour obtenir ensuite les positions géocentriques rigoureuses de la comète, il suffit de rapporter également les coordonnées équatoriales du Soleil au centre de gravité : ☉ + ☿ + ♀.

Digitized by Google

Les perturbations d'une planète par rapport au centre de gravité de ☉ + pl. sont toujours plus faibles que par rapport au Soleil, mais la marche des différences est moins régulière. Cela provient de ce que, dans cette méthode, il y a à peu près deux fois plus de changements de signe que dans la méthode ordinaire. Cet inconvénient n'entre pas en ligne de compte avec les avantages que présente la méthode; on peut d'ailleurs l'affaiblir sensiblement, en combinant d'une manière convenable les incréments des perturbations.

Prenons comme point de départ le milieu entre deux intervalles qui correspond à peu près à la plus courte distance entre la comète et la planète.

Désignons par : $f_{-n}, f_{-n+1}, \ldots, f_{-1}$ les valeurs de la fonction avant le point de départ, et par $f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n$ celles qui correspondent aux intervalles ultérieurs. Alors la marche des différences dans la série

$$f_{-1}+f_1=F_1, \qquad \ldots, \qquad f_{-n}+f_n=F_n$$

est beaucoup plus régulière que dans la série originale. Un premier avantage de cet arrangement consiste en ce qu'on reconnaît facilement toute erreur commise dans son calcul. Si la marche des différences de la nouvelle série est suffisamment bonne, on saura que la somme totale des f, égale à celle des F, donne un résultat exact, et qu'on n'a pas besoin de calculer les valeurs intermédiaires, en doublant les intervalles.

Supposons, en effet, qu'on ait directement calculé les valeurs intermédiaires $f_{-n+\frac{1}{2}}, \ldots, f_{\frac{1}{2}}, \ldots, f_{n+\frac{1}{2}}$, alors on aurait, en employant pour les premières sommes la notation 'F du Traité d'Oppolzer

$$\begin{aligned}\Sigma\left[f_{-n}+f_{-n+\frac{1}{2}}+\ldots+f_{n-\frac{1}{2}}+f_n\right]&=\Sigma\left[F_1+F_{\frac{3}{2}}+\ldots+F_{n-\frac{1}{2}}+F_n\right]\\&=2\left[{}'F_{n+\frac{1}{2}}-{}'F_{\frac{1}{2}}\right]-\left[{}'F_1-{}'F_{\frac{1}{2}}\right]-\left[{}'F_{n+\frac{1}{2}}-{}'F_n\right].\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, la marche des F est assez régulière; les premières sommes 'F répondront donc aux exigences de la méthode des quadratures mécaniques et l'on pourra se passer du calcul direct des 'F intermédiaires.

Il sera bon de donner un exemple : La distance entre Vénus et la comète 1873 II est descendue le 19 décembre 1883 à 0,669. Nous avons néanmoins continué le calcul par rapport au centre de gravité : ☉ + ♀. Aussi la marche des différences laisse-t-elle beaucoup à désirer, même de 10 jours en 10 jours. Nous mettons ici en regard la marche, de 20 jours en 20 jours, des huitièmes et neuvièmes différences des valeurs de la variation de $20^2 \frac{d\mu}{dt}$, exprimées en dix-millièmes de secondes d'arc.

Digitized by Google

VIII.	IX.	VIII.	IX.
+ 13	— 83	+78	—122
— 70	+ 111	—44	+ 32
+ 41	+ 1186	—12	+ 14
+1227	— 4032	+ 2	— 5
—2805	+ 3087	— 3	+ 9
+ 282	+ 5496	+ 6	+ 4
+5778	—13413	+10	— 36
—7635	+11117	—26	
+3482	— 3309		
+ 173	— 699		
— 526	+ 562		
+ 36	— 9		
+ 27			

Après avoir formé la série des F, on voit immédiatement combien parmi les termes intermédiaires $F_{\frac{3}{2}}$, etc. ne se laisseraient pas déterminer assez exactement par interpolation; ce seront ceux-ci seuls qu'on calculera directement.

On peut naturellement employer le même procédé, dans le cas d'une planète intérieure, lorsque les calculs se rapportent au centre du Soleil. Ajoutons que plus loin du périhélie on obtient encore d'une autre manière une marche plus régulière des différences; on n'a qu'à combiner, deux à deux, les incréments qui correspondent à des élongations distantes d'environ 180°.

Dans le cas des planètes extérieures on peut faire usage du premier procédé aussi bien près de l'époque du périhélie que vers l'époque de la plus courte distance. On sait que la marche des différences est très forte et très irrégulière dans ces parties des perturbations. Mais en combinant de la manière indiquée les incréments, on obtiendra presque toujours une marche satisfaisante, lorsqu'on aura choisi des intervalles un peu trop grands. En même temps on sera ainsi tranquillisé sur la légitimité de l'emploi de la méthode des quadratures mécaniques.

A notre avis cette preuve est de beaucoup préférable à celle que recommande Encke (*Berl. Jahrb.*, 1838, p. 270), preuve dont s'est servi M. Gautier dans ses calculs sur la comète 1867 II. D'après Encke l'intégration peut être regardée comme exacte, lorsqu'elle s'accorde suffisamment avec le résultat qu'on obtient en intégrant les incréments, pris de deux en deux intervalles. C'est incontestable; mais comme cette dernière intégration est, dans tous les cas, peu exacte, on ne saurait pas si les écarts plus ou moins grands doivent exclusivement lui être attribués ou s'ils proviennent en partie de l'insuffisance de l'intégration originale.

Considérons maintenant le cas où l'on aurait réduit les éléments de la

Digitized by Google

comète au centre de gravité du Soleil et d'une planète intérieure, et qu'on voudrait négliger les faibles perturbations de cette dernière, sans commettre une erreur trop sensible. Une telle erreur n'est redoutable que dans le mouvement diurne μ, vu qu'elle produit dans l'anomalie moyenne une erreur proportionnelle au temps.

On peut imaginer qu'on ait cessé le calcul des perturbations juste à l'instant où la somme des incréments de μ ait atteint un maximum et qu'on le recommence au moment d'un minimum, ou inversement. On aura alors naturellement commis une erreur très sensible, si l'on néglige les perturbations subies dans l'intervalle. Il n'en est plus ainsi, lorsqu'on finit et recommence le calcul, à peu près à la même distance de l'aphélie, soit au moment d'un maximum, soit à celui d'un minimum.

Nous choisissons comme exemple les perturbations que la comète 1873 II a subies, entre 1879 et 1883 de la part de la Terre, et nous mettons en regard les valeurs maxima et minima de $\Delta\mu$ en 20000 jours.

Maxima.		Minima.	
1879. Juill. 13....	+501",02	1879. Oct. 1....	+498",56
1880. Janv. 29....	+501,39	1880. Mars 29....	+500,54
1880. Juill. 27....	+501,33	1880. Oct. 15....	+500,97
1881. Janv. 23....	+501,48	1881. Avr. 13....	+501,08
1881. Juill. 22....	+501,11	1881. Oct. 30....	+500,98
1882. Janv. 18....	+501,45	1882. Avr. 28....	+500,33
1882. Juill. 17....	+501,13	1882. Déc. 4....	+498,53
1883. Févr. 22....	+503,45		

Le passage à l'aphélie a eu lieu vers le milieu d'avril 1881. On voit qu'on ne commettrait, en 20000 jours, qu'une erreur de 2",4, si l'on adoptait, à la date de 1883 février 22, la même valeur de $\Delta\mu$ que pour 1879 juillet 13. Les deux valeurs minima extrêmes qui sont symétriquement placées par rapport à l'époque de l'aphélie, sont par hasard même absolument identiques. Il est certain que l'erreur à craindre est la plus faible, si l'on suppose que la moyenne du maximum et du minimum est la même à deux époques qui sont à peu près également distantes de l'époque de l'aphélie. Dans notre exemple on trouve pour cette moyenne : 499",79 à la date du 22 août 1879 et 500",99 pour le 13 janvier 1883; l'erreur en 20000 jours n'est donc que de 1",2. Nos calculs pour Vénus donnent, dans cette même supposition, un résultat encore plus favorable. Nous aurions donc pu négliger, pendant presque trois années, les perturbations de Vénus et de la Terre, sans commettre une erreur qui atteint 1" au bout de 10000 jours.

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

HYDRODYNAMISCHE UNTERSUCHUNGEN MIT ANWENDUNGEN AUF DIE THEORIE DER SONNENROTATION. Thèse présentée à l'Université de Berlin par M. Wilczynski.

M. Wilczynski étudie les applications des équations de l'Hydrodynamique à une hypothèse simple; il suppose que chaque molécule liquide décrit une circonférence dont le centre est sur une certaine droite que l'on peut appeler l'*axe de rotation* et dont le plan est perpendiculaire à cet axe. La vitesse angulaire des diverses molécules n'est d'ailleurs pas la même.

On démontre aisément que, pour qu'un pareil mouvement soit possible dans un liquide homogène et sans frottement, il faut que cette vitesse angulaire ne dépende que de la distance à l'axe.

M. Wilczynski a démontré que ce théorème est encore vrai dans un fluide hétérogène et visqueux, pourvu que les surfaces d'égale pression coïncident avec les surfaces d'égale densité.

Tel serait le cas d'un gaz, chimiquement homogène et de température uniforme.

L'auteur démontre encore que, dans un pareil gaz, le mouvement circulaire n'est possible que dans deux cas : 1° si les surfaces d'égale densité sont des cylindres de révolution; 2° si toute la masse tourne comme un corps solide.

M. Wilczynski s'occupe ensuite du cas où les surfaces d'égale pression et les surfaces d'égale densité diffèrent très peu d'une sphère et diffèrent moins encore les unes des autres; la première différence étant regardée comme un infiniment petit du premier ordre et la seconde comme un infiniment petit du second ordre. Il discute les objections de M. Harzer contre la légitimité de ces hypothèses. Nous ne pouvons entrer ici dans le détail de cette discussion.

La partie de cette thèse qui est intéressante pour l'Astronomie est l'application de cette théorie à la rotation du Soleil.

Partant de la formule qui donne la rotation en fonction de la latitude et admettant que la densité varie en raison inverse du carré de la distance au centre, l'auteur trouve pour l'aplatissement $\frac{1}{10^5}$, valeur absolument insensible.

L'auteur discute l'hypothèse de Wilsing d'après laquelle l'atmosphère solaire recouvrirait un noyau solide sphérique. Comme la vitesse angu-

Digitized by Google

laire ne dépend que de la distance à l'axe, comme cette vitesse doit être la même pour les couches inférieures de l'atmosphère, et la masse solide à laquelle elles adhèrent, la vitesse angulaire devrait être uniforme dans toute la partie de l'atmosphère qui est à l'intérieur du cylindre circonscrit au noyau et ne pourrait varier qu'à l'extérieur de ce cylindre.

Dans son dernier Chapitre, M. Wilczynski cherche à évaluer l'influence du frottement. En combien de temps ce frottement amènera-t-il la rotation solaire à être uniforme?

Admettant le coefficient de frottement mesuré par Meyer (pour l'hydrogène), l'auteur arrive à la conclusion suivante : Pour que le mouvement diurne d'un point de la surface solaire varie de deux minutes d'arc il faudra au moins 27 millions d'années.

M. Wilczynski applique sa théorie, peut-être avec un peu trop de confiance, à la détermination du niveau des différentes couches solaires. Si, en effet, la vitesse de rotation est fonction de la distance à l'axe, l'observation de cette vitesse peut nous renseigner sur la distance d'un point du Soleil à l'axe, et par conséquent sur la différence de niveau de deux points qui se projettent pour nous en un même point du disque.

Il conclut que les taches sont situées au-dessous des facules; mais, ce qui semblera plus étrange, au-dessus du reversing-layer. La différence de niveau taches — facules serait 0,05, et la différence taches — reversing-layer serait 0,09 en prenant le rayon pour unité; ces différences atteindraient donc un dixième et un vingtième du rayon solaire (!!)

CORRESPONDANCE.

LETTRE DE M. SIMONIN.

Dans le numéro de mai dernier du *Bulletin astronomique*, p. 197, qui contient l'analyse d'une Note que vous avez bien voulu présenter l'an dernier aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXIV, p. 1423, je lis que l'hypothèse admise par moi *est en contradiction avec tout ce que l'on* sait *sur la constitution du Soleil.*

Cette critique ne me paraît pas exacte; c'est pourquoi je me permets de vous adresser ces quelques mots de rectification.

Digitized by Google

L'hypothèse qui m'a servi de point de départ est extraite du Tome II du *Soleil* du P. Secchi, p. 219 et 222.

On lit (p. 219) : « Il est remarquable que les phases des diamètres sembleraient avoir une correspondance avec les inégalités du périgée solaire, découvertes par M. Le Verrier. Serait-ce là un effet de *l'excentricité du centre de gravité du Soleil par rapport au centre de figure?* En cette matière, on ne peut poser que des questions dont la solution est réservée à la postérité.... »

Dans le même Ouvrage (p. 31), on lit aussi que la chromosphère n'a *pas partout et toujours la même épaisseur.*

Après de longues réflexions, j'ai été encouragé à vous adresser ma Note par la lecture de cette conclusion d'un Mémoire de M. Dunér :

« Je dois avouer que cette différence entre le temps de rotation dans les différentes latitudes me semble incompréhensible et constitue un des problèmes les plus difficiles de l'Astrophysique, d'autant plus que les recherches sur la rotation du Soleil, faites à l'aide des mesures sur les facules, semblent contredire ce ralentissement. »

DUNÉR, *Recherches sur la rotation du Soleil* (*Société royale des Sciences d'Upsal*, 1891).

La surface solaire m'a donc paru pleine d'énigmes; aussi me suis-je cru autorisé à me servir d'une nouvelle hypothèse pour expliquer le mouvement du périhélie de Mercure. Les calculs de ma Note mènent à cette conclusion.

Tout se passe comme si les planètes causaient des marées sur la surface gazeuse du Soleil, de même que la Lune cause des marées sur la surface des mers de notre planète.

Cette conclusion est en tout point conforme à ce que vous dites de l'attraction des planètes sur le Soleil dans votre Notice sur la stabilité du Système solaire (*Ann. du Bur. des Long.*, 1898, p. B.14).

Que l'on considère ou non cette explication comme une simple interprétation des calculs, qu'on voie là une action de la gravitation, une action électrique ou magnétique, on peut toutefois se demander si elle conduit, pour une autre planète que Mercure, à un mouvement anormal du périhélie.

Digitized by Google

Si l'on admet que, comme cela se passe pour les marées, le rayon du cercle décrit par le centre de gravité du Soleil autour du centre de figure est proportionnel à $\frac{m}{r^3}$ (m, masse de la planète troublante; r, sa distance au Soleil), on a, pour la somme approchée des variations séculaires des périhélies et des nœuds ☊ des diverses grosses planètes, le Tableau suivant, où j'admets pour Mercure les variations données par M. Newcomb (*Comptes rendus*, t. CXIX, p. 984) :

Planètes.	$\delta\varpi + \delta☊$ d'après M. Newcomb.	$\delta\varpi + \delta☊$ d'après l'hypothèse Serchl.
Mercure	46″ ± 6″	46″ ± 6″
Vénus	−2 ± 30	19 ± 6
Terre	5 ± 7	4 ± 1
Mars	9 ± 10	0,1 ± 0,0
Jupiter	»	0,1 ± 0,0
Saturne	»	0,001

L'hypothèse actuelle ne semble donc conduire à aucune contradiction et elle explique la variation séculaire du périhélie de Mercure, qui n'a pu jusqu'alors être encore expliquée.

Il est bien évident que ces calculs ne sont qu'approchés; j'y ai d'ailleurs négligé les variations de l'excentricité et de l'inclinaison.

Si l'on considère que la période de onze ans, constatée dans certaines études sur le diamètre solaire, concorde avec le temps de révolution de Jupiter, que les conjonctions de Mercure et de Vénus se succèdent tous les quatre et tous les dix mois, et, par suite, que les actions respectives de Mercure, Vénus et Terre peuvent introduire des variations analogues ou plutôt inférieures à celles qu'on attribue aux erreurs d'observations dues aux saisons terrestres, il me paraît grave de condamner, *a priori*, une hypothèse qui rend mieux compte du mouvement du périhélie de Mercure que celles qui ont été proposées jusqu'alors.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE DANS LE CAS DES EXCENTRICITÉS NULLES;

PAR M. ADRIEN FÉRAUD.

M. Poincaré [1] a étudié, dans un des derniers numéros de ce *Bulletin,* les propriétés des coefficients du développement suivant les cosinus des multiples de l et de l' de l'expression

$$[a^2 + a'^2 - 2aa'(\cos l \cos l' + \sin l \sin l' \cos J)]^s,$$

où s est la moitié d'un nombre impair négatif.

Dans son Mémoire *Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable* (*Annales de l'Observatoire de Paris;* t. XV, C. 40), Tisserand, envisageant les coefficients du développement de

$$[a^2 + a'^2 - 2aa'(\mu \cos u + \nu \cos u')]^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les cosinus des multiples de u et de u', a montré qu'ils peuvent tous être calculés par voie récurrente au moyen de quatre d'entre eux. Au sens de M. Poincaré, quatre au plus de ces coefficients sont donc des transcendantes distinctes.

On montrerait, en employant un procédé de généralisation analogue à celui de M. Poincaré, que les coefficients du développement de

$$[a^2 + a'^2 - 2aa'(\mu \cos u + \nu \cos u')]^s$$

et les dérivées partielles de tous ces coefficients par rapport à a, a', μ et ν n'introduisent pas de nouvelles transcendantes distinctes.

Un rapprochement facile entre les développements des deux

---

[1] Le théorème qui est démontré dans ce travail a été énoncé par M. Poincaré, dans une Note insérée dans le numéro de février et dont M. Féraud n'avait pu avoir connaissance. Nous croyons néanmoins devoir publier le travail de M. Féraud où la démonstration est donnée avec tous ses développements.

Digitized by Google

expressions de la fonction perturbatrice envisagées par Tisserand et par M. Poincaré montrerait alors que, parmi les transcendantes A de M. Poincaré, il y en a au plus quatre qui sont distinctes.

Mais il m'a paru qu'il y avait quelque intérêt à établir cette propriété des transcendantes A en revenant sur l'analyse de M. Poincaré. C'est ce que je me propose de faire dans cette Note.

Je conserverai, dans la suite, les notations de M. Poincaré y compris le numérotage des équations auxquelles je renverrai.

Remarquons que le polynome F présente une troisième symétrie :

Il ne change pas quand on change x en $-x$ et y en $-y$.

Il en résulte que le développement de F^s suivant les puissances de x et de y ne doit pas changer dans les mêmes conditions; ce développement ne doit donc contenir que les seuls termes $x^\alpha y^\beta$ pour lesquels $\alpha+\beta$ est pair, et les seules transcendantes A qui ne sont pas nulles sont celles pour lesquelles α et β sont de la même parité.

Il suffira donc d'envisager, parmi les polynomes H symétriques, ceux qui ne contiennent que des termes pairs et qui, par suite, présentent la troisième symétrie de F.

A chaque sommet du réseau ci-dessous situé sur les côtés ou à l'intérieur de l'angle $\gamma O \delta$ nous pouvons faire correspondre un polynome H symétrique; au sommet α, β correspondra le polynome

$$H_{\alpha,\beta} = x^\alpha y^\beta + x^\beta y^\alpha + x^{-\alpha} y^{-\beta} + x^{-\beta} y^{-\alpha}.$$

Les polynomes H qu'il suffit d'envisager sont des fonctions linéaires et homogènes des polynomes $H_{\alpha,\beta}$ attachés à ceux des sommets précédents qui ont été renforcés.

Nous pouvons encore, à chaque sommet du réseau situé au-dessus de la droite $O\gamma$ ou sur le rayon $O\gamma$, mais distinct de O, faire correspondre un polynome P et un polynome Q satisfaisant aux conditions (5) et (6); au sommet α, β seront attachés les polynomes

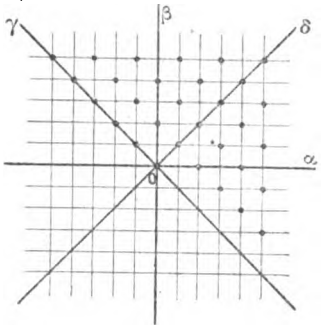
$$P_{\alpha,\beta} = x^\alpha y^\beta - x^{-\alpha} y^{-\beta},$$
$$Q_{\alpha,\beta} = x^\beta y^\alpha - x^{-\beta} y^{-\alpha}.$$

Digitized by Google

Les polynomes P et Q attachés aux sommets α, β et β, α s'échangent entre eux.

En remplaçant, dans l'équation (3), P et Q par les valeurs $P_{\alpha,\beta}$ et $Q_{\alpha,\beta}$, on est conduit à un polynome H qui est mis sous la forme d'une expression (3) symétrique.

F étant du premier degré en $x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, ce polynome ne sera composé qu'avec les polynomes $H_{\mu,\nu}$ attachés aux points du réseau qui sont situés sur les côtés ou à l'intérieur d'un carré dont le



centre est au point α, β et dont les côtés parallèles aux axes ont une longueur égale à 2.

Mais il y a plus, en vertu de la troisième symétrie de F, l'équation (3) que nous venons d'obtenir changera ou ne changera pas de signe en même temps que $P_{\alpha,\beta}$ et $Q_{\alpha,\beta}$ quand on changera le signe des variables.

En d'autres termes, le polynome H auquel conduisent les polynomes $P_{\alpha,\beta}$ et $Q_{\alpha,\beta}$ sera composé avec les cinq polynomes $H_{\mu,\nu}$ attachés aux quatre sommets et au centre du carré dont nous venons de parler.

Il en résulte que les polynomes H donnés par les polynomes $P_{\alpha,\beta}$ et $Q_{\alpha,\beta}$, attachés aux points renforcés du réseau, présentent les trois symétries de F, et que les polynomes H, donnés par les polynomes $P_{\alpha,\beta}$ et $Q_{\alpha,\beta}$, attachés aux sommets non renforcés, présentent les deux premières symétries de F mais changent de signe quand x et y changent de signe.

Digitized by Google

Écrivons les deux polynomes H donnés par les polynomes P et Q respectivement attachés aux sommets α, β et β, α.

$$\begin{aligned} H = \alpha(a^2 + a'^2)H_{\alpha,\beta} &- \frac{aa'}{2}(\alpha + s + 1)(1 - \cos J)H_{\alpha+1,\beta+1} \\ &- \frac{aa'}{2}(\alpha - s - 1)(1 + \cos J)H_{\alpha-1,\beta+1} \\ &- \frac{aa'}{2}(\alpha + s + 1)(1 + \cos J)H_{\alpha+1,\beta-1} \\ &- \frac{aa'}{2}(\alpha - s - 1)(1 - \cos J)H_{\alpha-1,\beta-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H = \beta(a^2 + a'^2)H_{\alpha,\beta} &- \frac{aa'}{2}(\beta + s + 1)(1 - \cos J)H_{\alpha+1,\beta+1} \\ &- \frac{aa'}{2}(\beta + s + 1)(1 + \cos J)H_{\alpha-1,\beta+1} \\ &- \frac{aa'}{2}(\beta - s - 1)(1 + \cos J)H_{\alpha+1,\beta-1} \\ &- \frac{aa'}{2}(\beta - s - 1)(1 - \cos J)H_{\alpha-1,\beta-1}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \pm\beta$, ces deux polynomes se réduisent à un seul qui s'écrit, pour $\alpha = \beta$,

$$\begin{aligned} H = \alpha(a^2 + a'^2)H_{\alpha,\alpha} &- \frac{aa'}{2}(\alpha + s + 1)(1 - \cos J)H_{\alpha+1,\alpha+1} \\ &- aa'\alpha(1 + \cos J)H_{\alpha-1,\alpha+1} - \frac{aa'}{2}(\alpha - s - 1)(1 - \cos J)H_{\alpha-1,\alpha-1}, \end{aligned}$$

et pour $\alpha = -\beta$

$$\begin{aligned} H = \alpha(a^2 + a'^2)H_{\alpha,-\alpha} &- aa'\alpha(1 - \cos J)H_{\alpha+1,-\alpha+1} \\ &- \frac{aa'}{2}(\alpha - s - 1)(1 + \cos J)H_{\alpha-1,-\alpha+1} \\ &- \frac{aa'}{2}(\alpha + s + 1)(1 + \cos J)H_{\alpha+1,-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Remarquons que, sauf le cas où les deux orbites sont dans le même plan, qui d'ailleurs doit être écarté, les coefficients des polynomes $H_{\mu,\nu}$, dans les seconds membres, sont toujours différents de zéro.

Nous pouvons enfin, à chaque point du réseau situé à l'intérieur de l'angle $\gamma O \delta$, faire correspondre un polynome S; au sommet α, β correspondra le polynome

$$S_{\alpha,\beta} = x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha + x^{-\alpha} y^{-\beta} - x^{-\beta} y^{-\alpha}.$$

Digitized by Google

Ce polynome $S_{\alpha,\beta}$ va conduire à une relation entre les polynomes H susceptibles d'être mis sous la forme d'une expression (3) symétrique.

Déterminons, en effet, les polynomes P et Q par la condition que

$$QF^{s+1}\frac{dx}{x} - PF^{s+1}\frac{dy}{y} = d(S_{\alpha,\beta}F^{s+2}),$$

c'est-à-dire par les équations

$$(10)\qquad \begin{cases} P = -y\left[\dfrac{\partial S_{\alpha,\beta}}{\partial y}F + (s+2)S_{\alpha,\beta}\dfrac{\partial F}{\partial y}\right], \\ Q = \quad x\left[\dfrac{\partial S_{\alpha,\beta}}{\partial x}F + (s+2)S_{\alpha,\beta}\dfrac{\partial F}{\partial x}\right]; \end{cases}$$

le polynome Q se déduit du polynome P en remplaçant, dans l'expression de celui-ci, les polynomes $P_{\mu,\nu}$ attachés aux sommets μ, ν par les polynomes $Q_{\mu,\nu}$.

On sait que l'on obtient une relation entre les polynomes H susceptibles d'être mis sous la forme d'une expression (3) symétrique en remplaçant dans l'expression (10) de P, par exemple, $P_{\mu,\nu}$ par le polynome H obtenu en remplaçant dans (3) P et Q respectivement par $P_{\mu,\nu}$ et $Q_{\mu,\nu}$.

F étant du premier degré en x, y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, les expressions (10) de P et de Q ne seront composées respectivement qu'avec les polynomes $P_{\mu,\nu}$ et $Q_{\mu,\nu}$ attachés aux points du réseau situés sur les côtés ou à l'intérieur d'un carré dont le centre est au point α, β et dont les côtés parallèles aux axes ont une longueur égale à 2, et aux points analogues du carré symétrique du précédent par rapport à $O\delta$.

F ne changeant pas de signe quand on change x en $-x$ et y en $-y$, dans les mêmes conditions, les polynomes P et Q déterminés par les équations (10) changeront ou ne changeront pas de signe suivant que $S_{\alpha,\beta}$ changera ou ne changera pas de signe.

Donc ces polynomes P et Q s'expriment de la même manière respectivement au moyen des polynomes $P_{\mu,\nu}$ et $Q_{\mu,\nu}$ attachés aux sommets et aux centres des deux carrés dont nous venons de parler.

Les polynomes $S_{\alpha,\beta}$, attachés aux points renforcés du réseau, donneront donc des relations entre des polynomes H pairs et

Digitized by Google

susceptibles d'être mis sous la forme d'une expression (3) symétrique; les polynomes $S_{\alpha,\beta}$, attachés aux points non renforcés, donneront des relations entre des polynomes H analogues mais impairs.

Écrivons explicitement le polynome P donné par la première équation (10)

$$\begin{aligned}
P = &-(a^2+a'^2)\beta P_{\alpha,\beta} + (a^2+a'^2)\alpha P_{\beta,\alpha} \\
&+ \frac{aa'}{2}(\beta+s+2)(1-\cos J)P_{\alpha+1,\beta+1} - \frac{aa'}{2}(\alpha+s+2)(1-\cos J)P_{\beta+1,\alpha+1} \\
&+ \frac{aa'}{2}(\beta+s+2)(1+\cos J)P_{\alpha-1,\beta+1} - \frac{aa'}{2}(\alpha-s-2)(1+\cos J)P_{\beta+1,\alpha-1} \\
&+ \frac{aa'}{2}(\beta-s-2)(1+\cos J)P_{\alpha+1,\beta-1} - \frac{aa'}{2}(\alpha+s+2)(1+\cos J)P_{\beta-1,\alpha+1} \\
&+ \frac{aa'}{2}(\beta-s-2)(1-\cos J)P_{\alpha-1,\beta-1} - \frac{aa'}{2}(\alpha-s-2)(1-\cos J)P_{\beta-1,\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Lorsque $\beta = \pm\alpha + 2$, cette expression se simplifie un peu; mais il est facile de vérifier que, sauf le cas de deux orbites situées dans le même plan, les coefficients qui y rentrent sont toujours différents de zéro.

Nous pouvons maintenant dénombrer les polynomes H présentant les trois symétries de F, de degré au plus égal à m, linéairement indépendants entre eux et de ceux qui sont susceptibles d'être mis sous la forme d'une expression (3) symétrique.

Le nombre de ces polynomes H linéairement indépendants entre eux est égal au nombre des sommets renforcés situés sur les côtés ou à l'intérieur de l'angle $\gamma O \delta$ et pour lesquels α et β sont plus petits ou égaux à m en valeur absolue; c'est-à-dire égal à

$$1 + 2 + \ldots + (m+1) = \frac{(m+2)(m+1)}{2}.$$

A chaque sommet renforcé α, β auquel nous avons attaché un polynome $P_{\alpha,\beta}$ et un polynome $Q_{\alpha,\beta}$, et pour lequel α et β sont plus petits ou égaux à $m-1$ en valeur absolue, correspond un polynome H, de degré m au plus, présentant les trois symétries de F et susceptible d'être mis sous la forme d'une expression (3) symétrique; ces polynomes sont au nombre de

$$2 + 4 + \ldots + 2(m-1) = m(m-1).$$

Digitized by Google

Il n'y a pas de polynomes H pairs et susceptibles d'être mis sous la forme d'une expression (3) symétrique qui soient distincts de ceux que nous venons de trouver.

Imaginons, en effet, un polynome H provenant de polynomes P et Q satisfaisant aux conditions (5) et (6) et exprimés respectivement au moyen des polynomes $P_{\alpha,\beta}$ et $Q_{\alpha,\beta}$ attachés aux $m(m-1)$ sommets que nous venons de dénombrer et au moyen des polynomes $P_{\alpha',\beta'}$ et $Q_{\alpha',\beta'}$ attachés à quelques autres sommets; ce polynome H contiendrait forcément des termes de degré impair ou de degré supérieur à m, car, d'une part, nous savons que dans le polynome H que donnent les polynomes $P_{\alpha',\beta'}$ et $Q_{\alpha',\beta'}$ les coefficients ne sont jamais nuls, et, d'autre part, il est manifeste que parmi les sommets des carrés ayant pour centres les points α', β' il y en a toujours qui n'appartiennent pas aux $\frac{(m+2)(m+1)}{2}$ points renforcés que nous avons d'abord dénombrés ou qui ne sont sommets de plusieurs de ces carrés.

A chaque sommet renforcé auquel nous avons attaché un polynome S et pour lequel α et β sont plus petits ou égaux à $m-2$ en valeur absolue correspond une relation entre les $m(m-1)$ polynomes H que nous venons de trouver; le nombre de ces relations est donc égal à

$$1+2+\ldots+(m-3)=\frac{(m-2)(m-3)}{2}.$$

Ces $\frac{(m-2)(m-3)}{2}$ relations sont distinctes.

L'analyse de M. Poincaré montre que tous les polynomes S distincts de degré $(m-2)$ au plus donnent toutes les relations distinctes entre les polynomes H de degré m au plus et susceptibles d'être mis sous la forme d'une expression (3) symétrique; un raisonnement en tous points semblable à celui que nous venons de faire montrera, en outre, qu'il n'y a pas de relations entre les $m(m-1)$ polynomes H que nous avons dénombrés qui soient distinctes des $\frac{(m-2)(m-3)}{2}$ précédentes relations.

Il y a donc, pour une valeur déterminée de s,

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}-m(m-1)+\frac{(m-2)(m-3)}{2}=4$$

Digitized by Google

polynomes H, de degré au plus égal à m, présentant les trois symétries de F, linéairement indépendants entre eux et de ceux qui sont susceptibles d'être mis sous la forme d'une expression (3) symétrique.

On en conclura facilement qu'il y a au plus quatre transcendantes A non nulles qui correspondent à une valeur déterminée de s et à des valeurs de α et de β au plus égales à m.

Une suite de raisonnements absolument analogues à ceux de M. Poincaré permettra maintenant, en introduisant une fonction

$$\Phi = \Sigma GA(\alpha, \beta, s) \qquad (\alpha + \beta \text{ pair}),$$

d'énoncer la proposition suivante.

Les coefficients du développement de la fonction perturbatrice peuvent se déduire d'une seule transcendante Φ_0 et cela de la manière suivante.

Chacun de ces coefficients sera égal à la somme de quatre termes au plus; chacun de ces termes sera le produit de deux facteurs; le premier facteur sera la transcendante Φ_0 ou l'une de ses trois premières dérivées par rapport à a; le second facteur sera une fonction rationnelle de a, a' et $\cos J$.

On peut se demander, comme question subsidiaire, combien il y a de polynomes H, de degré m, correspondant à une valeur déterminée de s, présentant les deux premières symétries de F, mais changeant de signe quand on change x en $-x$ et y en $-y$, qui soient linéairement indépendants entre eux et de ceux qui sont susceptibles d'être mis sous la forme d'une expression (3) symétrique.

Par des dénombrements absolument analogues à ceux que nous venons de faire, mais se rapportant maintenant aux points non renforcés du réseau, on verra facilement qu'il y en a

$$\frac{m(m+1)}{2} - m(m-1) + \frac{(m-1)(m-2)}{2} = 1.$$

Les cinq polynomes H de M. Poincaré se trouvent donc distribués en deux groupes, le premier contenant quatre polynomes et le second un seul. Les quatre polynomes du premier groupe sont, comme F, pairs par rapport à x et à y; le polynome du

Digitized by Google

second groupe est impair; il n'y a que les quatre polynomes du premier groupe qui entrent dans la construction des transcendantes qui s'introduisent dans le développement de la fonction perturbatrice.

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. H. DUPORT.

La recherche d'une solution du problème des trois corps, en prenant pour inconnues les distances mutuelles de ces corps, a fait l'objet d'un très beau Mémoire dû à Lagrange et publié au Tome VI de ses Œuvres. Plus récemment Tisserand lui a consacré un Chapitre de son remarquable *Traité de Mécanique céleste*. Il me semble que cette méthode est susceptible de modifications qui y apportent de grandes simplifications et sont de nature à la rendre susceptible de devenir utile. Je vais rapidement l'exposer.

Soient $Oxyz$ trois axes de coordonnées rectangulaires fixes; M, M′, M″ les trois points; $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ leurs coordonnées; r, r', r'' les distances M′M″, MM″, MM′. Posons

$$f(r) = \frac{m'm''}{r}, \qquad f_1(r') = \frac{m''m}{r'}, \qquad f_2(r'') = \frac{mm'}{r''},$$

m, m', m'' étant les masses des trois points M, M′, M″. On aura les équations suivantes

$$\begin{aligned} r^2 &= (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2, \\ r'^2 &= (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2, \\ r''^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \end{aligned}$$

et

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial f_1}{\partial r'}\frac{x-x''}{r'} + \frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{x-x'}{r''}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial f_1}{\partial r'}\frac{y-y''}{r'} + \frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{y-y'}{r''}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial f_1}{\partial r'}\frac{z-z''}{r'} + \frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{z-z''}{r''}, \\ m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= \frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{x'-x}{r''} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{x'-x''}{r}, \\ m'\frac{d^2y'}{dt^2} &= \frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{y'-y}{r''} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{y'-y''}{r}, \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

$$(1)\quad \begin{cases} m'\dfrac{d^2z'}{dt^2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial r''}\dfrac{z'-z}{r''} + \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{z'-z''}{r'}, \\ m''\dfrac{d^2x''}{dt^2} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{x''-x'}{r} + \dfrac{\partial f_1}{\partial r'}\dfrac{x''-x}{r'}, \\ m''\dfrac{d^2y''}{dt^2} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{y''-y'}{r} + \dfrac{\partial f_1}{\partial r'}\dfrac{y''-y}{r'}, \\ m''\dfrac{d^2z''}{dt^2} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{z''-z'}{r} + \dfrac{\partial f_1}{\partial r'}\dfrac{z''-z}{r'}. \end{cases}$$

On en tire

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2(x'-x'')}{dt^2} = \left(\dfrac{1}{m'}+\dfrac{1}{m''}\right)\dfrac{df}{dr}\dfrac{x'-x''}{r} - \dfrac{1}{m''}\dfrac{df_1}{dr'}\dfrac{x''-x}{r'} - \dfrac{1}{m'}\dfrac{df_2}{dr''}\dfrac{x-x'}{r''}, \\ \dfrac{d^2(y'-y'')}{dt^2} = \left(\dfrac{1}{m'}+\dfrac{1}{m''}\right)\dfrac{df}{dr}\dfrac{y'-y''}{r} - \dfrac{1}{m''}\dfrac{df_1}{dr'}\dfrac{y''-y}{r'} - \dfrac{1}{m'}\dfrac{df_2}{dr''}\dfrac{y-y'}{r''}, \\ \dfrac{d^2(z'-z'')}{dt^2} = \left(\dfrac{1}{m'}+\dfrac{1}{m''}\right)\dfrac{df}{dr}\dfrac{z'-z''}{r} - \dfrac{1}{m''}\dfrac{df_1}{dr'}\dfrac{z''-z}{r'} - \dfrac{1}{m'}\dfrac{df_2}{dr''}\dfrac{z-z'}{r''}. \end{cases}$$

On a aussi

$$r\frac{dr}{dt} = (x'-x'')\frac{d}{dt}(x'-x'') + (y'-y'')\frac{d}{dt}(y'-y''') + (z'-z'')\frac{d}{dt}(z'-z''),$$

puis

$$r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx''}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}-\frac{dy''}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}-\frac{dz''}{dt}\right)^2 + (x'-x'')\frac{d^2}{dt^2}(x'-x'') + (y'-y'')\frac{d^2}{dt^2}(y'-y'') + (z'-z'')\frac{d^2}{dt^2}(z'-z''),$$

d'où

$$r\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} - \left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx''}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy'}{dt}-\frac{dy''}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz'}{dt}-\frac{dz''}{dt}\right)^2 = \left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m''}\right)\frac{df}{dr}r + \frac{1}{m''}\frac{df_1}{dr'}\frac{r'^2+r^2-r''^2}{2r'} + \frac{1}{m'}\frac{df_2}{dr''}\frac{r''^2+r^2-r'^2}{2r''}.$$

On aura donc, en posant,

$$(3)\quad \begin{cases} \rho^2 = \left(\dfrac{dx'}{dt}-\dfrac{dx''}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy'}{dt}-\dfrac{dy''}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz'}{dt}-\dfrac{dz''}{dt}\right)^2, \\ \rho'^2 = \left(\dfrac{dx''}{dt}-\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy''}{dt}-\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz''}{dt}-\dfrac{dz}{dt}\right)^2, \\ \rho''^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}-\dfrac{dz'}{dt}\right)^2, \end{cases}$$

Digitized by Google

les trois équations

$$(4)\left\{\begin{aligned}
r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\rho^2&=\left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m''}\right)\frac{df}{dr}r+\frac{1}{m'}\frac{df_2}{dr''}\frac{r''^2+r^2-r'^2}{2r''}\\
&\quad+\frac{1}{m''}\frac{df_1}{dr'}\frac{r'^2+r^2-r''^2}{2r'},\\
r'\frac{d^2r'}{dt^2}+\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2-\rho'^2&=\left(\frac{1}{m''}+\frac{1}{m}\right)\frac{df_1}{dr'}r'+\frac{1}{m''}\frac{df}{dr}\frac{r^2+r'^2-r''^2}{2r}\\
&\quad+\frac{1}{m}\frac{df_2}{dr''}\frac{r''^2+r'^2-r^2}{2r''},\\
r''\frac{d^2r''}{dt^2}+\left(\frac{dr''}{dt}\right)^2-\rho''^2&=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{df_2}{dr''}r''+\frac{1}{m}\frac{df_1}{dr'}\frac{r'^2+r''^2-r^2}{2r'}\\
&\quad+\frac{1}{m'}\frac{df}{dr}\frac{r^2+r''^2-r'^2}{2r}.
\end{aligned}\right.$$

Posons maintenant les équations

$$(5)\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx''}{dt}\right)(x'-x'')+\left(\frac{dy'}{dt}-\frac{dy''}{dt}\right)(y'-y'')+\left(\frac{dz'}{dt}-\frac{dz''}{dt}\right)(z'-z'')=\alpha,\\
&\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx''}{dt}\right)(x''-x)+\left(\frac{dy'}{dt}-\frac{dy''}{dt}\right)(y''-y)+\left(\frac{dz'}{dt}-\frac{dz''}{dt}\right)(z''-z)=\beta,\\
&\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx''}{dt}\right)(x-x')+\left(\frac{dy'}{dt}-\frac{dy''}{dt}\right)(y-y')+\left(\frac{dz'}{dt}-\frac{dz''}{dt}\right)(z-z')=\gamma,\\
&\left(\frac{dx''}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)(x'-x'')+\left(\frac{dy''}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)(y'-y'')+\left(\frac{dz''}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)(z'-z'')=\alpha',\\
&\left(\frac{dx''}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)(x''-x)+\left(\frac{dy''}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)(y''-y)+\left(\frac{dz''}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)(z''-z)=\beta',\\
&\left(\frac{dx''}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)(x-x')+\left(\frac{dy''}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)(y-y')+\left(\frac{dz''}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)(z-z')=\gamma'.\\
&\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)(x'-x'')+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)(y'-y'')+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)(z'-z'')=\alpha'',\\
&\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)(x''-x)+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)(y''-y)+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)(z''-z)=\beta'',\\
&\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)(x-x')+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)(y-y')+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)(z-z')=\gamma''.
\end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$\alpha=r\frac{dr}{dt},\qquad \beta'=r'\frac{dr'}{dt},\qquad \gamma''=r''\frac{dr''}{dt}.$$

On aura les relations

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma&=0, & \alpha+\alpha'+\alpha''&=0,\\
\alpha'+\beta'+\gamma'&=0, & \beta+\beta'+\beta''&=0,\\
\alpha''+\beta''+\gamma''&=0, & \gamma+\gamma'+\gamma''&=0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\beta-\alpha'=\alpha''-\gamma=\gamma'-\beta''=X,$$

Digitized by Google

en posant

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} X = {} & \frac{dx'}{dt}(x''-x)+\frac{dy'}{dt}(y''-y)-\frac{dz'}{dt}(z''-z)+\frac{dx''}{dt}(x-x') \\ & -\frac{dy''}{dt}(y-y')-\frac{dz''}{dt}(z-z')-\frac{dx}{dt}(x'-x'')+\frac{dy}{dt}(y'-y'') \\ & +\frac{dz}{dt}(z'-z'') \end{aligned}\right.$$

et

$$\alpha+\beta+\alpha'+\beta'=\gamma'',\qquad \beta'-\gamma'+\beta''+\gamma''=\alpha,\qquad \gamma+\alpha+\gamma''+\alpha'=\beta'$$

ou bien

$$\begin{aligned} \beta+\alpha' &= \gamma''-\alpha-\beta', \\ \gamma+\alpha'' &= \beta'-\gamma''-\alpha, \\ \beta''+\gamma' &= \alpha-\beta'-\gamma'', \end{aligned}$$

et, par suite, on aura pour exprimer les quantités α', α'', β, β'', γ, γ' les équations suivantes

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2}(\gamma''-\alpha-\beta'+X), \\ \alpha' &= \frac{1}{2}(\gamma''-\alpha-\beta'-X), \\ \alpha'' &= \frac{1}{2}(\beta'-\gamma''-\alpha+X), \\ \gamma &= \frac{1}{2}(\beta'-\gamma''-\alpha-X), \\ \gamma' &= \frac{1}{2}(\alpha-\beta'-\gamma''+X), \\ \beta'' &= \frac{1}{2}(\alpha-\beta'-\gamma''-X). \end{aligned}\right.$$

On aura donc

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \rho\frac{d\rho}{dt} &= \left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m''}\right)\frac{df}{dr}\frac{1}{r}\alpha-\frac{1}{m''}\frac{df_1}{dr'}\frac{1}{r'}\frac{1}{2}(\gamma''-\alpha-\beta'+X) \\ & -\frac{1}{m'}\frac{df_2}{dr''}\frac{1}{r''}\frac{1}{2}(\beta'-\gamma''-\alpha-X), \\ \rho'\frac{d\rho'}{dt} &= \left(\frac{1}{m''}+\frac{1}{m}\right)\frac{df_1}{dr'}\frac{1}{r'}\beta'-\frac{1}{m}\frac{df_2}{dr''}\frac{1}{r''}\frac{1}{2}(\alpha-\beta'-\gamma''+X) \\ & -\frac{1}{m''}\frac{df}{dr}\frac{1}{r}\frac{1}{2}(\gamma''-\alpha-\beta'-X), \\ \rho''\frac{d\rho''}{dt} &= \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{df_2}{dr''}\frac{1}{r''}\gamma''-\frac{1}{m'}\frac{df}{dr}\frac{1}{r}\frac{1}{2}(\beta'-\gamma''-\alpha+X) \\ & -\frac{1}{m}\frac{df_1}{dr'}\frac{1}{r'}\frac{1}{2}(\alpha-\beta'-\gamma''-X). \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

La quantité X satisfait à l'équation différentielle suivante

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = {} & \frac{r'^2 + r''^2 - r^2}{2}\left(\frac{1}{m'}\frac{df_2}{dr''}\frac{1}{r''} - \frac{1}{m''}\frac{df_1}{dr'}\frac{1}{r'}\right) \\ & + \frac{r''^2 + r^2 - r'^2}{2}\left(\frac{1}{m''}\frac{df}{dr}\frac{1}{r} - \frac{1}{m}\frac{df_2}{dr''}\frac{1}{r''}\right) \\ & + \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2}\left(\frac{1}{m}\frac{df_1}{dr'}\frac{1}{r'} - \frac{1}{m'}\frac{df}{dr}\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right.$$

Cette quantité X peut aussi s'exprimer algébriquement au moyen des quantités r, r', r'', ρ, ρ', ρ'', α, β', γ'', comme on le voit de la manière suivante.

Considérons les trois points P, P′, P″ ayant respectivement pour coordonnées

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},\ \frac{dx'}{dt},\ \frac{dy'}{dt},\ \frac{dz'}{dt},\ \frac{dx''}{dt},\ \frac{dy''}{dt},\ \frac{dz''}{dt}.$$

Les côtés de ce triangle sont ρ, ρ' ρ'', soit

$$\rho = \mathrm{P'P''}, \qquad \rho' = \mathrm{P''P}, \qquad \rho'' = \mathrm{PP'}.$$

On a les relations suivantes

$$\alpha = \cos(\mathrm{P''P'}, \mathrm{M''M'})\rho r, \qquad \alpha' = \cos(\mathrm{PP''}, \mathrm{M''M'})\rho' r,$$
$$\alpha'' = \cos(\mathrm{P'P}, \mathrm{M''M'})\rho'' r,$$

$$\beta = \cos(\mathrm{P''P'}, \mathrm{MM''})\rho r', \qquad \beta' = \cos(\mathrm{PP''}, \mathrm{MM''})\rho' r',$$
$$\beta'' = \cos(\mathrm{P'P}, \mathrm{MM''})\rho'' r',$$

$$\gamma = \cos(\mathrm{P''P'}, \mathrm{M'M})\rho r'', \qquad \gamma' = \cos(\mathrm{PP''}, \mathrm{M'M})\rho' r'',$$
$$\gamma'' = \cos(\mathrm{P'P}, \mathrm{M'M})\rho'' r''.$$

Considérons en général trois axes de coordonnées obliques Oξ, Oη, Oζ et une droite OI faisant avec ces axes les angles θ, θ', θ''; soit λ l'angle de Oη et Oζ, μ celui de Oζ et Oξ, ν celui de Oξ et Oη.

On sait que l'on a la relation qu'on obtient en égalant à zéro le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\theta \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\theta' \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\theta'' \\ \cos\theta & \cos\theta' & \cos\theta'' & 1 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Appliquons cela aux quatre directions MM′, MM″, PP′, PP″ par exemple. On aura l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{r''^2+r'^2-r^2}{2r'r''} & \frac{\gamma''}{\rho'\rho''} & -\frac{\gamma'}{r''\rho'} \\ \frac{r''^2+r'^2-r^2}{2r'r''} & 1 & -\frac{\beta''}{r'\rho''} & \frac{\beta'}{r'\rho'} \\ \frac{\gamma''}{r''\rho''} & -\frac{\beta''}{r'\rho''} & 1 & \frac{\rho'^2+\rho''^2-\rho^2}{2\rho'\rho''} \\ -\frac{\gamma'}{r''\rho'} & \frac{\beta'}{r'\rho'} & \frac{\rho'^2+\rho''^2-\rho^2}{2\rho'\rho''} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} r''^2 & \frac{r''^2+r'^2-r^2}{2} & \gamma'' & -\gamma' \\ \frac{r''^2+r'^2-r^2}{2} & r'^2 & -\beta'' & \beta' \\ \gamma'' & -\beta'' & \rho''^2 & \frac{\rho'^2+\rho''^2-\rho^2}{2} \\ -\gamma' & \beta' & \frac{\rho'^2+\rho''^2-\rho^2}{2} & \rho'^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré en X; elle se développe d'une manière symétrique dans les quantités r, r', r''; ρ, ρ', ρ''; α, β', γ''. On peut l'écrire de la manière suivante

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} 16S^2S''^2+H^2 &- \frac{r''^2}{2}[\rho^2(H+2\beta'\alpha'')+\rho'^2(H+2\alpha\beta'')+\rho''^2(2\alpha\beta'-H)] \\ &- \frac{r^2}{2}[\rho^2(2\beta'\gamma''-H)+\rho'^2(H+2\beta\gamma'')+\rho''^2(H+2\gamma\beta')] \\ &- \frac{r'^2}{2}[\rho^2(H+2\alpha'\gamma'')+\rho'^2(2\alpha\gamma''-H)+\rho''^2(H+2\alpha\gamma')]=0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$H=\frac{1}{4}[X^2+16S'^2]$$

S, S′, S″ désignant les surfaces des triangles dont les côtés sont respectivement

$$r,\ r',\ r'',\quad \sqrt{\alpha},\ \sqrt{\beta'},\ \sqrt{\gamma''},\quad \rho,\ \rho',\ \rho''.$$

Dérivons maintenant les équations (4) en nous servant des

Digitized by Google

équations (8). On aura

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= 2\left[\left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m''}\right)\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\alpha}{r} - \frac{1}{m''}\frac{\partial f_1}{\partial r'}\frac{1}{r'}\frac{1}{2}(\gamma''-\alpha-\beta'+X)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{1}{m'}\frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{1}{r''}\frac{1}{2}(\beta'-\gamma''-\alpha-X)\right],\\
&\quad + \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m''}\right)\frac{\partial f}{\partial r}r + \frac{1}{m'}\frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{1}{r''}\frac{r''^2+r^2-r'^2}{2}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{m''}\frac{\partial f_1}{\partial r'}\frac{1}{r'}\frac{r'^2+r^2-r''^2}{2}\right],\\
\frac{d^2\alpha'}{dt^2} &= 2\left[\left(\frac{1}{m''}+\frac{1}{m}\right)\frac{\partial f_1}{\partial r'}\frac{\beta'}{r'} - \frac{1}{m}\frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{1}{r''}\frac{1}{2}(\alpha-\beta'-\gamma''+X)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{1}{m''}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{1}{2}(\gamma''-\alpha-\beta'-X)\right],\\
&\quad + \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1}{m''}+\frac{1}{m}\right)\frac{\partial f_1}{\partial r'}r' + \frac{1}{m''}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{r^2+r'^2-r''^2}{2}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{m}\frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{1}{r''}\frac{r''^2+r'^2-r^2}{2}\right],\\
\frac{d^2\alpha''}{dt^2} &= 2\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{\partial f_2}{\partial r''}\frac{\gamma''}{r''} - \frac{1}{m'}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{1}{2}(\beta'-\gamma''-\alpha+X)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{1}{m}\frac{\partial f_1}{\partial r'}\frac{1}{r'}\frac{1}{2}(\alpha-\beta'-\gamma''-X)\right],\\
&\quad + \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{\partial f_2}{\partial r''}r'' + \frac{1}{m}\frac{\partial f_1}{\partial r'}\frac{1}{r'}\frac{r'^2+r''^2-r^2}{2}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{m'}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{r^2+r''^2-r'^2}{2}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (11) jointes à l'équation (9) avec les données initiales satisfaisant à l'équation (10) donnent une solution du problème des trois corps de laquelle il semble que l'on puisse tirer des résultats pratiques. Je n'insisterai pas sur ce point pour le moment.

Si l'on considère les équations (11) où X est exprimée par l'équation (10) et où l'on a deux intégrales premières, celle des forces vives et celle qu'on obtient en faisant la somme des carrés des équations des aires dans le mouvement relatif au centre de gravité, on voit aisément que le système se ramène au 6e ordre. Ce résultat a été trouvé par une méthode différente par M. Bertrand dans son Mémoire sur « *l'intégration des équations différentielles de la Mécanique* (*Journal de Liouville,* Tome XVII, 1852) ».

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

FECHNER (GUSTAV-THEODOR). — KOLLEKTIVMASSLEHRE. Herausgegeben von G.-F. Lipps. — Leipzig, 1897. Engelmann. 1 vol. in-8° de 484 pages.

Le titre de l'Ouvrage posthume de Fechner (*Kollektivmasslehre*) est assez difficile à traduire : mot à mot, ce serait *Théorie des mesures collectives;* mais l'Auteur explique que c'est une abréviation pour *Théorie des mesures des objets collectifs.* Un objet collectif (*Kollektivgegenstand*) est un objet dont le nom est pris collectivement, qui représente un tout composé d'individus de la même espèce, ou, suivant la définition donnée par l'Auteur, qui comprend un nombre indéterminé d'exemplaires appartenant à une même espèce, mais sujets à des variations accidentelles. Ainsi l'homme, l'enfant, le vieillard, un animal quelconque, sont des *objets collectifs* dont on peut étudier les variations sous tel ou tel rapport; un grain de blé, une toile peinte, un volume, un phénomène naturel susceptible de mesure, peuvent être considérés comme des objets collectifs. Il ne s'agit pas ici des universaux, et le sens que Fechner attache au mot d'*objet collectif* est plus général, plus étendu, que celui du mot *type;* l'homme collectif n'est pas l'homme moyen, tel que l'a défini Quetelet, bien que les recherches de Fechner aient pris leur point de départ dans celles de Quetelet, que l'on trouve exposées dans une série de livres curieux (*Lettres sur la théorie des probabilités,* 1846; *Physique sociale,* 1869; *Anthropométrie,* 1870).

Fechner avait, depuis de longues années, réuni les matériaux et commencé la rédaction de l'Ouvrage que M. Lipps vient de publier, après la mort de l'Auteur, sous les auspices de la Société royale des Sciences de Leipzig. On n'a trouvé terminés que les premiers Chapitres; le reste se composait de fragments que M. Lipps a coordonnés et complétés de son mieux, en se servant des matériaux qu'il avait à sa disposition. Il en est résulté un Volume de près de 500 pages, très suggestif, et fait pour intéresser au même degré les géomètres et les philosophes.

Étant donné un grand nombre de mesures concernant un objet collectif, on peut les disposer en tableaux et construire la courbe de fréquence des diverses valeurs observées, en les groupant au besoin par moyennes. Il se trouve alors que les valeurs extrêmes sont les plus rares, et que le maximum de fréquence correspond à une certaine valeur D, que Fechner appelle la *plus dense;* elle ne coïncide pas, en général, avec la *moyenne arithmétique* A des valeurs observées, car

Digitized by Google

la distribution de ces valeurs n'est pas nécessairement symétrique par rapport à la moyenne; il peut y avoir disproportion entre les écarts positifs et les écarts négatifs. Une troisième valeur principale est la valeur *centrale* ou *médiane* C, pour laquelle le nombre des écarts positifs égale celui des écarts négatifs, tandis que, pour la moyenne A, ce sont les sommes des écarts qui deviennent égales. Les valeurs principales A, C, D sont des constantes caractéristiques d'un objet collectif. On peut encore considérer d'autres valeurs remarquables, par exemple la valeur frontière R, placée de manière que la somme des valeurs plus grandes que R égale celle des valeurs plus petites, etc. Mais les constantes A, C, D sont celles qui offrent le plus d'intérêt.

Après avoir établi les écarts des mesures individuelles par rapport à l'un des nombres A, C, D, on peut prendre la moyenne ε' des écarts positifs et la moyenne ε_1 des écarts négatifs, ou la moyenne générale ε de tous les écarts, abstraction faite de leurs signes. L'écart probable et l'écart à craindre (écart moyen quadratique) sont définis conformément à l'usage.

C'est de ce point de vue théorique que Fechner a examiné des données de statistique, de nature et d'origine très variées : taille des recrues, dimensions des crânes, poids des organes du corps humain; disposition des épis de blé; moyennes diurnes et mensuelles des états du thermomètre et du baromètre, hauteurs de pluie; format des cartes de visite; dimensions des toiles peintes d'après les catalogues des musées, etc. Il s'agissait de voir dans quelles limites la loi de Gauss représente les variations accidentelles des objets collectifs, et s'il y a lieu de la modifier ou d'y substituer une loi plus générale. Fechner a essayé, avec plus ou moins de succès, un grand nombre de modifications ou de généralisations de la loi en question, qui veut, comme on sait, que la fréquence d'une déviation x soit proportionnelle à $e^{-h^2x^2}$.

Pour tout dire, l'asymétrie des variations positives et négatives est généralement peu sensible, et il est souvent difficile de décider s'il s'agit d'une asymétrie essentielle ou purement accidentelle. Dans le cas où l'asymétrie des deux branches de la courbe est suffisamment marquée, on peut d'abord *dédoubler* la loi de Gauss, c'est-à-dire l'appliquer séparément à chacune des deux branches avec une autre valeur du module h. Comme on a $h = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}$, en désignant par ε la moyenne des écarts, on prendra $h_1 = \frac{1}{\varepsilon_1\sqrt{\pi}}$ du côté négatif, et $h' = \frac{1}{\varepsilon'\sqrt{\pi}}$ du côté positif. En même temps, il conviendra de rapporter les déviations, non plus à la moyenne arithmétique A des valeurs, mais à la valeur la plus dense D. Il est à remarquer que, les deux branches devant se confondre

Digitized by Google

pour $x = 0$, les deux expressions de l'ordonnée centrale doivent coïncider; il s'ensuit que les moyennes ε_1 et ε' sont entre elles comme les nombres m_1, m' des écarts respectifs (ou les sommes de ces écarts comme les carrés des nombres m_1, m'). Nous n'insisterons pas sur d'autres conséquences de la loi *dédoublée*.

Une dernière modification consiste à introduire non plus les valeurs observées elles-mêmes, mais leurs logarithmes, ce qui revient à considérer les rapports des valeurs au lieu de leurs différences. Les variations x sont alors celles des logarithmes des nombres observés, c'est le seul changement que subit le mode de calcul.

Ces indications suffiront pour donner une idée du but que s'était proposé Fechner dans ses recherches sur les lois de variation des objets collectifs. Nous ne pouvons le suivre dans les détails de ses spéculations et de ses calculs. Son livre, s'il constitue, à coup sûr, une tentative intéressante au point de vue de l'élucidation des principes sur lesquels repose la théorie des probabilités, n'a pas la même portée pour les astronomes. L'asymétrie des écarts, qui est le point capital des statistiques étudiées par l'auteur, ne se rencontre guère dans les séries d'observations auxquelles nous avons affaire; elle pourrait plutôt, ainsi que le fait remarquer M. Lipps, servir de criterium pour distinguer les observations suspectes qu'il y a lieu de rejeter. En somme, il manque à ce livre une conclusion; c'est peut-être ce qui avait empêché Fechner de le publier de son vivant.

R. R.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, nos 3444-3458.

Franz (*J.*). — Discussion des observations méridiennes du cratère Mœsting A, faites à Gœttingue, de 1891 à 1893.

On se rappelle que, pendant l'année 1892, M. Franz avait expérimenté avec succès, à Kœnigsberg, son nouveau mode d'observation de la Lune, et que la discussion de ces observations l'avait conduit à des résultats intéressants; il avait trouvé, notamment, que le coefficient de l'équation parallactique devait être diminué et ramené à 124″,4 (voir *Bull.*, t. XII, p. 141). M. Franz vient de soumettre à une discussion analogue les observations de Mœsting A, faites à Gœttingue, de 1891 à 1893 (*Bull.*, t. XII, p. 191). Elles donnent, pour le coefficient en question, 124″,9, et pour la parallaxe du Soleil 8″,80. En laissant de côté les observations de 1891, dues à M. Buschbaum, et ne conservant

Digitized by Google

que celles de 1892-1893, faites par M. Grossmann dans de meilleures conditions, on trouverait 125″,91 et 8″.88. En combinant toutes les observations de Gœttingue avec celles de Kœnigsberg, M. Franz trouve 124″,68 et 8″,79; puis, en laissant de côté les observations un peu incertaines, 125″,03 et 8″,81. (D'après Hansen, le coefficient serait 126″,46.) M. Franz ne connaissait pas encore les observations faites à Gœttingue de 1894 à 1896 par M. Schwassmann, et qui ont été publiées en 1897.

Ristenpart. — Observations méridiennes des bords lunaires et du cratère Mœsting A, faites à Carlsruhe de 1892 à 1894.

M. Ristenpart donne les résultats de ses observations et leur comparaison avec les éphémérides du *Nautical Almanac.* Elles seront continuées à Heidelberg. Il y a lieu de remarquer que les observations de Mœsting A ne remplaceront jamais complètement celles des bords, qui peuvent être faites plus longtemps, et dont la précision pourra être augmentée beaucoup par l'étude des irrégularités du contour lunaire.

Brenner (*L.*). — Mesures micrométriques de Jupiter et de ses satellites, faites à l'observatoire Manora.

Pickering. — Amas d'étoiles variables.

Charlois. — Découverte de trois planètes nouvelles (1897 DG, DH, DJ).

Nyland. — Occultation des Pléiades du 23 juillet 1897.

Dreyer. — Notice nécrologique sur A. Marth.

Né à Colberg en 1828, Albert Marth avait d'abord étudié la Théologie à Berlin; il vint ensuite à Kœnigsberg pour s'initier à l'Astronomie sous la direction de Peters. Appelé, en 1853, à Londres par M. Bishop, il découvrit en 1854 la planète Amphitrite. L'année suivante, il fut attaché à l'observatoire de Durham, qu'il quitta en 1863 pour suivre M. Lassell à Malte. Il en rapporta, en 1865, un catalogue de 600 nébuleuses nouvelles. Fixé de nouveau à Londres, son temps fut désormais absorbé par des travaux de calcul. On lui doit notamment les éphémérides des satellites de Jupiter, de Saturne, de Neptune, que les *Monthly Notices* publiaient régulièrement. Depuis 1883, il était astronome titulaire à

Digitized by Google

l'observatoire de Markree (Irlande). Il est mort le 5 août 1897, des suites d'une opération chirurgicale.

Bohlin (*K.*). — Réduction des observations des planètes (12) Victoria et (80) Sapho.

Ces observations avaient été faites en 1882, à Upsal, en vue de la détermination de la parallaxe du Soleil par la méthode de M. Gill. Elles n'ont pu être utilisées pour cette détermination, mais elles pourront servir au calcul des orbites; c'est ce qui justifie cette nouvelle réduction.

Hillebrand (*C.*). — Éphéméride de la comète de Winnecke pour le prochain retour (1897-98).

Cette éphéméride approximative a été calculée avec les données préparées par feu M. de Hærdtl. (La comète a été retrouvée par M. Perrine, le 2 janvier dernier).

Pickering. — Étoiles doubles australes.

M. Pickering donne une liste d'étoiles du Catalogue de Cordoba qui, d'après les observations d'Arequipa, ont un ou plusieurs compagnons, éloignés de moins de 30″.

Thome. — Sur les variables signalées par M. Gill.

Deichmüller. — Nouvelle variable de la constellation du Lézard.

Doberck (*W.*). — Sur les orbites des étoiles doubles ζ Hercule et γ Lion.

Le temps de révolution de ζ Hercule est de 34ᵃ,5; depuis 1826, on a pu observer déjà deux révolutions complètes, ce qui a permis de calculer l'orbite de ce couple avec une suffisante approximation. Mais, pour γ Lion, la période dépasse probablement mille ans; l'angle de position n'a varié que de 30° dans le cours d'un siècle.

Luther (*R.*). — Nouveaux éléments et éphéméride de la planète (61) Danaé.

Digitized by Google

Nyland. — **Mesures micrométriques de l'amas G. C. 4410.**

M. Nyland s'est proposé de déterminer les positions relatives de 28 étoiles de cet amas, non seulement par des mesures directes avec le réfracteur de l'observatoire d'Utrecht, mais encore par des mesures effectuées sur des clichés communiqués par M. Scheiner, MM. Henry et M. Roberts. Il donne un résumé des résultats de ce travail, qui doit faire le sujet d'une Thèse.

See. — Sur la cause de l'insuccès de la reproduction photographique de détails très délicats sur un fond lumineux.

Le grand obstacle que rencontrent les applications de la Photographie à l'étude des planètes, des nébuleuses, etc., c'est la mobilité des images qui résulte des ondulations incessantes de l'air traversé par des courants. L'amplitude de ces oscillations varie de 0″,5 à 2″. L'œil peut saisir les impressions les plus fugitives, et reconnaître ainsi des détails délicats qui ne deviennent visibles qu'à certains moments; mais la Photographie confond les images successives, et les détails trop fins sont noyés, effacés par l'empiètement des images des régions voisines. **De là l'impossibilité actuelle de reproduire des détails d'un diamètre inférieur à 1″. Heureusement la Photographie n'a pas dit son dernier mot.**

Dziobek. — **L'équilibre instable dans le cas de la gravitation universelle.**

L'instabilité de l'équilibre d'un point matériel, soumis à l'attraction d'un système de masses, peut se démontrer d'une manière tout à fait générale en mettant l'expression du potentiel sous la forme

$$V = a_0 + a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + \ldots$$

et en montrant que l'équation du troisième degré qui détermine λ, lorsqu'on introduit la solution particulière

$$\xi = a.e^{t\sqrt{\lambda}}, \qquad \eta = b.e^{t\sqrt{\lambda}}, \qquad \ldots,$$

a toujours au moins une racine positive.

On trouvera plus loin les remarques de M. Seeliger, relatives à cette Note.

Gruey. — Mesures d'étoiles doubles, faites à Besançon par MM. Chofardet et Petit.

Digitized by Google

Benko. — Observations diverses, faites à l'observatoire de Pola.

Stanley Williams. — Nouvelles variables australes.

Brenner (*L.*). — Nouvelles divisions des anneaux de Saturne.

A propos des nouvelles divisions, signalées depuis quelque temps par M. Brenner et par d'autres observateurs, M. Kreutz fait remarquer qu'elles se trouvent déjà indiquées sur les dessins de Saturne, publiés autrefois par Dawes, Secchi, et même par des astronomes plus anciens.

Bauschinger. — Mort de M. Liegel.

Le 12 août 1897 est mort, à Hanovre, M. T.-O. Liegel, ancien inspecteur des chemins de fer, qui, pendant près de 30 ans, a été l'un des meilleurs calculateurs du *Berliner Jahrbuch*. Il était né en 1824.

Engelhardt. — Lettre à l'Éditeur.

M. d'Engelhardt, obligé de renoncer à ses observations, a fait don de ses instruments à l'observatoire de Kazan.

Kobold. — Sur la distribution des mouvements particuliers des étoiles.

Nous avons déjà eu l'occasion d'analyser cette Note de M. Kobold, en la rattachant à deux Communications précédentes (*voir* p. 262).

Bidschof (*F.*). — Sur le prochain retour de la comète 1866 I (Tempel).

La période de cet astre étant d'environ 33 ans, on peut s'attendre à le revoir en 1899. Mais l'incertitude dont les éléments sont affectés ne permet pas de fixer avec une précision suffisante la date du retour. C'est ce qui a engagé M. Bidschof à publier dès maintenant des éphémérides de recherche, calculées avec diverses valeurs de l'anomalie vraie v.

See. — Lettre à l'Éditeur.

M. See (Lowell Observatory, Flagstaff, Arizona) ayant perdu sa bibliothèque par un incendie, serait heureux, pour la reconstituer, de recevoir notamment des publications relatives aux étoiles doubles australes.

Digitized by Google

Porter (*J.-G.*). — **Mouvements propres de quelques étoiles du Catalogue de Paris.**

Dans la préface du Tome II du Catalogue de l'Observatoire de Paris, on trouve une liste d'étoiles dont les discordances s'expliquent autrement que par l'existence d'un mouvement propre. Le Tableau renferme aussi un certain nombre d'étoiles avec indications de mouvements propres, mais pour lesquelles les positions intermédiaires sont trop peu nombreuses pour permettre de conclure avec certitude. Ce sont ces étoiles que M. Porter a observées depuis 1896, pour décider si le mouvement propre soupçonné existe réellement; la question a pu être presque toujours tranchée. Dans quelques cas, le mouvement propre avait été déjà confirmé par d'autres astronomes.

Blajko (*S.*). — Sur le réglage de la monture parallactique.

M. Blajko propose une méthode de réglage qui, simple dans l'application et exacte dans les résultats, n'exige ni cercles divisés ni mouvement d'horlogerie, et ne demande qu'un micromètre filaire qui, dans le cas de la lunette photographique, peut être remplacé par la plaque elle-même. Elle repose sur l'emploi de trois circompolaires dont les ascensions droites sont séparées par des intervalles de six heures.

Nyland. — Observations des Perséides, obtenues à Utrecht en 1897.

Hisgen (*J.*). — Remarques concernant la position de la variable RS Cygne.

Barnard (*E.-E.*). — Le troisième et le quatrième satellite de Jupiter (avec une planche).

Avec le grand réfracteur de l'observatoire Lick, M. Barnard a pu, maintes fois, étudier les deux satellites, dans de bonnes conditions atmosphériques. Il n'a jamais remarqué l'ellipticité dont il a été parlé. Il n'a pas vu davantage les systèmes de lignes noires, notés par M. Douglass. Il a seulement vu des taches polaires blanches, des bandes larges et diffuses, etc., dont il donne les dessins.

Barnard. — Curieuse coïncidence.

M. Barnard s'est aperçu qu'en 1886 et en 1887, il avait rapporté deux comètes différentes à la même étoile de comparaison (Yarnall 6444).

Digitized by Google

Barnard. — Sur un instrument propre à photographier un corps céleste qu'on ne voit pas, mais dont la présence est connue.

Pour retrouver une comète ou un astéroïde dont on sait la position approximative, on aura volontiers recours à la Photographie. Mais le déplacement trop rapide de l'objet en question pourrait rendre l'impression trop faible. M. Barnard a imaginé un dispositif par lequel il devient possible de fixer l'image de l'objet à photographier pendant que les étoiles se déplacent dans le champ, et laissent des traces sur le cliché.

Evdokimow. — Observations des Léonides, faites à Kharkow en 1896.

Thome. — Remarques concernant les variables australes, signalées par M. Gill.

Bauschinger. — Éphéméride pour la deuxième opposition de la comète Brooks (1889 V; 1896 VI).

Il ne paraît pas que la comète ait été retrouvée dans la seconde opposition, en janvier 1898.

Perrine. — Découverte d'une nouvelle comète (16 octobre 1896).

Hussey, Aitken, Kreutz. — Éléments et éphéméride de la nouvelle comète Perrine.

Weiler (*A.*). — Sur le développement de la puissance $\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$.

Weiler. — Sur les perturbations des petites planètes dont le moyen mouvement est approximativement le double de celui de Jupiter.

Schur. — Errata de la Note relative aux variables δ Céphée, η Aigle et β Lyre.

See. — Sur la nature des petites ondulations de l'air, visibles

Digitized by Google

dans les courants qu'on observe à travers une lunette (avec une Planche).

Les courants qui sillonnent l'atmosphère se composent d'innombrables filets où se succèdent des ondes plus ou moins larges qui, traversées par un faisceau lumineux, deviennent visibles par suite des variations de densité qu'elles entraînent et qui correspondent à des variations de la pression, de la température, de l'humidité, etc. Elles donnent lieu à des réfractions irrégulières qui troublent les images des étoiles et rendent la définition mauvaise. M. See a dessiné quelques-uns des réseaux d'ondes qu'il a eu l'occasion d'observer, en même temps que l'aspect des images qui en résulte.

See. — Sur la cause de la scintillation des étoiles.

Les ondulations de l'air, qui sont déterminées par les courants atmosphériques, sont, sans doute, l'une des causes principales de la scintillation (c'était déjà l'opinion de Brandes). Les ondes agissent comme des lentilles mobiles, qui produisent des déviations et une dispersion chromatique sans cesse changeante. Il y avait intérêt à étudier la scintillation avec des lunettes de dimensions très différentes, en même temps que les ondes atmosphériques. La scintillation diminue ou disparaît quand l'ouverture de la lunette est plus grande que la longueur des ondes. La fréquence des éclairs est la même que celle des ondulations qui passent (on en compte en moyenne deux par seconde). M. See rappelle enfin, en y apportant quelques modifications, la théorie de la scintillation qu'a donnée lord Rayleigh (voir *Bull.*, t. XII, p. 531).

See. — Recherches sur l'orbite de l'étoile double $\beta 395 = 82$ Baleine.

Ce couple, découvert par Burnham en 1875, a une période très courte ($16^a,3$) et une forte excentricité ($a = 0'',566$; $e = 0,59$). Le système a un mouvement propre de $1'',46$, et il doit être recommandé aux observateurs.

Geelmuyden. — Quelques observations faites à bord du *Fram*.

M. Geelmuyden a examiné les nombreuses observations, faites, de 1893 à 1896, par le lieutenant Scott-Hansen, à bord du *Fram*, le navire de Nansen, à quelques degrés du pôle Nord et par des températures qui descendent parfois à — 50° C. Il y a là surtout 80 éclipses des satellites de Jupiter, deux éclipses de Soleil, etc.

Digitized by Google

Höffler (*Frédéric*). — Essai de détermination de la parallaxe du système formé par la Grande Ourse.

On soupçonnait depuis longtemps que les cinq étoiles β, γ, δ, ε, ζ de la Grande Ourse devaient former un système physique, emporté dans l'espace par des vitesses de translation égales et parallèles. Les déterminations de leurs vitesses radiales, obtenues à Potsdam, ont pleinement confirmé cette présomption; les étoiles β, γ, ε, ζ s'approchent de nous avec des vitesses à peu près égales. On peut se servir de ces vitesses et des mouvements propres observés pour essayer de déterminer les parallaxes de ces étoiles, ou du moins la parallaxe moyenne du système. Ce qui rend cette détermination assez difficile, c'est que les cinq étoiles en question paraissent être comprises dans un même plan, qui est aussi celui de leurs orbites. M. Höffler montre que cette hypothèse permet de représenter d'une manière assez satisfaisante les mouvements propres en ascension droite et en déclinaison, ainsi que les vitesses radiales. Pour la vitesse relative de translation du système, on trouve 9,64 rayons de l'orbite terrestre par an (46 kilomètres par seconde); sa parallaxe moyenne ne serait que de 0",0165, c'est-à-dire beaucoup plus faible qu'on ne l'aurait supposé, puisqu'on admet que les parallaxes des étoiles de 2e à 3e grandeur atteignent en moyenne 0",10. La parallaxe de 0",0165 correspond à une distance de 12500000 rayons de l'orbite terrestre, et l'écartement des étoiles β et ζ Grande Ourse dépassait 4 millions de rayons. La quantité de lumière émise par l'étoile ε Grande Ourse serait 40 fois plus grande que celle que rayonne Sirius.

Pannekoek (*A.*). — Recherches sur les variations d'éclat de l'étoile β Lyre.

M. Pannekoek donne le résumé d'un Mémoire qu'il a publié, sous ce titre, dans le Recueil de l'Académie des Sciences d'Amsterdam. Les observations, très nombreuses, qu'il a pu utiliser s'étendent sur un intervalle de 110 ans.

Schæberle. — Sur un défaut capital des réflecteurs paraboliques.

Le défaut assez grave des images formées par les réflecteurs paraboliques, sur lequel M. Schæberle attire l'attention, résulte de ce fait que le foyer n'est pas le centre de courbure de la surface réfléchissante. Dès lors les images d'objets d'une certaine étendue angulaire paraîtront mal définies. Pour obtenir une définition satisfaisante, il faut avoir soin d'amener l'axe optique au centre du champ, de n'observer qu'à quelques

Digitized by Google

secondes en dehors de l'axe, et le rapport entre la distance focale et l'ouverture ne doit pas être inférieur à 14.

Seeliger. — Remarque relative à la Note de M. Dziobek sur l'instabilité de l'équilibre.

La démonstration de M. Dziobek a besoin d'être complétée par certaines considérations relatives aux termes du troisième ordre et des ordres suivants, dont on ne peut faire abstraction *a priori*, comme l'a montré M. Liapounoff (voir le résumé de ses recherches sur l'instabilité des systèmes mécaniques dans le *Journal de Mathématiques pures*, 1897).

Möller (*J.*). — Éphéméride de la comète Perrine (oct. 16).

Coniel. — Éphéméride de la planète 1897 DJ.

Battermann (*H.*). — Observations systématiques d'occultations d'étoiles par la Lune, faites à Berlin.

Cette série d'observations a été exécutée pendant les années 1894-1897, en vue d'une nouvelle détermination de l'inégalité parallactique de la Lune et, par suite, de la parallaxe solaire Elle comprend 640 occultations; parmi lesquelles se trouvent des occultations des Pléiades, déjà publiées séparément à diverses époques. M. Battermann espère pouvoir s'occuper prochainement de la discussion de ces matériaux. Il serait à désirer que des observations analogues fussent exécutées, pendant quelques années, sous une latitude moins élevée, afin qu'il fût possible de les répartir également sur toutes les parties de l'orbite lunaire.

Tucker (*R.-H.*). — Corrections des positions de quelques circompolaires.

Ces corrections des positions adoptées par le *Jahrbuch* sont déduites d'observations méridiennes, faites à l'observatoire Lick; elles s'accordent assez bien avec les corrections provisoires, établies par M. Auwers.

Iwanow. — Éphéméride de la planète (122) Gerda.

Schur. — Mort de M. Schering.

Le 2 novembre 1897 est mort, à Gœttingue, le professeur Ernest-

Digitized by Google

Christian-Julius Schering, connu surtout comme géomètre et comme physicien. Il était né en 1833, à Sandbergen (près de Lunebourg). Depuis 1869, il dirigeait la section de l'observatoire de Gœttingue, consacrée au Magnétisme terrestre, où se continuent les recherches inaugurées par Gauss. Il avait été aussi chargé de la publication des Œuvres de Gauss. Parmi ses travaux personnels, il convient de citer la généralisation des formules de perturbation de Poisson-Jacobi (1874). Il avait épousé une fille du mathématicien suédois Malmstén.

R. R.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

T. CXXV, nos 20-26.

Lœwy (*M.*). — Observation de l'essaim des Léonides faite à l'Observatoire de Paris, dans les nuits du 13 au 14 et du 14 au 15 novembre 1897 (p. 751).

L'essaim des Léonides est en connexion étroite avec la comète 1868 I; et la masse la plus importante de cet essaim rencontre la Terre tous les 33ans,25.

En novembre 1897, l'observation a été bien contrariée par les nuages; toutefois on a pu s'assurer que la chute n'a pas été abondante; et ce résultat est confirmé par les observations faites en beaucoup d'autres observatoires.

Hansky. — Observations des étoiles filantes les *Léonides* à l'observatoire de Meudon (p. 759).

La couleur des Léonides était un peu bleuâtre, tandis que d'autres étoiles filantes étaient jaunes. M. Janssen (p. 759 et 803) appelle l'attention sur cette différence d'aspect.

Hamy (*Maurice*). — Principes mécaniques qui ont permis de réaliser un bain de mercure à couche épaisse à l'Observatoire de Paris (p. 760).

Voir *Bulletin*, XV, p. 172.

Crova (*A.*). — Sur l'enregistrement de l'intensité calorifique de la radiation solaire (p. 804).

M. Crova avait montré antérieurement que l'enregistrement de l'in-

Digitized by Google

tensité calorifique de la radiation solaire permet de tenir compte de ses fluctuations et d'arriver ainsi, par le tracé d'une courbe diurne en une seule station, à des déterminations très approchées de la constante solaire.

L'instrument employé d'abord était très délicat, long à installer et difficilement transportable. Mais, comme les observations à de hautes altitudes permettent de diminuer considérablement les diverses influences perturbatrices, M. Crova a modifié son appareil de manière à le rendre très léger, facile à installer rapidement, de manière à pouvoir être transporté aux plus grandes altitudes; d'ailleurs, ce résultat a été atteint sans nuire ni à la sensibilité ni à la précision de l'instrument.

Ce nouvel appareil, après avoir fonctionné à Montpellier, a été employé par M. Hansky au sommet du mont Blanc, et il a supporté tous ces transports sans subir d'avarie.

Crova et *Hansky*. — Observations actinométriques faites sur le mont Blanc (p. 917).

Ces observations ont été faites avec l'instrument portatif dont on vient de parler. Elles ont donné, pour la constante solaire, la valeur moyenne $3^{\text{Cal}},4$; et comme les conditions atmosphériques étaient peu favorables, les auteurs pensent que dans les meilleures conditions on pourrait obtenir pour cette constante des valeurs voisines de 4 calories.

Mailhat (*R.*). — Sur divers perfectionnements apportés à un anémomètre système Bourdon (p. 830).

Lagrula. — Sur deux occultations des Pléiades par la Lune (p. 851).

Voir *Bulletin*, t. XIV, p. 466.

Mascart (*Jean*). — Emploi de la méthode des moindres carrés pour révéler la présence d'erreurs systématiques (p. 852 et 924).

Les observations successives du nadir faites au grand cercle méridien de l'Observatoire de Paris présentent des écarts incompatibles avec la précision de l'instrument, car ils atteignent jusqu'à 10″ dans l'intervalle d'un mois. Écartant les erreurs fortuites et les corrections déjà adoptées pour ces mesures, l'auteur cherche l'influence de l'état astronomique ou météorologique au moment de l'observation; en particulier, l'emploi d'une formule à deux termes pour tenir compte, avec la

Digitized by Google

température, des déplacements relatifs du cercle et du pilier, paraît donner de précieuses indications. La valeur élevée des coefficients montre que la correction correspondante est indispensable et qu'il faudrait aussi tenir compte de l'état dynamique du pilier relativement à la température. La discussion d'un plus grand nombre d'équations permettra sans doute de déterminer avec plus de rigueur l'influence de la température.

Guillaume (*J.*). — Observations du Soleil faites à l'observatoire de Lyon (équatorial Brunner de $0^m,16$) pendant le troisième trimestre de 1897 (p. 855).

Le nombre et l'étendue des taches est très légèrement supérieur à celui du second trimestre.

Vallot (*J.*) et Mme *Gabrielle Vallot*. — Influence de l'altitude et de la chaleur sur la décomposition de l'acide oxalique par la lumière solaire (p. 857).

M. Duclaux a créé récemment une nouvelle méthode d'actinométrie chimique, basée sur la décomposition par la lumière d'une solution d'acide oxalique préparée dans certaines conditions : c'est cette méthode qui a été appliquée par les auteurs de la Note dans des observations simultanées faites, les unes à Chamonix (1095^m), et les autres au Montanvert (1925^m); voici les résultats obtenus :

1° La décomposition chimique a toujours été beaucoup plus considérable à la station supérieure (deux fois plus grande en moyenne pour différence d'altitude de 830^m).

2° Le verre arrête une grande partie des rayons chimiques (la moitié environ pour une cloche de verre très mince).

3° La chaleur, qui n'a qu'une très faible action décomposante par elle-même, acquiert une puissance très considérable à la lumière.

4° Dans l'action combinée de la lumière et de la chaleur, c'est la lumière qui produit l'effet prépondérant.

Hamy (*Maurice*). — Sur l'approximation des fonctions de grands nombres (p. 926).

Janssen (*J.*). — Sur les travaux exécutés en 1897 à l'observatoire du mont Blanc (p. 992).

Détermination de la constante solaire par MM. Crova et Hansky

Digitized by Google

(*voir* ci-dessus). Considérations sur la détermination de cette constante et raisons de penser que nous obtenons généralement des valeurs trop faibles.

Lœwy (*M.*). — Présentation des publications annuelles du Bureau des Longitudes : *Connaissance des Temps* pour 1900 et *Annuaire* pour 1898 (p. 1008).

Parmi les additions faites à ce Volume de la *Connaissance des Temps* figure un Tableau nouveau donnant les éléments des orbites de toutes les comètes périodiques.

Quant à l'*Annuaire* pour 1898, il a été enrichi de données relatives aux marées (M. Hatt) et au magnétisme : M. Moureaux y a donné de nouvelles cartes magnétiques de la France, se rapportant au 1er janvier 1896 et basées sur les observations les plus récentes.

Dans les Notices, M. Poincaré a traité de la stabilité du système solaire; M. Cornu a exposé les travaux scientifiques de Fizeau; M. Janssen a rendu compte des travaux accomplis à l'observatoire du mont Blanc; MM. Lœwy et Puiseux y donnent une étude sur la constitution de l'écorce lunaire.

Enfin, cette partie de l'*Annuaire* se termine par les discours prononcés à l'occasion du cinquantenaire académique de M. Faye.

Perchot (*J.*) et *Ebert* (*W.*). — Sur une nouvelle méthode pour déterminer la verticale (p. 1009).

Cette nouvelle méthode, proposée par M. Deichmüller, consiste dans l'emploi d'un miroir zénithal flottant sur un bain de mercure. Les auteurs étudient un instrument de ce genre construit pour le cercle du jardin de l'Observatoire de Paris et qui a présenté, d'abord, cet inconvénient, que lorsqu'on avait tourné le miroir de un ou de plusieurs tours et revenant à la première position, on ne retrouvait plus la même coïncidence. « Cela provenait, à notre avis, disent-ils, d'une trop grande liberté du miroir. A l'aide de trois vis, à 120° l'une de l'autre, nous avons limité, autant que possible, le mouvement du miroir, sans le gêner. L'instrument ainsi modifié est utilisable. »

Lœwy (*M.*). — Détermination des coordonnées absolues des étoiles, ainsi que de la latitude, à l'aide des instruments méridiens.

Méthode générale pour la solution de ces divers problèmes (p. 1062).

Digitized by Google

Méthode spéciale pour la détermination absolue des déclinaisons et de la latitude (p. 1142).

Méthode générale pour la détermination des étoiles fondamentales et de la latitude (p. 16 du vol. CXXVI).

Painlevé. — Sur les cas des problèmes des trois corps (et de *n* corps) où deux des corps se choquent au bout d'un temps fini (p. 1078).

Rouget (*Ch.*). — Sur un mode particulier d'observations circumzénithales (p. 1081).

Hamy (*Maurice*). — Sur un appareil permettant de séparer des radiations simples très voisines (p. 1092).

La description et l'usage de cet appareil seront publiés dans le *Bulletin*.

Éginitis (*D.*). — Observation de l'essaim des Orionides des 12-14 décembre à Athènes (p. 1158).

Le 12 décembre 1896, M. Eginitis observa une pluie météorique assez abondante, qui se trouva appartenir à un radiant nouveau pour lequel on trouva : $\alpha = 87°25'$, $\delta = +7°23'$.

En 1897, le nouvel essaim a donné encore des météores; malheureusement les conditions d'observation se sont trouvées des plus défavorables. Quelques trajectoires, notées les 12, 13 et 14 décembre, ont donné pour la position du radiant : $\alpha = 82°$; $\delta = +5°$.

En même temps que l'essaim des Orionides on a observé quelques météores appartenant à l'essaim des Gémeaux; et leurs trajectoires ont donné, pour la position du radiant : $\alpha = 101°$, $\delta = +34°$.

Curie (Mme *Sklodowska*). — Propriétés magnétiques des aciers trempés (p. 1165).

Planète Villiger (1897, nov. 19). — Observations par MM. Rambaud et Sy.

G. B.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

ÉTUDES PHOTOGRAPHIQUES SUR QUELQUES PARTIES DE LA SURFACE DE LA LUNE;

PAR MM. LŒWY ET PUISEUX.

Nous avons eu l'honneur de présenter à l'Académie le troisième fascicule de l'*Atlas photographique de la Lune,* publié par l'Observatoire de Paris. Ce fascicule comprend, comme le précédent, un Mémoire descriptif et théorique et sept Planches dont six sont du format $0^m,50$ sur $0^m,60$. Quelques-unes de ces Planches présentent sous un jour nouveau des parties de notre satellite déjà figurées antérieurement. D'autres sont relatives à des régions que les feuilles précédentes avaient laissées entièrement dans l'ombre.

La moisson d'aperçus nouveaux que cette publication suggère ou fait pressentir est considérable. L'espèce de monotonie qui semble régner à la surface de la Lune, si l'on y jette un coup d'œil superficiel, fait place, quand on y regarde de plus près, à une richesse et à une variété très grandes. Avant de dégager quelques conclusions théoriques, nous essayerons d'analyser en peu de mots le caractère particulier de chacune des feuilles qui composent ce troisième fascicule.

La *Pl. C* comprend, de même que celles qui ouvrent les deux séries précédentes, toute la partie de la Lune visible au moment de l'observation. Mais ici la phase est plus voisine de la conjonction; par suite la région représentée est moins étendue et les détails s'y accumulent dans une perspective fuyante, qui rend parfois les interprétations difficiles. Cette épreuve offre un aspect expressif et un relief intense, dû au passage rapide de l'ombre à la lumière. Elle a pour nous un prix particulier en raison des difficultés spéciales qu'il a fallu vaincre pour l'obtenir. On conçoit, en effet, qu'aux époques où la Lune est peu éloignée du Soleil on se trouve dans l'alternative ou d'opérer à la pleine lumière du jour, ce qui tend à voiler les plaques sensibles, ou de laisser la Lune s'approcher de l'horizon à une distance incompatible avec

Digitized by Google

le calme des images. Aussi n'y a-t-il pas plus de trois ou quatre jours chaque année où cette phase puisse être photographiée dans des conditions convenables, et il faut en outre un concours assez rare de circonstances atmosphériques.

L'objet le plus apparent sur cette feuille est la mer des Crises; mieux qu'aucune autre des grandes taches grises de la Lune, elle manifeste les caractères généraux qui les rapprochent des cirques : contour régulier, surface intérieure relativement unie et déprimée au-dessous du niveau moyen de la région, partie centrale séparée du reste par une ligne d'affaissement circulaire.

Cette disposition concentrique se reconnaît aussi dans la mer de la Fécondité, toute voisine de la première. Ici les lignes de séparation entre les zones successives sont des digues saillantes plutôt que de simples dénivellations, et les traces d'actions volcaniques abondent sur le trajet de ces cordons. La forme polygonale commune à la mer des Crises et à beaucoup de cirques est très visible sur cette épreuve. Elle montre que les parties plus résistantes de la croûte solide se sont opposées à l'extension des aires d'affaissement. Cette circonstance contribue à rendre improbable la théorie qui veut que les mers, aussi bien que les cirques, soient des empreintes de projectiles.

Les grands cirques ne sont pas rares dans cette partie occidentale de la Lune, et quelques-uns sont au nombre des plus caractéristiques.

Petavius et Endymion sont à citer pour le sillon concentrique qui dédouble leur rempart; Petavius encore, pour la fissure médiane qui part de la montagne centrale, traverse la première enceinte et s'arrête à la seconde. Plusieurs autres se distinguent comme centres d'émanation de traînées blanches. Des alignements de cirques suivant le méridien se rencontrent ici comme dans d'autres parties de la Lune; mais à mesure que l'on approche du bord, on voit les plis de terrain, aussi bien que la teinte du sol, se distribuer de plus en plus suivant des lignes d'égale longitude. La recrudescence d'éclat qui se manifeste sur les calottes polaires se limite, dans la région équatoriale, à une bande étroite formant la limite du disque visible. Ce fait, constaté sur de nombreux clichés, et, à ce qu'il semble, indépendant de la phase, mérite une attention particulière. Nous reviendrons un peu plus loin sur l'interprétation qu'il convient de lui donner.

Digitized by Google

La *Pl. XII* reproduit à une échelle plus grande la partie sud du cliché précédent. On y voit apparaître avec plus de clarté les caractères spéciaux de Petavius et de Furnerius, imités plus ou moins fidèlement par beaucoup de cirques de la même région.

On y rencontre aussi, près de Rheita, le spécimen le plus imposant et le mieux placé pour l'étude des grandes vallées rectilignes à bords parallèles. Divers signes s'accordent pour faire attribuer à ces vallées une antiquité très haute. Leur netteté et leur continuité ont quelque peu souffert par la formation de cirques sur leur parcours; mais la distribution de ceux-ci est évidemment subordonnée dans une grande mesure à l'existence préalable des vallées.

Le contraste entre les mers et les régions montagneuses s'accuse avec une extrême énergie sur la *Pl. XIII,* où l'on voit les masses énormes du Caucase et des Apennins former barrière entre la mer des Pluies et celle de la Sérénité.

Ces deux vastes bassins, développant leurs rivages en courbe régulière, arrivent à empiéter l'un sur l'autre. Ils communiquent ainsi, entre les Apennins et le Caucase, par une trouée, à partir de laquelle les deux massifs vont en s'évasant, l'un vers le nord, l'autre vers le sud.

Le Caucase, plus complètement figuré, se montre divisé en plusieurs blocs bien distincts, qui ont dû anciennement ne faire qu'un tout, et subir les uns par rapport aux autres des mouvements de rupture et de dérive. Une disjonction semblable paraît avoir eu lieu entre les deux bords de la grande vallée des Alpes.

Moins abruptes dans leur ensemble que le Caucase, les Alpes offrent une large bande hérissée de pitons à peu près semblables, et atteignent leur plus grande altitude à la limite de la mer des Pluies.

Elles se fondent, au contraire, insensiblement dans la mer du Froid, qui est une des régions les plus unies de la Lune.

Au delà recommence une zone montagneuse qui s'étend jusqu'au pôle nord, et qui est remarquable, comme les Alpes, par l'absence presque complète de formes régulièrement circulaires. Le relief du sol y est plutôt constitué par un réseau de nervures qui manifestent une tendance à se grouper en losanges.

Relativement clairsemés dans cette feuille, les cirques se

Digitized by Google

montrent prodigieusement abondants dans la suivante (*Pl. XIV*) qui nous ramène au voisinage du pôle sud. Entre toutes ces formations accumulées, Tycho se recommande spécialement à l'étude comme étant le centre du rayonnement le plus vaste que l'on aperçoive sur la Lune. Ni l'éclairement, ni l'échelle ne sont ici favorables pour mettre cette circonstance en lumière.

Mais Tycho révèle aussi sa prépondérance par la disposition en ceintures successives que les formations voisines affectent autour de lui. Il accuse encore sa jeunesse relative par l'énergie de son relief et l'intégrité de sa crête.

Comme témoins d'une période plus ancienne, on retrouve ces arêtes et ces sillons, déjà rencontrés dans les fascicules précédents, disposés par séries parallèles et formant souvent tangente commune au rempart de deux ou trois cirques. Deux de ces traits rectilignes, le mur droit de Birt et la crevasse d'Hésiode, sont particulièrement nets.

Ils courent dans des directions à peu près perpendiculaires à la limite de la région montagneuse et de la plaine.

L'un et l'autre paraissent devoir leur naissance à un affaissement suivi de rupture, le mouvement s'étant accompli, pour le mur droit, dans le sens vertical, et s'étant compliqué, pour la crevasse d'Hésiode, d'un glissement tangentiel.

Les deux Planches suivantes (*Pl. XV* et *XVI*) représentent une même région sous deux éclairements contraires, de part et d'autre de l'opposition. Elles sont occupées, pour la plus grande partie, par des régions de plaine. Les massifs montagneux qui s'y rencontrent (Carpathes et monts Riphées) n'ont qu'une faible étendue.

Leur isolement, le tracé concave de leurs limites rappellent, comme dans le cas des Apennins, la forme des découpures que l'on obtient dans une surface plane, quand on y pratique des ouvertures circulaires empiétant les uns sur les autres.

De beaux cirques, réguliers et profonds, apparaissent semés de distance en distance, sans lien apparent entre eux ni avec les groupes de montagnes. Copernic, le plus vaste et le plus remarquable à tous égards, résume à lui seul presque toutes les particularités que l'on peut relever isolément sur les autres. Les plis de terrain qui le constituent, nettement concentriques au voisi-

Digitized by Google

nage de l'ouverture, prennent, quand on s'éloigne en dehors d'un certain rayon, la disposition rayonnante et la conservent tant que la pente du sol demeure orientée dans le même sens. La situation isolée de Copernic et des cirques voisins, au milieu d'une plaine semée de légers accidents, est très propre à manifester l'origine et la disposition des traînées divergentes qui en émanent dans tous sens. On s'assurera par la comparaison des deux feuilles que ces dépôts de couleur claire deviennent visibles seulement quand le Soleil est assez élevé, qu'ils n'atteignent nulle part une épaisseur appréciable, que leur direction est indépendante des accidents superficiels qu'ils rencontrent, qu'ils sont sujets à disparaître au passage de certains bassins déprimés et reprennent au contraire un éclat plus vif quand ils atteignent, en s'éloignant de leur point d'origine, des élévations du sol.

Tout autre est l'aspect présenté par la feuille *XVII*, qui nous montre, quelques jours après l'opposition, la partie la plus sauvage et la plus tourmentée de la calotte australe. La comparaison avec la feuille *XIII* rend visible au premier coup d'œil la différence de condition des deux pôles. Nulle part la mesure des ombres n'indique de profondeurs aussi grandes que dans le voisinage du pôle sud. On reconnaît ici l'existence de plis de terrain très puissants, dirigés parallèlement. Des cirques considérables se sont formés en travers de ces rides, sans les détruire, et ont ajouté leur cavité propre aux différences de niveau déjà existantes.

Il est intéressant de rapprocher la feuille *XVII* de la *Pl. XII*, la même région étant représentée dans l'une un peu avant le coucher du Soleil, dans l'autre un peu après le lever. L'accord est presque parfait en ce qui concerne le relief du sol, la délimitation des cirques, les petits cratères entourés ou non d'auréoles blanches. Mais les divergences apparaissent si l'on s'attache à l'examen des taches sombres qui occupent, en général, le fond des dépressions. Plusieurs de ces taches, visibles sur la première feuille, manquent absolument sur la seconde. Celles qui se retrouvent de part et d'autre se montrent, après l'opposition, plus accentuées et plus étendues. D'autre part, l'altitude du Soleil est déjà trop grande pour que ces changements puissent être imputés à la marche des ombres. Il semble donc certain que l'action prolongée des rayons solaires fait subir à la teinte relative de cer-

Digitized by Google

taines régions de la Lune une altération temporaire, soumise à une même périodicité que les phases. Des faits de ce genre ont été signalés déjà par des observateurs armés de lunettes. La Photographie nous permettra, sans doute, de multiplier les constatations et de préciser la loi du phénomène.

Nous nous sommes placés, dans ce qui précède, au point de vue purement descriptif, et nous nous sommes limités aux faits qui peuvent être aisément vérifiés à l'inspection de notre Atlas. Nous chercherons maintenant à coordonner ces remarques et à formuler quelques conclusions théoriques.

En premier lieu, nous observerons que la distribution de l'intensité lumineuse sur le disque lunaire paraît obéir à quelques lois simples dont voici l'énoncé :

1° Abstraction faite des inégalités locales, il y a progression continue d'éclat quand on va du terminateur au bord éclairé, avec coïncidence approximative entre les courbes d'égal éclairement et les méridiens;

2° Toutefois, sur un même méridien, une recrudescence appréciable se manifeste à proximité des pôles, notamment du pôle sud;

3° Il y a aussi augmentation d'intensité dans le voisinage immédiat du bord, quelles que soient la latitude et la phase que l'on considère.

La première loi comporte une explication théorique satisfaisante, si l'on regarde la Lune comme un globe uniforme dans sa constitution superficielle, dénué d'atmosphère appréciable, hors d'état d'exercer une réflexion spéculaire sensible, et renvoyant indifféremment vers tous les points de l'espace la lumière reçue. Dans ces conditions, l'intensité relative s'exprime simplement en fonction de la longitude et de la latitude sélénocentriques du lieu lunaire, ainsi que de la différence des longitudes de la Lune et du Soleil. On trouvera cette formule démontrée dans le Mémoire qui accompagne le troisième fascicule. On reconnaît ainsi que les courbes d'égal éclairement sont des méridiens, et que l'intensité croît du terminateur au bord.

La légère dérogation à cette règle, qui se manifeste près des pôles, a déjà attiré notre attention dans la première partie du travail.

Nous y avons vu la preuve que ces portions de l'écorce s'étaient

Digitized by Google

solidifiés de bonne heure et avaient acquis rapidement une grande épaisseur. Par là les calottes polaires ont échappé aux inondations venues de l'intérieur qui ont transformé l'aspect de la région équatoriale. Elles se sont trouvées plus rapidement aptes à recevoir les dépôts de cendres de la période volcanique, causes principales des contrastes de teinte que nous observons aujourd'hui.

On peut chercher à remonter plus loin et à rendre compte de cette solidification précoce des régions polaires. Il est évident d'abord que le refroidissement a dû y progresser plus vite sous l'influence d'un rayonnement solaire moins efficace. Nous ajouterons que les marées d'origine terrestre y provoquaient des oscillations moins amples que dans les régions équatoriales et animées d'une moindre vitesse de propagation. La soudure des scories superficielles s'est donc effectuée près des pôles avec une facilité bien plus grande.

Arrivons maintenant au troisième fait, c'est-à-dire à l'augmentation anormale d'intensité lumineuse près du bord.

Celle-ci ne peut être une conséquence du mode d'opération photographique adopté, qui serait, au contraire, de nature à l'atténuer. Elle se manifeste sous toutes les latitudes et dans toutes les phases. En particulier, les épreuves prises pendant l'éclipse partielle du 7 janvier 1898 montrent que l'accroissement d'intensité sur les bords est encore très sensible à l'opposition, c'est-à-dire au moment où le calcul assignerait au disque lunaire un éclat uniforme.

Il semble qu'aucune théorie purement géométrique ne rende compte de cette apparence, si l'on ne suppose pas qu'elle tient réellement à l'état physique spécial de cette partie de la surface, c'est-à-dire que non seulement les calottes polaires, mais toutes les régions qui forment pour nous le contour apparent de la Lune sont, dans leur ensemble, de couleur plus claire que les autres parties du disque.

Ici encore les marées d'origine terrestre, déjà étudiées à d'autres points de vue par MM. Faye et Poincaré, paraissent avoir joué un rôle essentiel. Leur caractère s'est totalement modifié du jour où la durée de la rotation de la Lune sur elle-même est devenue égale à celle de la révolution. Le flux périodique qui parcourait antérieurement toute la région équatoriale a fini par s'accumuler dans

Digitized by Google

la portion du disque qui voit aujourd'hui la Terre près de son zénith. D'ailleurs notre globe, encore incandescent, pouvait alors constituer pour son satellite une source de chaleur importante. Les parties voisines du bord sont donc entrées à leur tour avant les autres parties de la surface dans cette période de température basse et de calme relatif qui a favorisé la consolidation des régions polaires. Ces considérations, tant géométriques que physiques, expliquent bien, à ce qu'il nous semble, la répartition apparente de lumière sur le disque de la Lune.

Les caractères propres aux latitudes élevées sont bien mis en évidence dans les nouvelles feuilles. Pas plus sur un pôle que sur l'autre, nous ne trouvons d'indication d'un revêtement de glace ni de signes d'une érosion active. Mais la différence d'aspect entre les deux calottes polaires n'en est pas moins très prononcée. Au sud, les cirques vastes et profonds s'accumulent par une série de rides parallèles. Vers la limite nord du disque, les formes circulaires régulières demeurent à l'état d'exception. Les plis de terrain qui en émergent n'ont qu'une médiocre saillie, et se disposent en réseau, de manière à encadrer des bassins quadrangulaires. La différence d'aspect qui existe aujourd'hui entre les deux pôles indique, croyons-nous, que l'inclinaison de l'axe de rotation de la Lune sur le plan de l'orbite a dû subir des variations importantes. La même conclusion s'est déjà présentée à nous comme conséquence de la distribution des mers en ceinture inclinée sur l'équateur, et l'on sait que M. Darwin et d'autres géomètres y ont été conduits par des raisons tirées de la Mécanique céleste.

La rareté relative des accidents volcaniques dans la partie nord y laisse mieux apercevoir les fragments de plateaux anciens, interposés entre les mers, plus ou moins rongés sur leurs bords par l'affaissement de celles-ci et devenus ainsi quelque peu semblables aux groupes de montagnes terrestres. Ces massifs, plutôt analogues à des amas de scories qu'à de véritables chaînes ramifiées, sont partagés en plusieurs fragments par des cassures rectilignes, dont la grande vallée des Alpes constitue l'exemple le plus célèbre et le plus net. Il semble difficile d'expliquer ces divisions, si l'on n'admet pas, avec le professeur Suess, que les portions séparées ont éprouvé, les unes par rapport aux autres, des mouvements de glissement ou de dérive.

Digitized by Google

Si de ces traits généraux nous descendons dans le détail, nous trouvons de nombreux exemples venant à l'appui des vues que nous avons émises au sujet de la formation des cirques.

On doit considérer comme accident volcanique, au sens large du mot, toute rupture d'équilibre qui amène à la surface déjà solidifiée des émissions de matières liquides, pulvérulentes ou gazeuses. Les déformations visibles et permanentes que de tels phénomènes peuvent produire se rangent dans trois catégories principales : apparition de crevasses ou de cônes éruptifs, épanchement de laves, dépôt de poussières ou de projectiles rejetés avec explosion.

De pareilles traces se montrent d'autant plus fréquentes que l'on étudie de plus près la surface lunaire, et il est certain que, si les crevasses n'y apparaissent pas en plus grand nombre, la faute en est à l'insuffisance de nos moyens optiques; de même que, sur la Terre, les épanchements de lave se manifestent sous deux formes : soit en coulées qui rayonnent autour d'un orifice central, soit en nappes largement étalées le long du trajet d'une crevasse. Ce dernier mode paraît devoir être invoqué pour expliquer les différences de teintes que l'on remarque entre certaines régions contiguës sans que la séparation corresponde à une ligne de niveau rigoureuse. Il se manifeste mieux encore par l'existence de veines saillantes et ramifiées, anciennes crevasses obstruées graduellement par des émissions de laves, et encore dessinées en creux sur certaines portions de leurs parcours.

La disposition rayonnante apparaît avec une clarté particulière dans la partie nord-est de la Lune, autour des cirques Lalande, Képler, Aristarque et Copernic. Masquée au voisinage immédiat de l'orifice par des bourrelets concentriques, elle se révèle sur les pentes extérieures par des plis de terrains dirigés dans le sens de la pesanteur, s'efface au passage d'une sorte de couronne sombre et reparaît sous forme de larges traînées rectilignes, s'étendant à des centaines de kilomètres de distance. Il nous semble absolument logique d'expliquer les plis concentriques par des affaissements, les plis divergents par des coulées liquides, la couronne sombre par des accumulations de débris ou de nappes stagnantes, les traînées par le transport aérien des poussières. Si rare, aujourd'hui, qu'elle se dérobe à l'observation, l'atmosphère lunaire a pu,

Digitized by Google

comme nous l'avons expliqué, posséder autrefois une densité suffisante pour servir de véhicule aux cendres volcaniques.

L'unité d'origine des traînées d'un même système ne saurait faire doute un moment, bien que l'on puisse voir parfois leur direction, leur largeur et leur éclat subir des variations brusques, sans relation nette avec la distance au cratère central. Deux causes perturbatrices sont ici suggérées par l'observation des faits : l'une est la rencontre de hautes montagnes, capables de diviser les courants atmosphériques, de provoquer des chutes et des condensations abondantes; l'autre, plus fréquente et plus efficace, est la présence de bassins déprimés, encore liquides à l'époque où les chutes de cendres se sont produites, hors d'état, par conséquent, de recevoir ou de conserver des dépôts superficiels.

Quelques-uns de ces bassins profonds seraient-ils, aujourd'hui encore, imparfaitement desséchés, et leur état physique changerait-il, par suite, avec une exposition prolongée aux rayons solaires? Les teintes vertes et rougeâtres que l'on constate, au voisinage du terminateur, dans l'intérieur de quelques cirques, portent à croire qu'il en est ainsi. Inférieure à l'œil dans l'appréciation des nuances, la Photographie reprend l'avantage pour l'enregistrement impartial des intensités lumineuses relatives. Elle a donc, sans contredit, le droit d'apporter son témoignage dans la question. La *Pl. XVII,* qui représente une région pour laquelle le Soleil se couche, doit être comparée, à ce point de vue, avec la *Pl. I,* où le jour commence sur les mêmes parages. Nous y trouvons des taches sombres, à fond plat, qui, dans l'intervalle, ont modifié leur teinte relativement aux plateaux voisins d'une manière très sensible. La réalité de ce changement a été confirmée par l'examen d'une série de clichés, échelonnés dans les phases intermédiaires.

Si l'on rapproche ces faits nouveaux de ceux que nous avons antérieurement recueillis, on ne trouvera point de difficulté à les faire rentrer dans un même cadre chronologique, et l'on pourra se faire une idée générale assez nette de la constitution et de l'histoire de notre satellite. Nous ne reprendrons point ici ce tableau d'ensemble, déjà esquissé comme conclusion du Mémoire qui accompagne la première partie de l'Atlas. Nous signalerons seulement, pour résumer ce qui précède, les principales questions dont

Digitized by Google

ce troisième fascicule nous semble devoir fournir ou avancer la solution. Ce sont :

Les causes de la solidification précoce et de la stabilité relative des régions polaires;

L'origine de l'éclat plus vif que l'on remarque au voisinage des pôles et, à un degré moindre, sur tout le bord apparent;

L'interprétation de la différence d'aspect qui s'observe actuellement entre les calottes polaires;

La nature volcanique des veines saillantes, des couronnes sombres et des traînées; les causes locales qui ont influé sur la répartition de celles-ci;

La dessiccation tardive de quelques bassins déprimés; l'indication des points qui doivent faire l'objet d'une attention particulière, si l'on veut manifester la persistance, à l'heure actuelle, de certains changements périodiques à la surface de la Lune.

SUR LES ÉQUATIONS DE POISSON;

PAR M. A. IVANOF.

Dans cette Note nous avons en vue de donner une méthode simple pour déduire les équations connues de Poisson. Cette méthode a une interprétation géométrique. En étudiant le mouvement de rotation de la Terre, on peut considérer le centre d'inertie comme immobile. Par rapport à des axes quelconques fixes dans l'espace, les équations différentielles du mouvement de rotation de la Terre peuvent être écrites de cette manière

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)dm=\Sigma(yZ-zY)\,dm,\\ &\Sigma\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)dm=\Sigma(zX-xZ)\,dm,\\ &\Sigma\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)dm=\Sigma(xY-yX)\,dm.\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, x, y, z désignent les coordonnées d'un élément dm de la Terre, et $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ les projections de la force perturbatrice.

Digitized by Google

Les équations (1) expriment que les dérivées des projections du moment principal des quantités de mouvement sont égales aux projections du moment principal de la force perturbatrice.

Mais on peut choisir les axes fixes d'une manière particulière.

On sait que l'axe de rotation peut être considéré comme entièrement coïncidant avec la perpendiculaire au plan invariable dans le mouvement de rotation.

Prenons pour les axes fixes : pour l'axe OX, la ligne d'intersection du plan invariable avec le plan de l'écliptique d'une époque quelconque; pour l'axe OY, la perpendiculaire à cette ligne, qui se trouve dans le plan invariable, et pour l'axe OZ, la perpendiculaire au plan invariable. Par rapport à ces axes, les équations différentielles du mouvement de rotation sont

$$(2)\qquad \begin{cases} dG_x = N'dt, \\ dG_y = M'dt, \\ dG_z = G'dt, \end{cases}$$

où G_x, G_y, G_z sont les projections sur les axes des coordonnées du moment principal G des quantités de mouvement; N', M', G' sont les projections du moment principal de la force perturbatrice.

Les équations (2) déterminent les accroissements des projections G_x, G_y, G_z dans un intervalle infiniment petit dt sous l'action de la force perturbatrice.

Par la méthode analytique, ainsi que par la méthode géométrique, on peut obtenir

$$\begin{aligned} dG_x &= G \sin\theta' d\psi', \\ dG_y &= G\, d\theta', \\ dG_z &= dG. \end{aligned}$$

Les angles d'Euler θ' et ψ' déterminent la position du plan invariable par rapport au plan de l'écliptique d'une époque quelconque. Les équations (2) se transforment maintenant dans les suivantes

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi'}{dt} = \dfrac{1}{G \sin\theta'} N', \\ \dfrac{d\theta'}{dt} = \dfrac{1}{G} M', \\ \dfrac{dG}{dt} = G'. \end{cases}$$

Digitized by Google

Il n'y a que les deux premières équations (3), qui nous intéressent.

Il nous reste à déduire les expressions pour N′ et M′.

On obtient facilement

$$N' = N + \delta N,$$
$$M' = M + \delta M,$$

où

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \theta},$$
$$M = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Dans les formules précédentes, U est la fonction perturbatrice; δN et δM contiennent les termes de courte période, qui sont en général 200000 fois inférieurs aux termes N et M. A cause de cela, si nous admettons que la Terre est un corps de rotation, c'est-à-dire que $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, nous pouvons écrire simplement

$$(4) \qquad \begin{cases} N' = -\dfrac{\partial U}{\partial \theta}, \\ M' = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \psi}. \end{cases}$$

Les angles d'Euler θ et ψ déterminent la position du plan des axes équatoriaux principaux d'inertie.

En faisant usage des expressions (4), nous trouverons au lieu des équations (3)

$$\frac{d\psi'}{dt} = -\frac{1}{G\sin\theta'}\frac{\partial U}{\partial \theta},$$
$$\frac{d\theta'}{dt} = +\frac{1}{G\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi}.$$

Enfin, avec la même précision qu'auparavant, on aura

$$\frac{d\psi'}{dt} = -\frac{1}{G\sin\theta'}\frac{\partial U}{\partial \theta'},$$
$$\frac{d\theta'}{dt} = +\frac{1}{G\sin\theta'}\frac{\partial U}{\partial \psi'}.$$

Ainsi, nous avons obtenu les équations de Poisson.

Nous exposerons cette question avec plus de détails en russe.

Digitized by Google

ÉLÉMENTS DE LA PLANÈTE (338) BUDROSA ET ÉPHÉMÉRIDE POUR 1899;

PAR M. J. CONIEL.

Nous avons publié dans le *Bulletin astronomique* (t. X, p. 230) des éléments de la planète (338), qui sont basés sur l'ensemble des sept observations faites en 1892, formant cinq lieux normaux. Cet astre a été retrouvé et deux fois observé dans l'opposition suivante de 1893. Ces observations, ramenées à l'équinoxe de 1892,0, sont :

		Temps moy. de Paris	λ 1892,0.	β 1892,0.
1893.	DÉC.....	15,36034	112° 1′45″,6	+0°51′29″,8
	DÉC.....	16,51806	111°50′24″,9	+0°49′32″,9

Nous avons déterminé approximativement les perturbations entre le 21,0 novembre 1892, date choisie arbitrairement pour l'époque de l'osculation, et le 16,0 décembre 1893. Les perturbations produites par Jupiter ont été calculées de 40 jours en 40 jours et celles provenant de l'action de Saturne de 80 jours en 80 jours. Dans tout cet intervalle de temps, nous avons conservé invariables les éléments de la planète.

Nous donnons ici la somme des perturbations produites par ces deux planètes entre les deux dates choisies :

	Jupiter.	Saturne.	Jupiter + Saturne.
ΔM.....	+3°.43′.59″,5	+2′.16″,0	+3°.46′.15″,5
Δφ.....	−0. 3.41,0	−0. 4.1	−0. 3.45,1
Δπ.....	−3.44.40,9	−2.12,8	−3.46.53,7
Δ☊.....	−0. 8.40,1	−0. 3,4	−0. 8.43.5
Δi.....	+0. 0.33,4	+0. 0,3	+0. 0.33,7
Δμ.....	+ 1,5697	+ 0,0250	+ 1,5947

Les perturbations étant considérables, on obtiendrait des résultats plus exacts, en partant d'éléments plus rigoureux.

Nous avons représenté, en λ et en β, les deux observations de 1893 avec les éléments non perturbés et les éléments perturbés.

En appliquant la différence des deux calculs (+ 6′0″,9 en λ et + 37″,4 en β) au lieu normal de 1893, nous avons cru pouvoir considérer la position idéale ainsi obtenue comme correspondant au mouvement non perturbé de la planète.

Digitized by Google

Nous avons ainsi trouvé, en prenant la moyenne des écarts, l'observation normale suivante pour 1893 :

	Temps moy. de Paris.	λ 1892,0.	β 1892,0.
1893. Déc.....	15,36034	112° 7′48″,0	+0°52′ 7″,0

Cette observation forme notre sixième lieu normal.

Nous avons calculé, dans la supposition d'une orbite képlérienne, trois systèmes d'éléments par la méthode de la variation des distances géocentriques extrêmes I et VI. En donnant le même poids aux quatre observations intermédiaires, la représentation différentielle, avec les meilleures valeurs des distances extrêmes, nous a donné les écarts suivants :

	II.	III.	IV.	V.
$d\lambda$.....	−0″,9	−8″,9	+0″,7	+1″,8
$d\beta$.....	−0″,8	+5″,4	+3″,6	+9″,2

L'inspection de ces écarts ayant montré que l'observation III de Marseille était en désaccord avec les autres, nous avons de nouveau résolu les équations de condition en négligeant provisoirement cette observation, que nous nous réservons de discuter ultérieurement. La représentation directe des lieux intermédiaires, à l'aide des éléments ainsi trouvés, nous a fourni les écarts suivants, dans le sens (obs.-calc.) :

	II	III.	IV.	V.
$d\lambda$.....	−3″,6	−15″,3	−3″,3	+3″,0
$d\beta$.....	−1″,1	+ 5″,8	+0″,8	+5″,6

Mais lorsque nous avons ajouté aux éléments ainsi déduits les perturbations et que nous avons représenté les observations de 1893, les écarts entre le calcul et l'observation qui auraient dû être nuls étaient :

$$d\lambda = -120'',5, \qquad d\beta = +14'',4.$$

Ces éléments étant plus près de la vérité que ceux du point de départ, nous avons appliqué les corrections (−120″,5 en λ et +14″,4 en β) au lieu normal provisoire donné ci-dessus et nous avons obtenu la position suivante, considérée également comme correspondant au mouvement non perturbé de la planète :

	Temps moy. de Paris.	λ 1892,0.	β 1892,0.
1893. Déc.....	15,36034	112° 5′47″,5	+0°52′21″,4

Digitized by Google

Le système d'éléments déduits à l'aide de ces nouvelles valeurs du dernier lieu normal est le suivant :

I.

1892 nov. 21,0, t. m. de Paris.

M	342°.39'.25",3	
π	40.51.12,0	Équin. et éclipt. moy. 1892,0.
☊	288.33.56,3	
i	6. 2. 1,2	
φ	1.20.53,8	
μ	711,857	
log a	0,465075	

qui laisse subsister, dans les lieux intermédiaires les écarts suivants dans le sens (obs.-calc.) :

	II.	III.	IV.	V.
$d\lambda$	—4",9	—15",0	—3",5	+3",8
$d\beta$	—4",9	+ 0",7	—3",4	+1",5

En représentant avec ces éléments, augmentés des perturbations, les deux observations de 1893, nous avons trouvé comme moyenne des écarts dans le sens (obs.-calc.) :

$$d\lambda = +5'',7; \qquad d\beta = -0'',8.$$

Ces écarts étant devenus assez faibles nous n'avons pas cru nécessaire de recommencer une nouvelle hypothèse, et nous avons adopté ce dernier système d'éléments comme base des calculs pour la détermination des perturbations entre le 16 décembre 1893 et le 9 janvier 1899.

Nous avons fait varier nos éléments de 400 jours en 400 jours. Nous avons ainsi obtenu, au 9 janvier 1899, les valeurs suivantes pour la somme des perturbations produites par les deux planètes considérées :

	Jupiter.	Saturne.	Jupiter + Saturne.
ΔM	+2°.17'.52",5	—0°. 9'.30",8	+2°. 8'.21",7
Δφ	—0. 4.35,0	+0. 0. 4,4	—0. 4.30,6
Δπ	—2.17.35,4	+0. 9.12,0	—2. 8.23,4
Δ☊	—0. 1. 8,3	—0. 0.26,3	—0. 1.34,6
Δi	+0. 0. 1,6	+0. 0. 1,1	+0. 0. 2,7
Δμ	+0",1199	—0",0411	+0",0788

Nous avons ainsi obtenu, pour la somme totale des perturbations

Digitized by Google

du 21 novembre 1892 au 9 janvier 1899, les valeurs suivantes :

	Jupiter + Saturne.
ΔM	$+5^\circ.54'.37'',2$
$\Delta\varphi$	$-0.\ 8.15,7$
$\Delta\pi$	$-5.55.17,1$
$\Delta\Omega$	$-0.10.18,1$
Δi	$+0.\ 0.36,4$
$\Delta\mu$	$+1'',6735$

Par l'application de ces corrections aux éléments I, nous avons déduit le système II suivant :

Époque de l'oscultation : 1899 janv. 9,0 t. moy. de Paris.

II.

M	$72^\circ.15'.59'',0$	
φ	1.12.38,1	
π	35. 2.36,7	Équin. et éclipt. moy. 1900,0.
Ω	188.30.53,0	
i	6. 2.39,2	
μ	$713'',531$	
$\log a$	0,464396	

A l'aide de ces éléments, M. Charles Coniel a déduit l'éphéméride suivante pour faciliter la recherche de cet astre à sa prochaine opposition :

Éphéméride pour 12h temps moyen de Paris.

12 h. t. m. de Paris. 1898.		Æ app. h m s	Ⓓ app. ° ′	log Δ.	T. d'aberr. m s
Déc.	16	7.46.18	+21.45,9	0,2996	16.34
	17	7.45.36	21.45,9	0,2981	
	18	7.44.54	21.45,9	0,2968	16.28
	19	7.44.10	21.45,9	0,2955	
	20	7.43.25	21.45,9	0,2942	16.22
	21	7.42.39	21.46,0	0,2930	
	22	7.41.52	21.46,0	0,2919	16.16
	23	7.41. 4	21.46,1	0,2908	
	24	7.40.15	21.46,2	0,2897	16.11
	25	7.39.24	21.46,3	0,2857	
	26	7.38.33	21.46,4	0,2878	16. 7
	27	7.37.41	21.46,5	0,2869	
	28	7.36.48	+21.46,7	0,2861	16. 4
	29	7.35.55	+21.46,9	0,2854	
	30	7.35. 1	21.47,0	0,2847	16. 1
	31	7.34. 6	21.47,2	0,2841	

Digitized by Google

12 h. t. m. de Paris.		⅋ app.	ⅆ app.	log Δ.	T. d'aberr.
1899.		h m s	° ′		m s
Janv.	1.....	7.33.10	21.47,3	0,2836	15.58
	2.....	7.32.14	21.47,4	0,2831	
	3.....	7.31.18	21.47,6	0,2827	15.56
	4.....	7.30.21	21.47,7	0,2823	
	5.....	7.29.23	21.47,8	0,2820	15.55
	6.....	7.28.26	21.47,9	0,2818	
	7.....	7.27.28	21.48,0	0,2817	15.54
	8.....	7.26.30	21.48,0	0,2816	
	☌ 9.....	7.25.32	21.48,1	0,2816	15.54
	10.....	7.24.34	21.48,1	0,2816	
	11.....	7.23.36	21.48,1	0,2817	15.54
	12.....	7.22.39	21.48,1	0,2819	
	13.....	7.21.41	21.48,0	0,2822	15.55
	14.....	7.20.44	21.48,0	0,2826	
	15.....	7.19.47	21.47,9	0,2830	15.57
	16.....	7.18.51	21.47,8	0,2835	
	17.....	7.17.55	21.47,6	0,2840	15.59
	18.....	7.16.59	+21.47,4	0,2846	
	19.....	7.16. 4	+21.47,2	0,2853	16. 2
	20.....	7.15.10	21.47,0	0,2860	
	21.....	7.14.16	21.46,7	0,2868	16. 5
	22.....	7.13.23	21.46,4	0,2876	
	23.....	7.12.31	21.46,1	0,2885	16. 9
	24.....	7.11.40	21.45,8	0,2895	
	25.....	7.10.50	21.45,5	0,2905	16.13
	26.....	7.10. 1	21.45,1	0,2916	
	27.....	7. 9.12	21.44,7	0,2927	16.18
	28.....	7. 8.25	21.44,2	0,2939	
	29.....	7. 7.39	21.43,7	0,2952	16.24
	30.....	7. 6.55	21.43,2	0,2965	
	31.....	7. 6.11	21.42,7	0,2979	16.30
Févr.	1.....	7. 5.29	21.42,1	0,2993	
	2.....	7. 4.48	+21.41,5	0,3008	16.37

La grandeur d'opposition sera d'environ 12,1.

A une variation de $\mp 1^m$ en ⅋ correspondent en ⅆ les variations suivantes :

1898.	Déc. 20.....	±4,05
1899.	Janv. 1.....	±3,76
	Janv. 13.....	±3,49
	Janv. 25.....	±3,24

Digitized by Google

OBSERVATIONS DES PLANÈTES (409) ET (313);

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE PARIS (équatorial de la tour de l'Ouest);

PAR M. JEAN MASCART.

Dates.	T. m. de Paris.	Pl. − ★ ΔÆ.	Pl. − ★ ΔΦ.	N. dec.	Æ app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	★
				(409).					
1898.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
AOUT 2.	10.34.14	+0.19,98	+ 2.35,2	6:6	20.39.45,86	$\bar{2}$,836 *n*	− 0.25.15,8	0,824	1
2.	11.27.25	+0.17,94	+ 2.30,5	6:6	20.39.43,82	$\bar{2}$,645 *n*	− 0.25.20,5	0,824	1
3.	11. 1.46	−0.34,88	+ 0.25,4	9:8	20.38.51,00	$\bar{2}$,898 *n*	− 0.27.25,4	0,825	2
3.	11.33.32	−0.36,20	+ 0.22,5	9:8	20.38.49,68	$\bar{2}$,408 *n*	− 0.27.28,3	0,825	2
4.	9.44.46	−1.25,70	− 1.47,8	9:6	20.38. 0,19	$\bar{1}$,287 *n*	− 0.29.38,5	0,824	3
5.	10. 9.59	−2.20,28	− 4.18,8	9:6	20.37. 5,62	$\bar{1}$,170	− 0.32. 9,4	0,825	4
5.	13. 2.23	−2.26.53	− 4.36,8	9:5	20.36.59,37	$\bar{1}$,143	− 0.32.27,4	0,825	4
9.	12.42.20	+2. 1,12	+ 0.11,1	6:4	20.33.31,15	$\bar{1}$,139	− 0.44. 4,6	0,826	5
10.	10.41.59	+1.14,49	− 2.50,3	9:6	20.32.44,52	$\bar{2}$,748 *n*	− 0.47. 5,9	0,827	6
10.	11. 8.20	+1.13,51	− 2.53,8	9:6	20.32.43,54	$\bar{2}$,052 *n*	− 0.47. 9,4	0,827	6
11.	9.39.34	+0.26,25	− 6. 5,1	6:6	20.31.56,29	$\bar{1}$,177 *n*	− 0.50.20,6	0,827	7
11.	10.16.44	+0.24,97	− 6.11,2	6:6	20.31.55,01	$\bar{2}$,955 *n*	− 0.50.26,7	0,827	7
12.	11.10.41	+1.40,50	+ 7. 8,2	9:5	20.31. 4,05	3,949	− 0.54. 6,7	0,828	7
12.	11.40.10	+1.39,45	+ 7. 3,4	9:6	20.31. 3,00	$\bar{2}$,770	− 0.54.11,5	0,827	8
13.	10.38. 6	+0.52,54	+ 3.33,5	9:6	20.30.16,10	2,585 *n*	− 0.57.41,3	0,828	9
13.	11. 0. 6	+0.51,90	+ 3.29,6	8.6	20.30.15,46	$\bar{4}$,996 *n*	− 0.57.45,2	0,828	9
16.	10.15.57	−1.28,27	− 8. 5,1	9:6	20.27.55,29	$\bar{2}$,716 *n*	− 1. 9.19,6	0,829	10
				(313).					
AOUT 11.	11. 0.43	−0.33,14	+ 2.10,5	4:4	20.53.23,61	$\bar{2}$,722 *n*	− 5.11.14,4	0,853	11
11.	11.34.47	−0.34,29	+ 2. 1,5	4:4	20.53.22,46	$\bar{3}$,711	− 5.11.23,4	0,854	11
13.	11.26. 8	+0.15,43	− 5.17,4	4:4	20.51.38,02	3,847	− 5.25.58,9	0,855	12
13.	11.45.11	+0.14,67	− 5.24,1	4:4	20.51.37,26	$\bar{2}$,597	− 5.26 5,6	0,854	12
16.	11. 6.55	−0 12,66	+ 2.42,7	4:4	20.49. 3,49	$\bar{3}$,097 *n*	− 5.48. 3,4	0,857	13
16.	11.18.16	−0.13,17	+ 2.40,4	4:4	20.49. 2,98	$\bar{2}$,259	− 5.48. 5,7	0,857	13

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	Æ moy. 1898,0.	Réd. au J.	Φ moy. 1898,0.	Réd. au J.		Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″		
1.	9	20.39.21,67	+4,21	− 0.28. 6,3	+15,3	40041	Lalande.
2.	9	»	+4,21	»	+15,5		Id.
3.	9	»	+4,22	»	+15,6		Id.
4.	9	»	+4,23	»	+15,7		Id

Digitized by Google

★	Gr.	Ⓡ moy. 1898,0.	Réd. au j.	ℚ moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
5.	9	20.31.25,78	+4,25	— 0.44.31,3	+15,6	4053 B. B. VI + 0°.
6.	9	»	+4,25	»	+15,7	Id.
7.	9	»	+4,26	»	+15,8	Id.
8.	8	20.29.19,29	+4,26	— 1. 1.30,7	+15,8	683 Weisse$_1$, XX^h.
9.	8	»	+4,27	»	+15,9	Id.
10.	8	»	+4,27	»	+16,2	Id.
11.	9	20.53.52,39	+4,36	— 5.13.42,3	+17,4	Rapportée à (14).
12.	9	20.51.18,22	+4,37	— 5.20.58,8	+17,3	1250 Weisse$_1$, XX^h.
13.	8	20.49.11,76	+4,39	— 5.51. 3,4	+17,3	1199 Weisse$_1$, XX^h.
14.	7	20.55.11,71	»	— 5. 7.17,9	»	1356 Weisse$_1$, XX^h.

★ (11) — ★ (14) : ΔⓇ = — 1^{m}19^s,32; Δℚ = — 6′24″,4; 5 : 4 comparaisons.

OBSERVATIONS DE LA PLANÈTE DQ WITT, 1898,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial d'Eichens de 0^m,26 d'ouverture);

PAR M. BORRELLY.

Dates. 1898.	T. m. Marseille.	ΔⓇ.	Δℚ.	N. de c.	Ⓡ app.	log f. p.	ℚ app.	log f. p.	★
	h m s	m s	° ′		h m s		° ′ ″		
AOUT 16.	10.31.15	+1.37,28	— 3.51,7	5.5	21.22.54,20	$\bar{1}$,121 *n*	96.22.22,8	0,830 *n*	1
17.	9.29.21	—0. 8,99	— 4.44,5	5.5	21.21. 7,94	$\bar{1}$,361 *n*	96.21.30,0	0,825 *n*	2
18.	9.33.23	—2. 0,15	— 5.28,5	5.5	21.19.16,78	$\bar{1}$,330 *n*	96.20.45,9	0,826 *n*	3
19.	9.30.34	—3.50,19	— 6. 8,6	5.5	21.17.26,75	$\bar{1}$,319 *n*	96.20. 5,7	0,826 *n*	4
20.	9.33.48	+0.39,03	— 0.17,2	5.5	21.15.37,29	$\bar{1}$,286 *n*	96.19.30,5	0,827 *n*	5
22.	9.40.51	—2.56,90	— 1. 6,8	5.5	21.12. 1,37	$\bar{1}$,206 *n*	96.18.40,8	0,828 *n*	6
24.	10.28.52	+1.48,04	+ 4.31,2	5.5	21. 8.26,74	$\bar{2}$,706 *n*	96.18. 7,6	0,831 *n*	7
25.	9.13. 2	+0.11,61	+ 4.19,5	5.5	21. 6.50,31	$\bar{1}$,255 *n*	96.17.55,9	0,827 *n*	8
26.	9.17. 4	—1.30,00	+ 4.14,6	5.5	21. 5. 8,70	$\bar{1}$,212 *n*	96.17.50,9	0,828 *n*	9
27.	9. 0.55	—3. 7,20	+ 4.14,2	5.5	21. 3.31,50	$\bar{1}$,259 *n*	96.17.50,4	0,827 *n*	10
30.	9.16.46	+0. 2,32	+ 4.34,1	7.7	20.58.47,72	$\bar{1}$,092 *n*	96.17.51,4	0,829 *n*	11
31.	9.39.41	—1.28,75	+ 4.40,4	5.5	20.57.16,65	$\bar{2}$,850 *n*	96.17.57,7	0,831 *n*	12
SEPT. 1.	9. 2.12	—2.53,79	+ 4.46,1	5.5	20.55.51,60	$\bar{1}$,116 *n*	96.18. 3,3	0,829 *n*	13
2.	9.16.17	—4.19,92	+ 5. 4,3	5.5	20.54.25,47	$\bar{2}$,979 *n*	96.18.21,4	0,830 *n*	14
3.	9.38.17	+2.54,77	— 6.31,4	5.5	20.53. 1,65	$\bar{2}$,635 *n*	96.18.35,3	0,831 *n*	15
5.	10. 5.13	+0.17,38	— 6. 4,2	10.10	20.50.24,35	$\bar{2}$,449	96.19. 2,5	0,831 *n*	16
6.	9.52.11	—0.55,38	— 5.48,7	5.5	20.49.11,49	$\bar{2}$,104	96.19.17,9	0,832 *n*	17
7.	9.39.50	—2. 5,43	— 5.31,3	5.5	20.48. 1,43	$\bar{4}$,78 *n*	96.19.35,3	0,832 *n*	18
8.	9.32.58	+0.13,43	+ 1.12,7	10.10	20.46.55,02	3,61 *n*	96.19.50,9	0,832 *n*	19
9.	9.13.17	—0.50,52	+ 1.28,5	5.5	20.45.51,06	$\bar{2}$,506 *n*	96.20. 6,7	0,832 *n*	20
10.	8.50.19	—1.50,75	+ 1.42,8	5.5	20.44.50,82	$\bar{2}$,822 *n*	96.20.20,9	0,831 *n*	21
12.	9.14.47	—3.45,06	+ 2.11,8	5.5	20.42.56,50	3,09 *n*	96.20.49,9	0,832 *n*	22

Digitized by Google

Dates.	T. m. Marseille.	ΔR.	ΔP.	N. de c.	R app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
1898.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
SEPT. 13.	8.35.50	—0.44,29	— 2.35,4	5.5	20.42. 5,56	$\bar{2}$,821 *n*	96.20.54,8	0,831 *n*	23
14.	9.25.32	—1.34,49	— 2.28,4	5.5	20.41.15,35	$\bar{2}$,575	96.21. 1,8	0,832 *n*	24
15.	9. 0.45	—2.19,02	— 2.13,8	5.5	20.40.30,81	4,96 *n*	96.21.16,4	0,832 *n*	25
16.	10. 4. 5	—3. 3,10	— 2. 6,6	5.5	20.39.46,72	$\bar{1}$,105	96.21.23,6	0,830 *n*	26
17.	9. 7.31	—3.40,28	— 2. 8,1	5.5	20.39. 9,53	$\bar{1}$,014	96.21.22,1	0,829 *n*	27
19.	9.41.40	—4.48,69	— 2. 5,1	5.5	20.38. 1,10	$\bar{1}$,051	96.21.25,0	0,830 *n*	28
20.	8.30.16	—5.16,17	— 2.16,2	5.5	20.37.33,61	$\bar{2}$,193 *n*	96.21.13,9	0,832 *n*	29

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1893,0.	Réd. au j.	P moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	8	21.21.12,52	+4,40	96.26.34,3	—19,8	28391 Munich$_1$.
2.	»	»	+4,41	»	—19,8	Id.
3.	»	»	+4,41	»	—19,9	Id.
4.	»	»	+4,42	»	—20,0	Id.
5.	10	21.14.53,84	+4,42	96.20. 7,3	—19,6	$\frac{1}{2}$ (28035 Mun$_1$ + 11481 Mun$_2$).
6.	»	»	+4,43	»	—19,7	Id.
7.	9	21. 6.34,28	+4,42	96.13.55,6	—19,2	27544 Munich$_1$.
8.	»	»	+4,42	»	—19,2	Id.
9.	»	»	+4,42	»	—19,3	Id.
10.	»	»	+4,42	»	—19,4	Id.
11.	7	20.58.40,99	+4,41	96.13.36,2	—18,9	27071 Munich$_1$.
12.	»	»	+4,41	»	—18,9	Id.
13.	»	»	+4,40	»	—19,0	Id.
14.	»	»	+4,40	»	—19,1	Id.
15.	9	20.50. 2,50	+4,38	96.25.25,1	—18,4	$\frac{1}{2}$ (26544 Mun$_1$ + 10992 Mun$_2$).
16.	»	»	+4,37	»	—18,4	Id.
17.	»	»	+4,37	»	—18,5	Id.
18.	»	»	+4,36	»	—18,5	Id.
19.	9	20.46.37,25	+4,34	96.18.56,5	—18,3	$\frac{1}{2}$ (26305 Mun$_1$ + 10916 Mun$_2$).
20.	»	»	+4,33	»	—18,3	Id.
21.	»	»	+4,32	»	—18,4	Id.
22.	»	»	+4,31	»	—18,4	Id.
23.	9	20.42.45,56	+4,29	96.23.48,2	—18,0	$\frac{1}{2}$ (26058 Mun$_1$ + 10832 Mun$_2$).
24.	»	»	+4,28	»	—18,0	Id.
25.	»	»	+4,27	»	—18,0	Id.
26.	»	»	+4,26	»	—18,0	Id.
27.	»	»	+4,25	»	—18,0	Id.
28.	»	»	+4,23	»	—18,1	Id.
29.	»	»	+4,22	»	—18,1	Id.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE PLANÈTES ET DE LA COMÈTE GIACOBINI,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial d'Eichens, de $0^m,26$ d'ouverture)

PAR M. COGGIA.

Dates.	T m. Marseille.	ΔÆ.	ΔΦ.	N. de c.	Æ app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	★
					(7) Iris.				
1898.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
MAI 9.	11.37.56	+ 3.10,22	+11.41,4	6.6	16.17.43,71	$\bar{1}$,250 *n*	114. 7.18,3	0,900 *n*	1
					(17) Thémis.				
MAI 10.	10.44.19	+ 3. 6,08	+ 9.27,2	5.5	14.27. 6,35	$\bar{2}$,731 *n*	104.43.17,2	0,873 *n*	2
11.	10.13.25	+ 2.22,31	+ 6. 6,2	5.5	14.26.22,58	$\bar{1}$,018 *n*	104.39.56,2	0,871 *n*	3
					Giacobini.				
JUILL. 7.	10. 7.47	— 1.29,82	+ 2.51,7	4.4	16. 5.36,37	$\bar{1}$,101	105.48.14,5	0,875 *n*	4
8.	10.15.13	+ 1.43,80	+ 4. 7,4	7.7	15.54.35,18	$\bar{1}$,225	105. 1.30,4	0,868 *n*	5
9.	10.24.19	— 1.57,17	— 4.59,7	5.5	15.44.22,20	$\bar{1}$,316	104.15. 1,9	0,861 *n*	6
10.	10.28.27	— 1.24,74	+ 8.18,3	6.6	15.26.15,89	$\bar{1}$,407	102.48.38,0	0,848 *n*	7
12.	10.13.32	+ 0. 0,09	+ 8.18,9	6.6	15.18.19,96	$\bar{1}$,397	102. 8.51,2	0,846 *n*	8

Étoiles de comparaison.

★	Gr.	Æ moy. 1893,0.	Réd. au j.	Φ moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	5,6	16.14.29,78	+3,71	113.55.25,0	+11,9	6746 Yarnall.
2.	9	14.23.56,87	+3,40	104.33.31,0	+19,0	388 Weisse, II. XIV.
3.	»	»	+3,40	»	+19,0	Id.
4.	9	16. 7. 2,27	+3,92	105.45.11,0	+11,8	12496 Arg. Œltzen.
5.	10	15.52.47,56	+3,82	104.57.10,3	+12,7	11951 Munich.
6.	9	15.46.15,60	+3,77	104.19.48,6	+13,0	845 Weisse, II. XV.
7.	8	15.27.37,02	+3,61	102.40. 6,0	+13,7	458 Weisse, II. XV.
8.	6	15.18.16,33	+3,54	102. 0.18,3	+14,0	19069 Paris.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE PLANÈTES ET DE LA COMÈTE PERRINE (19 mars 1898),

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial d'Eichens de $0^m,26$ d'ouverture);

PAR M. ESMIOL.

Dates.	T. m. Marseille.	ΔÆ.	ΔΦ.	N de c.	Æ app.	log. f. p.	Φ app.	log. f. p.	★
					(354) Eleonora.				
1898.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
FÉVR. 9.	10.13.41	+2. 9,33	— 3.47,3	4.4	11.17.58,68	$\bar{1}$,564 *n*	76.49.20,5	0,704 *n*	1
10.	10. 6.10	+1.41,83	—16.45,0	5.5	11.17.31,19	$\bar{1}$,568 *n*	76.36.22,9	0,705 *n*	2
12.	11. 5.19	+5.56,80	+ 1. 4,1	5.5	11.16.31,08	$\bar{1}$,452 *n*	76. 9.30,5	0,670 *n*	3
14.	10.15.41	—0.29,29	— 1.45,7	6.6	11.15.29,41	$\bar{1}$,531 *n*	75.43.14,0	0,684 *n*	4
MARS 15.	9.38.32	+1.17,24	— 0.35,2	5.5	10.55.44,24	$\bar{1}$,300 *n*	69.41.52,1	0,562 *n*	5
16.	9.35.27	+0.37,30	—10.24,3	5.5	10.55. 4,30	$\bar{1}$,295 *n*	69.32. 2,9	0,559 *n*	6
17.	9.57.17	+3.35,46	— 1.30,3	5.5	10.54.25,10	$\bar{1}$,171 *n*	69.22.19,8	0,544 *n*	8
18.	9.56.19	+2.57,03	—10.49,1	5.5	10.53.46,67	$\bar{1}$,150 *n*	69.13. 1,0	0,537 *n*	9
AVR. 7.	9.56.59	+0. 9,44	+13.13,0	5.5	10.45.24,14	$\bar{2}$,520	67. 5.45,5	0,486 *n*	10
8.	9.48.34	—0. 2,40	+ 9.57,3	5.5	10.45.12,29	$\bar{2}$,388	67. 2.29,7	0,484 *n*	11
9.	9.47.42	—0.12,81	+ 6.54,1	7.7	10.45. 1,87	$\bar{2}$,519	66.59.26,4	0,483 *n*	12
12.	9.47.33	—0.34,70	— 0.33,8	6.6	10.44.39,95	$\bar{2}$,744	66.51.58,2	0,483 *n*	13
13.	9.48.14	—0.39,04	— 2.33,7	5.5	10.44.35,60	$\bar{2}$,813	66.49.58,2	0,483 *n*	14
15.	9.43. 3	—0.42,88	— 5.48,8	5.5	10.44.31,86	$\bar{2}$,848	66.46.42,9	0,482 *n*	15
18.	9.41.45	—0.36,87	— 8.38,0	5.5	10.44.37,72	$\bar{2}$,962	66.43.53,3	0,484 *n*	16
19.	10. 4. 3	—0.31,67	— 9. 7,2	5.5	10.44.42,91	$\bar{1}$,157	66.43.24,0	0,494 *n*	17
20.	11. 1.44	—0.24,70	— 9.20,0	6.6	10.44.49,87	$\bar{1}$,409	66.43.11,1	0,533 *n*	18
22.	9.57. 4	—0. 7,28	— 9. 6,8	6.6	10.45. 7,27	$\bar{1}$,181	66.43.24,1	0,496 *n*	19
30.	10.17. 4	+2. 4,67	+ 0.36,5	5.5	10.47.19,13	$\bar{1}$,385	66.53. 6,7	0,530 *n*	20
					(389) (1894 BB).				
FÉVR. 9.	9.44.19	—1.39,63	+ 3.43,7	5.5	7.55. 8,25	$\bar{2}$,986 *n*	74.36. 8,5	0,618 *n*	22
10.	9.37.15	—2.27,71	+ 3.35,0	5.5	7.54.20,17	$\bar{1}$,012 *n*	74.35.59,8	0,618 *n*	23
11.	10. 3.33	—3.15,79	+ 3.25,3	4.4	7.53.32,09	$\bar{2}$,633 *n*	74.35.50,1	0,615 *n*	24
12.	9.28.32	+1.40,07	— 0.14,8	5.5	7.52.47,18	$\bar{1}$,006 *n*	74.35.46,7	0,618 *n*	25
14.	9.15.26	+0.13,22	— 0.30,3	7.7	7.51.20,33	$\bar{1}$,036 *n*	74.35.31,8	0,619 *n*	26
					(213) Lilæa.				
FÉVR. 12.	10.19. 5	—0.46,76	+ 0.30,0	5.5	9. 7.59,32	$\bar{1}$,177 *n*	70.51.43,2	0,569 *n*	27
14.	9.57.57	+1. 6,03	— 0.40,1	5.5	9. 6.16,97	$\bar{1}$,238 *n*	70.41.17,3	0,571 *n*	28
					Perrine (19 mars 1898).				
MARS 23.	17. 4.46	—1. 3,46	+ 3. 9,9	7.7	21.32. 9,76	$\bar{1}$,620 *n*	69.28.31,7	0,673 *n*	29
24.	16.32.23	—0.46,70	— 3.34,5	7.7	21.35.54,65	$\bar{1}$,646 *n*	68.27.40,6	0,693 *n*	30
24.	17. 1. 7	+0.50,43	— 3.58,2	5.5	21.35.57,58	1,626 *n*	68.26.26,0	0,668 *n*	31

Digitized by Google

Dates. 1898.	T. m. de Marseille	ΔR.	ΔP.	N. déc.	R app.	log f. p.	P app.	log f. p.	★
	h m	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Mars 25.	16.35.39	+0.27,79	—13.29,2	5.5	21.39.44,05	$\bar{1}$,647 *n*	67.25.38,8	0,684 *n*	32
25.	16.48.57	—1.35,59	— 6.15,7	5.5	21.39.47,55	$\bar{1}$,638 *n*	67.25. 5,7	0,671 *n*	33
27.	16.32.12	—0.21,86	— 2.25,8	6.6	21.47.37,27	$\bar{1}$,656 *n*	65.23. 0,0	0,674 *n*	34
27.	16.53.11	—3.13,68	— 4.33,7	5.5	21.47.42,23	$\bar{1}$,642 *n*	65.22.12,3	0,647 *n*	35
Avr. 4.	16.21.12	+0.48,79	— 9.52,1	5.5	22.21.12,79	$\bar{1}$,695 *n*	57.33.47,5	0,633 *n*	36
4.	16.40.33	—0.28,53	—11.47,8	6.6	22.21.17,20	$\bar{1}$,685 *n*	57.32.31,9	0,603 *n*	37
7.	16.32. 7	+2.36,71	— 3.24,3	6.6	22.34.47,82	$\bar{1}$,704 *n*	54.49.15,8	0,594 *n*	38
13.	15.34.19	+0.38,54	— 8.39,4	6.6	23. 3. 7,80	$\bar{1}$,750 *n*	49.51.27,8	0,663 *n*	39

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	R moy. 1898,0.	Réd. au j.	P moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	»	11.15.46,74	+2,61	76.52.51,5	+16,3	3532 Rumker.
2.	»	»	+2,62	»	+16,4	Id.
3.	5,6	11.10.31,59	+2,69	76. 8.10,0	+16,4	3494 Rumker.
4.	9	11.15.55,99	+2,71	75.44.42,9	+16,8	224 Weisse$_1$ H. XI.
5.	9	10.54.23,91	+3,09	69.42.12,2	+15,1	2540 Arg. Z + 20° rapp. à l'★ 7.
6.	»	»	+3,09	»	+15,0	Id.
7.	7	10.53.10,40		69.49.55,2		1021 Weisse$_2$ H. X.
8.	9	10.50.46,55	+3,09	69.23.35,4	+14,7	981 Weisse$_2$ H. X.
9.	»	»	+3,09	»	+14,7	Id.
10.	10	10.45.11,66	+3,04	66.52.20,5	+12,0	Anonyme rapp. à l'★ 21.
11.	»	»	+3,03	»	+11,9	Id.
12.	»	»	+3,02	»	+11,8	Id.
13.	»	»	+2,99	»	+11,5	Id.
14.	»	»	+2,98	»	+11,4	Id.
15.	10	10.45.11,66	+2,96	66.52.20,5	+11,2	Anonyme rapp. à l'★ 21.
16.	»	»	+2,93	»	+10,8	Id.
17.	»	»	+2,92	»	+10,7	Id.
18.	»	»	+2,91	»	+10,6	Id.
19.	»	»	+2,89	»	+10,4	Id.
20.	»	»	+2,80	»	+ 9,7	Id.
21.	9	10.42. 9,11		66.52. 8,7		812 Weisse$_2$ H. X.
22.	8,9	7.56.45,07	+2,81	74.32.19,7	+ 5,1	1512 Weisse$_2$ H. VII.
23.	»	»	+2,81	»	+ 5,1	Id.
24.	»	»	+2,81	»	+ 5,1	Id.
25.	8	7.51. 4,32	+2,79	74.35.56,7	+ 4,8	1375 Weisse$_2$ H. VII.
26.	»	»	+2,79	»	+ 4,8	Id.
27.	9	9. 8.43,12	+2,96	70.51. 3,7	+ 9,5	116 Weisse$_2$ H. IX.
28.	8	9. 5. 7,97	+2,97	70.41.48,2	+ 9,2	$\frac{1}{2}$(33 + 34) Weisse$_2$ H. IX.
29.	8,9	21.33.12,83	+0,39	69.25.16,0	+ 5,8	769 Weisse$_2$ H. XXI.
30.	7	21.36.40,97	+0,38	68.31. 9,3	+ 5,8	$\frac{1}{2}$(861 + 863) Weisse$_2$ H. XXI.
31.	9,10	21.35. 6,76	+0,39	68.30.18,3	+ 5,9	823 Weisse$_2$ H XXI.

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1898,0.	Réd. au j.	ℙ moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
32.	7	21.39.15,88	+0,38	67.39. 2,2	+ 5,8	921 Weisse₂ H. XXI.
33.	6	21.41.22,77	+0,37	67.31.15,8	+ 5,6	966 Weisse₂ H. XXI.
34.	8,5	21.47.58,78	+0,35	65.25.20,2	+ 5,6	42665 Lalande.
35.	8	21.50.55,57	+0,34	65.26.40,6	+ 5,4	1187 Weisse₂ H. XXI.
36.	7	22.20.23,74	+0,26	57.43.34,8	+ 4,8	43786 Lalande.
37.	9	22.21.45,48	+0,25	57.44.15,0	+ 4,7	437 Weisse₂ H. XXII.
38.	6,8	22.32.10,89	+0,22	54.52.35,6	+ 4,5	Cat. de Lund (zones 322, 519, 521).
39.	7,7	23. 2.29,11	+0,15	50. 0. 3,9	+ 3,3	Cat. de Lund (60, 64).

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

Publicationen der V. Kuffner'schen Sternwarte in Wien. *Herausgegeben* von Dr Leo de Ball. IV. Band. Wien, 1896, W. Frick. In-4° 448 pages et 9 planches.

L'observatoire fondé à Vienne par M. Maurice de Kuffner s'agrandit et se développe de la manière la plus heureuse, grâce à l'infatigable sollicitude du fondateur, qui ne recule devant aucun sacrifice pour mettre cet établissement au niveau des progrès de la Science. Aux constructions déjà existantes est venue s'ajouter une belle maison d'habitation pour le directeur, et les frais de ces constructions dépassent déjà 400000fr. Le grand héliomètre de Repsold, dont l'objectif a $0^m,217$ d'ouverture avec une longueur focale de 3^m, est en place sur un pilier creux de 15^m de hauteur, établi dans des conditions de solidité et de stabilité parfaites; à la base, il mesure 7^m de diamètre. Un nouvel instrument des passages, également sorti des ateliers de la maison Repsold, a été établi dans le premier vertical; l'objectif taillé par Steinheil a une ouverture de $0^m,081$.

Nous trouvons la description détaillée de ces instruments accompagnée de planches dans le Tome IV du Recueil dont M. L. de Ball, le zélé directeur de l'observatoire, continue la publication. Nous en avons déjà dit quelques mots en annonçant ici même l'apparition du Tome III (voir *Bull.*, t. XII, p. 35). On se rappelle que l'observatoire Kuffner possède encore un cercle méridien de Repsold, dont l'objectif a $0^m,123$ d'ouverture avec une longueur focale de $1^m,50$; un réfracteur de Repsold, muni d'un objectif de Steinheil, de $0^m,270$ d'ouverture et $3^m,5$ de longueur focale; un réfracteur photographique, etc., sans

Digitized by Google

compter une foule d'appareils auxiliaires, d'une construction ingénieuse, qui complètent l'outillage de cet établissement très moderne.

Les observations ont été continuées avec une grande régularité. La première Partie du Tome IV des *Publications* contient la suite des zones observées par M. de Ball au cercle méridien, entre 5°50′ et 10°10′ de déclinaison australe; ce sont cette fois les zones 90 — 244, observées dans le cours des années 1892, 1893, 1894, avec les positions moyennes des étoiles, déduites pour l'époque 1900,0 (p. 1 à 382). Dans la seconde Partie, on trouve la description de l'instrument des passages et de l'héliomètre; des recherches de M. L. de Ball sur l'orbite de la comète 1882 III, et un Mémoire de M. S. Oppenheim sur des solutions périodiques spéciales du problème des trois corps. M. Oppenheim, en faisant usage des belles méthodes de M. Poincaré, a tenté d'aborder la solution du problème dans des conditions un peu plus générales que celles que s'étaient imposées M. Burrau, puis MM. Perchot et Mascart (*Bull.*, t. XII, p. 329). Il suppose des masses quelconques, en partant toujours des deux cas spéciaux de Lagrange pour obtenir des systèmes d'équations intégrables, et il cherche aussi à se rendre compte de ce que deviennent ces équations quand on renonce à supposer les orbites primitives circulaires.

Les quatre Volumes qui représentent la riche moisson déjà fournie par les dix premières années de la vie de cet établissement sont un gage suffisant de son activité future, qui promet d'être de plus en plus féconde. Il y a donc lieu de féliciter M. de Kuffner du succès de son initiative si éclairée et si désintéressée, et de souhaiter que l'exemple qu'il a donné trouve des imitateurs.

R. R.

VIERTELJAHRSCHRIFT DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT. 30e année, fascicules I-IV. Leipzig, 1895. In-8, avec trois portraits.

Conformément à la décision prise par le Congrès d'Utrecht, en 1894, la Société astronomique internationale, obligée de se débarrasser de sa bibliothèque, renonce désormais à faire l'échange de ses publications avec les établissements scientifiques auxquels on les adressait jusqu'à présent.

Nous trouvons, dans les fascicules que nous avons sous les yeux, des Notices nécrologiques sur L. Schwarz, C.-F.-W. Peters, F. Tietjen, G. Spörer, dont nous avons déjà annoncé le décès (voir *Bull.*, t. XII); des Notices de MM. P. Lehmann et H. Kreutz sur les planètes et les comètes de l'année 1894; des éphémérides d'étoiles variables, dressées

Digitized by Google

par M. E. Hartwig pour l'année 1896; une série d'analyses bibliographiques; enfin les rapports sur les travaux d'un certain nombre d'observatoires.

Analyses :

Oppolzer (*E.*). — Ueber die Theorie der Sonnenflecken. (Analyse par M. J. Scheiner.)

Schmidt (*August*). — Die Strahlenbrechung auf der Sonne.

Knopf (*Otto*). — Die Schmidt'sche Sonnentheorie. (Analyse de ces deux publications par M. E. von Oppolzer.)

Ten Year Catalogue of 4059 Stars, deduced from observations made at the R. O., Greenwich.

Five Year Catalogue of 258 fundamental stars, deduced from observations made at the R. O., Greenwich. (Analyse de ces publications par M. K. Œrtel.)

Graves (*R.-P.*). — Life of Sir William Rowan Hamilton. (Analyse par M. Dreyer.)

Schilling (*C.*). — Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke, t. I. (Biographie d'Olbers. Analyse par M. Ginzel.)

Scheiner (*J.*). — Der grosse Sternhaufen im Hercules, Messier 13. (L'amas d'Hercule. Analyse par M. Ginzel.)

Donner (*Anders*). — Détermination des constantes nécessaires pour la réduction des clichés pris à Helsingfors... (Analyse par M. Harold Jacoby.)

Gyldén (*H.*) — Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales. Tome I. Théorie générale des orbites absolues. (Analyse par M. O. Backlund.)

Wislicenus (*W.-F.*). — Astronomische Chronologie. (Analyse par M. Ginzel.)

Travaux des observatoires :

Bamberg. — Le temps n'a pas été très favorable aux observations. M. Hartwig a pu, néanmoins, utiliser l'héliomètre pour une série de recherches particulières, et continuer l'étude des étoiles variables, notamment de Z Hercule. M. F. Krüger a entrepris des recherches de spectroscopie, de photométrie, et de photographie astronomique. M. Lorentzen a terminé la réduction des observations de latitude.

Digitized by Google

Bâle. — On a fait des observations météorologiques et quelques travaux de géodésie.

Berlin. — Le grand cercle méridien a été employé par M. Battermann à la détermination des positions d'un grand nombre d'étoiles qui avaient été choisies pour les observations de latitude. Il a commencé aussi, avec le réfracteur de 6 pouces, une série d'observations systématiques d'occultations. M. Marcuse a continué ses observations au petit cercle méridien, et M. Paetsch celles qu'il avait commencées avec l'instrument des passages, établi dans le premier vertical, en vue de la détermination de différences de déclinaisons. M. Knorre a continué ses mesures d'étoiles doubles avec le réfracteur de 9 pouces et le micromètre à double image de Wellmann. D'autres mesures micrométriques ont été effectuées par MM. Ebell et Tetens. M. Goldstein s'occupe toujours de recherches sur les rayons cathodiques, et d'expériences qui ont trait à l'explication de certains phénomènes cosmiques. M. Jesse a organisé des observations simultanées des nuages noctiluques.

Le Bureau des calculs a préparé le *Jahrbuch* pour 1897.

Bonn. — Le cercle méridien de Pistor et Martins a subi d'importantes réparations, qui ont fait disparaître notamment la forte variation de l'erreur de collimation avec la température, dont se plaignait Argelander. M. Deichmüller l'emploie à la détermination des positions de certaines catégories d'étoiles (étoiles de latitude, étoiles à mouvement propre sensible, etc.), après avoir terminé la revision et l'impression du Catalogue des zones. De son côté, M. Küstner a soumis à une étude approfondie le nouveau cercle méridien de Repsold, et il a pu commencer, avec l'assistance de M. Mœnnichmeyer, la détermination d'un assez grand nombre d'étoiles de 5e à 10e grandeur, destinées à former un système homogène avec les fondamentales du *Jahrbuch*. On s'attache à éliminer l'équation personnelle qui dépend de la grandeur stellaire, en réduisant convenablement l'éclat des étoiles de repère par des réseaux-diaphragmes. M. Küstner espère ainsi ajouter un complément important au grand Catalogue de la Société astronomique, dont il comblera les lacunes. A Bonn, il faut malheureusement compter avec de fortes oscillations des images dans le sens vertical, qui s'élèvent à plusieurs secondes, et qui proviennent sans doute d'irrégularités locales de la réfraction.

Breslau. — On ne s'occupe ici que de météorologie et de magnétisme terrestre.

Dresde. — M. d'Engelhardt a préparé la publication du Tome III de ses observations (mesures micrométriques d'étoiles, de comètes, etc).

Digitized by Google

Dusseldorf. — M. W. Luther a observé un certain nombre de petites planètes au micromètre circulaire.

Genève. — Le cercle méridien a été mis en état de servir à une nouvelle détermination de la latitude de l'observatoire.

L'équatorial Plantamour, de 10 pouces, a été employé à des essais de Photographie astronomique. Le service chronométrique a continué de donner des résultats satisfaisants. La Classe d'industrie de la Société des Arts a ouvert un Concours international de réglage pour le printemps de 1896. Les niveaux installés dans la cave se sont déformés, et ne pourront plus fournir d'indications utiles.

Gœttingue. — M. Schur et M. Ambronn ont, tour à tour, tiré parti du grand héliomètre pour des *triangulations* de groupes d'étoiles et des mesures du diamètre solaire, que l'on trouve toujours trop petit avec les héliomètres anciens de faible dimension, ainsi que M. Schur a eu l'occasion de le constater (l'observatoire possède un héliomètre de 3 pouces, de Fraunhofer). M. Grossmann a été chargé du cercle méridien; il a observé notamment les passages du cratère Mœsting A. La réduction définitive des observations d'Olbers a été fort avancée par M. Stichtenoth. M. Schur a aidé M. Schering à préparer l'impression des calculs de Gauss relatifs aux perturbations absolues de Pallas.

Hambourg. — En dehors des observations courantes, on a déterminé beaucoup de positions de comètes et de planètes. Le service chronométrique a pris une grande extension et absorbe beaucoup de temps.

Iéna (*observatoire de l'Université*). — On n'a guère obtenu que quelques positions de planètes et de comètes. M. Knopf a expérimenté un nouveau dispositif, imaginé par M. Abbe, pour la détermination du nadir.

Iéna (*observatoire Winkler*). — L'observatoire de M. Winkler, transféré de Gohlis à Iéna, commence à peine à fonctionner.

Kalocsa. — MM. Fényi et J. Schreiber consacrent leur temps à une exploration suivie de la surface du Soleil.

Carlsruhe. — MM. Valentiner et Ristenpart se sont occupés de la détermination des erreurs de division du cercle méridien et de la préparation du Catalogue des zones. Le réfracteur de 6 pouces a fourni quelques positions de comètes et de planètes. Les deux instruments ont été ensuite envoyés à un opticien pour être soumis à des réparations indispensables. L'instrument des passages a servi à des observations de latitude.

Digitized by Google

On sait que l'observatoire de Carlsruhe doit être transféré à Heidelberg. On avait d'abord choisi, comme emplacement, le sommet du Geisberg; mais le voisinage d'une usine qui dégage beaucoup de fumée a fait abandonner ce premier projet, et l'observatoire sera édifié un peu plus loin, sur un terrain encore plus élevé de 180^m (à une altitude de plus de 500^m). M. L. Kann a fait don à l'observatoire d'un réfracteur de 8 pouces.

Kiel. — Le réfracteur a été pourvu d'un nouvel objectif de Reinfelder; M. Lamp a recommencé à s'en servir pour diverses observations. Le cercle méridien est confié à M. A. Schumacher. M. Kreutz est occupé par des travaux de calcul et par la publication des *Astronomische Nachrichten.*

Kœnigsberg. — Après la mort de M. Peters, M. J. Franz a été chargé de l'intérim (on sait que le nouveau directeur est M. H. Struve). Divers travaux ont été entrepris pour l'agrandissement des bâtiments de l'observatoire. M. Franz a continué ses mesures héliométriques pendant que M. Rahts se chargeait du cercle méridien.

Leipzig. — On s'est occupé surtout de la revision et de la réduction des zones, d'observations de latitude, etc.

Lund. — L'impression des zones s'achève lentement.

Milan. — M. Schiaparelli a effectué de nouvelles mesures d'étoiles doubles et entrepris des recherches, délicates et difficiles, sur la figure des satellites de Jupiter. Un seul, le premier, montre des indices d'un aplatissement. M. Celoria s'est occupé de la réduction des observations méridiennes qu'il avait faites de 1878 à 1886, et de la publication définitive de son travail sur les observations de comètes, laissées par Toscanelli, dans les *Annales de l'observatoire* (une première publication, faite avec luxe, mais moins complète, est comprise dans le *Recueil de documents* publié par la Commission colombienne, à l'occasion du quatrième centenaire de la découverte de l'Amérique; ce recueil n'est pas accessible aux observatoires). MM. Rajna et Abetti ont été occupés de travaux géodésiques. Le service météorologique est confié à M. Pini. M. D. Peyra s'est chargé de certains travaux de calcul.

Munich. — M. Bauschinger, ayant terminé la réduction de ses observations méridiennes, a commencé l'étude de l'appareil enregistreur de Repsold, en vue de l'établissement d'un Catalogue d'étoiles zénithales.

Potsdam. — M. Spoerer a pris sa retraite (il est mort depuis). M. Vogel a pu réunir les matériaux d'un nouveau Mémoire sur les spectres planétaires. M. Lohse a continué ses observations des grosses

Digitized by Google

planètes, en même temps que ses travaux de Photographie solaire. MM. Müller et Kempf ont mené à bonne fin leur expédition au sommet de l'Etna, en vue d'expériences photométriques. M. Scheiner, avec l'assistance de M. Schwassmann, a continué les travaux relatifs à la Carte photographique du Ciel, et terminé les mesures des clichés de la nébuleuse d'Orion. M. Wilsing a repris l'étude des clichés exécutés pour la détermination de la parallaxe de 61 Cygne.

Prague. — M. Safarik, bien que l'âge et les infirmités l'obligent à mettre un terme à ses travaux habituels, a pu obtenir encore un assez grand nombre d'observations d'étoiles variables.

Strasbourg. — L'instrument des passages de Cauchoix a été entièrement transformé dans les ateliers de M. Bamberg, et pourra désormais être employé avec profit. M. Kobold a utilisé, comme par le passé, le grand réfracteur pour des mesures de nébuleuses, de comètes et de planètes. Au cercle méridien, MM. Halm et Wanach ont observé des fondamentales et des circompolaires. M. Becker a continué ses observations de la latitude avec l'altazimut. M. Wislicenus a poursuivi ses recherches photométriques, relatives à la surface lunaire. La réduction et l'impression des observations des années antérieures sont en sensible progrès.

Turin. — M. F. Porro a employé ses loisirs à continuer les observations d'étoiles variables à la station de Soperga. Le service météorologique est toujours confié à M. Rizzo.

Vienne (*observatoire Kuffner*). — Nous avons eu, plus d'une fois, l'occasion de parler de l'heureux développement de l'observatoire fondé par M. de Kuffner, et des travaux qui s'y exécutent sous la direction de M. L. de Ball. Nous annonçons, plus loin, l'apparition du Tome IV de ses *Publications*.

Zurich. — M. Wolfer a continué, avec l'assistance de M. A. Fauquez, l'observation régulière du Soleil et la statistique des taches solaires.

R. R.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, nos 3459-3467.

Hagen (*J.-G.*). — Sur la signification des grandeurs stellaires indiquées dans l'*Atlas stellarum variabilium*.

La publication prochaine de cet Atlas des étoiles variables avait été annoncée, en 1896, à la Société astronomique, réunie à Bamberg. Il

Digitized by Google

devait se composer d'environ 250 petites cartes, contenant chacune une variable connue, entourée de toutes les étoiles visibles dans le champ d'une lunette de dimensions déterminées (différentes pour diverses catégories de variables). La première série de ces cartes étant sur le point de paraître, le P. Hagen a pensé qu'il était utile de donner quelques indications sur la manière dont les grandeurs des étoiles ont été fixées. Elles ont été d'abord estimées en degrés, qui vont en croissant, comme les grandeurs, quand l'éclat diminue; puis ces degrés ont été convertis en grandeurs, par comparaison avec les Catalogues de Bonn (BD) et de façon à obtenir la coïncidence surtout pour les étoiles échelonnées de la 7e à la 10e grandeur. On s'est arrêté à la 13e grandeur, ou un peu au delà.

Deichmuller. — Remarques et rectifications, relatives au BD et à quelques autres catalogues.

Mysz, Küstner. — Remarques concernant quelques étoiles du BD.

Möller (*J.*). — Éléments et éphéméride de la comète Perrine (16 octobre).

Schorr, Harzer. — Occultations de Cérès (13 novembre 1897).

Ambronn. — Mesures héliométriques de l'arc du Lion.

Ces mesures, effectuées avec l'héliomètre de Repsold que possède l'observatoire de Gœttingue, avait pour but une étude plus complète des erreurs systématiques des distances, dont nous avons déjà eu à parler plus d'une fois (*voir* notamment *Bull.*, t. XIV, p. 278, 279). M. Ambronn a essayé de représenter les corrections systématiques de ses distances par les diverses formules empiriques qui avaient été proposées, mais aucune de ces formules n'a paru mériter la préférence. Les corrections sont, en somme, très faibles et ne paraissent guère excéder les limites de l'incertitude des mesures. On pourrait, ce semble, se contenter d'une correction constante, très petite. Ces résultats diffèrent beaucoup de ceux trouvés par M. Schur.

Brenner (*L.*). — Observations de Saturne, faites à l'observatoire Manora en 1897.

Pickering (*E.*). — Spectre d'un bolide.

Le spectre de ce bolide a été découvert par Mme Fleming sur un cliché

Digitized by Google

daté du 18 juin 1897 et provenant d'Arequipa. Il est formé de six lignes brillantes, dont quatre paraissent appartenir à l'hydrogène.

Anderson (*Th.*). — Nouvelles variables dans les constellations de l'Aigle, du Dragon, des Gémeaux et du Lynx.

Villiger, Charlois. — Découverte de deux nouvelles planètes, 1897 DK et DL.

L'une a été trouvée à Munich le 18 novembre, l'autre à Nice le 23.

Benko (*I.*). — Observations de petites planètes effectuées au cercle méridien de Pola, en 1894 et 1895.

Villiger, Rambaud et *Sy.* — Observations de petites planètes, faites à Munich et à Alger.

Gill (*D.*). — Quatrième liste d'étoiles doubles nouvelles, découvertes à l'observatoire du Cap.

Millosevich. — La grandeur de la planète (201) Pénélope.

Au mois de novembre dernier, elle a paru de 10e grandeur, tandis que, d'après les éphémérides, elle aurait dû être de la grandeur 11,45.

Berberich. — Éléments et éphémérides de la planète 1897 DK.

Wilsing (*J.*). — Recherches sur l'influence que les défauts d'ajustement d'un réfracteur photographique peuvent exercer sur la qualité des images. Détermination de la flexion relative du réfracteur de Potsdam.

En essayant d'obtenir des clichés des régions voisines du pôle, avec des temps de pose un peu prolongés, M. Wilsing a pu se rendre compte des déformations des images qui résultent d'un défaut d'ajustement ou de rectification du réfracteur et aussi de la flexion de la lunette. On sait que le réfracteur photographique de Potsdam est muni de deux objectifs ayant la même longueur focale ($3^m,4$) et fixés solidairement dans un tube de section elliptique; l'objectif photographique a $0^m,34$ d'ouverture, l'objectif ordinaire $0^m,23$. La croisée des fils de ce dernier étant maintenue sur une étoile de repère pendant l'exposi-

Digitized by Google

tion de la plaque, on peut admettre que l'axe de la lunette photographique passe constamment par le même point du cliché; mais les autres points du champ s'y déplacent en décrivant des arcs de cercle, par suite de la déviation du pôle de l'instrument, de l'inclinaison de l'axe de déclinaison et de la flexion du tube. De là des déformations sensibles qui croissent avec le temps de pose et l'impossibilité de fixer les images d'objets très faibles. On peut, heureusement, corriger en partie cette rotation des images en compensant la flexion du tube par une certaine déviation de l'axe polaire. Des mesures micrométriques directes ont montré que la flexion relative, ou déviation relative des axes des deux lunettes accouplées, n'atteint pas 0",1, de sorte qu'elle se trouve pratiquement annulée.

Auwers. — Additions aux Tables de réduction de divers Catalogues d'étoiles.

M. Auwers complète, par quelques données additionnelles, les Tables de réduction qu'il a publiées récemment (voir *Bull.*, t. XIV, p. 411). Il donne notamment des Tables nouvelles pour la réduction du Catalogue de Paris au système fondamental.

Kreutz. — Quantités auxiliaires pour le calcul de la précession d'après Struve.

Denning. — Observations du radiant des Perséides, faites pendant les années 1893-97.

M. Denning a réuni 78 déterminations du radiant de cet essaim obtenues par dix observateurs différents; il en a formé 15 moyennes qui confirment le déplacement progressif du radiant constaté par M. Denning depuis vingt ans et corroboré par les recherches de M. Kleiber (voir *Bull.*, t. IX, p. 482). Du 22 juillet au 21 août, le centre d'émanation des Perséides s'avance, en ascension droite, d'environ 1° par jour.

Riem. — Éphéméride de (29) Amphitrite.

Franz (*J.*). — Mesures héliométriques des 256 couples très écartés de W. Struve, faites à Kœnigsberg. Zone III.

Cette troisième zone comprend la région comprise entre + 15° et + 30° de déclinaison (les deux premières, déjà publiées, s'étendaient

Digitized by Google

depuis $+30°$ jusqu'au pôle). M. Franz se propose de continuer ces mesures à Breslau, avec un héliomètre de dimensions plus faibles.

Dubiago. — Mort de M. Kornuch-Trozki.

Jacob Petrovitch Kornuch-Trozki, aide astronome à l'observatoire de Kazan depuis 1889, est mort le 9 août 1897. Il était né à Kazan, en 1863. Observateur consciencieux et zélé, il était chargé d'une partie des services courants.

Aitken (*R.-G.*). — Mesures d'étoiles doubles effectuées à l'observatoire Lick.

Doberck (*W.*). — Mesures d'étoiles doubles faites à l'observatoire Emerson Mac-Millin (Columbus, Ohio).

Wonaszek. — Forme anormale de l'ombre de Saturne projetée sur les anneaux.

Kapteyn. — Le plus fort mouvement propre connu.

Une étoile de 8e grandeur, qui se trouve dans le Catalogue des zones de Cordoba ($5^h,243$), et qui a été plus tard observée au Cap, possède un mouvement propre de $8'',7$ en arc de grand cercle, le plus fort qui ait été constaté jusqu'à ce jour. Les positions réunies par M. Kapteyn sont très bien représentées par l'introduction d'un mouvement propre de $+0^s,621$ en Æ et de $-5'',70$ en ☉. Position approchée de l'étoile :

$$\alpha = 5^h 7^m, \qquad \delta = -45°0'.$$

Auwers. — Mort de M. Winnecke.

Le 2 décembre 1897, la mort a mis fin aux souffrances d'un astronome de grand mérite, qu'une grave maladie mentale tenait, depuis plus de quinze ans, éloigné de tout travail. August Friedrich Theodor Winnecke était né, le 5 février 1835, à Gross-Heere, près Hildesheim, dans le Hanovre, où son père était pasteur. Orphelin de bonne heure, il fit ses études d'abord au lycée de Hanovre, ensuite à l'Université de Gœttingue, où la possession d'un petit chercheur de 3 pouces, muni d'un micromètre circulaire, lui permit de s'exercer aux observations, puis à Berlin comme élève d'Encke. Une thèse de doctorat sur l'étoile double η Couronne boréale, publiée en 1856, le signala aux astronomes comme un observateur déjà expérimenté et comme un calculateur judicieux et sagace.

Digitized by Google

De 1854 à 1863, il découvrit plusieurs comètes, mais ne garda pas toujours la priorité de la découverte. La comète périodique qui porte son nom fut trouvée par lui le 8 mars 1858, à Bonn, où il était devenu le collaborateur zélé d'Argelander. Il y avait exécuté de précieuses séries de mesures héliométriques (qui ne furent réduites et publiées que tardivement et d'une manière incomplète) quand il fut appelé à Poulkova par W. Struve, qui l'avait vu à Bonn l'année précédente. Pendant les six années qu'il passa en Russie, Winnecke déploya une ardente et féconde activité. Il était chargé du service du grand cercle méridien de Repsold, et il eut ainsi une part notable à l'établissement du premier Catalogue de Poulkova. On sait de quelle façon magistrale il avait organisé, en 1862, les observations correspondantes de l'opposition de Mars en vue de la détermination de la parallaxe solaire. Nommé sous-directeur, il eut, en 1864, à remplacer M. O. Struve à la direction de l'observatoire pendant une assez longue absence, quand il tomba malade à son tour et dut tout quitter pour se confier aux mains d'un médecin. Il retourna donc à Bonn avec sa femme en 1865. Guéri au bout de deux ans, il se fixa d'abord à Carlsruhe, reprenant peu à peu ses observations avec quelques petits instruments. En 1872, il fut chargé d'organiser le nouvel observatoire de Strasbourg. Il y commença lui-même des mesures de nébuleuses, et s'occupa des préparatifs de l'expédition qui devait observer le passage de Vénus, puis de la discussion des observations obtenues. Mais le malheur s'abattit sur lui. La perte de son fils aîné lui porta un coup terrible; il sentit sa raison se troubler, et en 1882 il quitta Strasbourg pour rechercher de nouveau le secours du médecin qui l'avait déjà soigné. Mais l'espoir de ses amis ne devait pas se réaliser.

Fric (*J.-J.*). — Sur un instrument propre à photographier un corps céleste qu'on ne voit pas, mais dont la présence est connue.

Modification avantageuse du dispositif imaginé par M. Barnard (voir *Bull.*, t. XV, p. 392). MM. Fric en avait fait l'essai en 1895.

See (*T.-J.-J.*). — Remarques à propos d'une Note sur les satellites de Jupiter.

Ces remarques visent la Note de M. Barnard (*Bull.*, t. XV, p. 391). M. See insiste sur les inconvénients des très grands instruments, qui sont trop sensibles aux influences des troubles atmosphériques.

Innes. — Sur quelques étoiles doubles australes.

Digitized by Google

Dunér. — Nouvelle orbite de l'étoile variable Y Cygne.

Peyra (*D.*). — Éléments de la planète (389).

Witt (*C.*). — Éphéméride de la planète (385) Ilmatar.

Charlois. — Découverte de trois planètes (1897 DM, DN, DO).

Trouvées, à Nice, le 18 décembre 1897.

R. R.

BOSS (LEWIS). — FLEXION ET ERREURS DE DIVISION DES CERCLES DE L'INSTRUMENT MÉRIDIEN D'ALBANY (*Astr. Journ.*, 382-383).

La méthode employée, en 1879, par l'auteur pour déterminer la flexion et les erreurs de division de l'instrument établi en 1856 sous la direction du Dr Gould, qui se rapproche de celle suggérée par le professeur Newcomb à propos du cercle méridien de Washington, dans le Volume des *Observations pour* 1865, offre un intérêt général. M. Boss a eu occasion de l'employer et de la perfectionner en s'occupant d'une nouvelle étude de l'instrument (Cf. *Astr. Journal*, n° 334).

L'instrument est muni de deux cercles : l'un A, du côté du cercle de calage; l'autre B, du côté opposé avec des divisions de 2′ en 2′, disposées pour que chaque cercle supposé à l'est indique, sauf une constante, des distances zénithales comptées du nord vers le sud. Le rayon des cercles divisés est à peu près de $0^m,50$. Les lectures sont obtenues au moyen de deux couples de quatre microscopes traversant les piliers.

Soient R_m, R_n, ... les lectures successives du cercle A, et R'_r, R'_s, ... les lectures faites simultanément pour le cercle B. Avec des cercles parfaits, sans erreur de lecture, on aurait

$$R_m + R'_r = R_n + R'_s = \ldots = R_0,$$

où R_0 représente la somme constante des deux lectures. En fait, les lectures exigent des corrections A_m, A_n, ... pour le cercle A ; B_r, B_s, ... pour le cercle B, de sorte qu'on aura

$$(R_m + R'_r) + A_m + B_r = (R_n + R'_s) + A_n + B_s = \ldots = R_0.$$

Si maintenant on a une suite de sommes de lectures simultanées, au nombre de t, par exemple, à des intervalles égaux à a, et si la somme R_0 peut être supposée pratiquement invariable pendant la durée des obser-

Digitized by Google

vations, la moyenne arithmétique R'_0 des sommes

$$(R_m + R'_r), \quad (R_n + R'_s), \quad \ldots,$$

soustraite de chaque somme individuelle, fournit t équations ne contenant plus que les corrections A_m, B_r, ... et des quantités connues. Comme la position relative des cercles peut être modifiée, en déplaçant l'un des cercles de la quantité α tandis que l'autre reste fixe, on pourra accumuler les systèmes d'équations de condition, et il est clair que dans la nouvelle série R_m devra correspondre à R'_s et ainsi de suite. Il arrive que si l'on connaît les corrections A_m et B_r à des intervalles réguliers, égaux à $t\alpha$ et si le nombre des séries est t, les corrections inconnues pourront être tirées rigoureusement des équations de condition.

Si l'on envisage d'abord les erreurs des cercles, on peut admettre que, pour un cercle gradué placé sensiblement dans un plan vertical, de la forme usuelle et d'un métal à peu près homogène, les termes principaux de l'erreur provenant de la construction et de l'action du cercle sont de la forme

$$A_m + F \sin(R_m + \alpha),$$

où A_m indique la correction de division et où le terme suivant indique l'effet de la flexion du cercle. Cette flexion est une petite rotation relativement à l'axe, telle que celle qui résulterait de l'application d'un poids à un point $\alpha + \beta$ de l'arc divisé, le cercle restant fixé à l'axe. Cette flexion paraît être l'effet résultant d'un très grand nombre de poids distribués autour du cercle et figurant les inégalités de forme et de densité aux différents points du cercle. Une étude élémentaire du problème suffit à montrer que, dans les circonstances ordinaires, tandis que la flexion demeure une quantité du premier ordre, la distorsion de la forme dans un cercle bien fait doit être pratiquement négligeable. Par conséquent, la correction $F \sin(R_m + \alpha)$ est également applicable à l'indication de chaque microscope. La question de savoir si un cercle donné suit la loi simple mentionnée peut être facilement tranchée. M. Boss cite des expériences faites avec un poids suspendu à la périphérie du cercle.

Voici quelques indications sur la marche suivie dans les opérations. Il suffira de considérer ce qui se rapporte à l'une des deux positions du cercle, en observant que pareille opération est répétée après retournement et combinée avec la première pour affaiblir les équations personnelles propres aux observateurs et aux microscopes. On commence par les arcs de 45°. Dans la première série, la lunette pointant au zénith, A donnait une lecture de 270° et B de 315°. La première lecture dans la

Digitized by Google

série était 180° pour A et 45° pour B, la huitième 225° pour A et 0° pour B; les autres de la neuvième à la seizième correspondaient, dans l'ordre rétrograde, aux huit premières lectures. La Table suivante montre avec le schéma des opérations les nombres conclus comme se rapportant à l'époque moyenne :

Arcs de 45°.

Ordre des opérations.	Degrés lecture. A.	Degrés lecture. B.	Secondes des sommes conclues.
1 — 16	180°	45°	51",26
2 — 15	135	90	51,00
3 — 14	90	135	51,54
4 — 13	45	180	50,78
5 — 12	0	225	50,62
6 — 11	315	270	49,85
7 — 10	270	315	50,76
8 — 9	225	0	50,28

Il en résulte les équations suivantes :

$$A_0 + B_{45} + F\sin(180^\circ + \alpha) + F'\sin(45^\circ + \alpha') + 51'',26 = R_0,$$
$$A_{45} + B_0 + F\sin(135 + \alpha) + F'\sin(90 + \alpha') + 51,00 = R_0,$$
$$A_0 + B_{45} + F\sin(90 + \alpha) + F'\sin(135 + \alpha') + 51,54 = R_0,$$
$$A_{45} + B_0 + F\sin(45 + \alpha) + F'\sin(180 + \alpha') + 50,78 = R_0,$$
$$A_0 + B_{45} + F\sin(0 + \alpha) + F'\sin(225 + \alpha') + 50,62 = R_0,$$
$$A_{45} + B_0 + F\sin(315 + \alpha) + F'\sin(270 + \alpha') + 49,85 = R_0,$$
$$A_0 + B_{45} + F\sin(270 + \alpha) + F'\sin(315 + \alpha') + 50,76 = R_0,$$
$$A_{45} + B_0 + F\sin(225 + \alpha) + F'\sin(0 + \alpha') + 50,28 = R_0,$$

d'où l'on déduit aussitôt

$$51'',04 + B_{45} = R_0, \qquad 50'',48 + A_{45} = R_0$$

et

$$A_{45} - B_{45} - 0'',56 = 0.$$

Le cercle B étant ensuite décalé, on le tournait de manière à faire correspondre la lecture 0° à la lecture 270° de A, et l'on calait. Les lectures de A restant celles de la première série, les lectures de B devenaient plus grandes de 45°. D'un système d'équations tout à fait analogue au précédent on déduisait

$$A_{45} + B_{45} - 0'',46 = 0$$

et, comme conséquence, en tenant compte du résultat précédent,

$$A_{45} = +0'',51, \qquad B_{45} = -0'',05.$$

Digitized by Google

On continuait en prenant 45°, 90°, ... pour première lecture de B. Ensuite, laissant B fixe sur l'axe, on déplaçait le cercle A, ce qui donnait un total de 16 séries pour une même position de l'instrument. Les nombres suivants que nous reproduisons montrent assez la valeur du procédé :

Détermination de A_{45} *et* B_{45}.

Position Ouest.		Position Est.	
A_{45}.	B_{45}.	A_{45}.	B_{45}.
+0",51	—0",05	+0",56	+0",02
+0,59	0,00	+0,70	—0,04
+0,47	—0,01	+0,50	+0,02
+0,54	—0,08	+0,54	+0,05
+0,51	+0,20	+0,61	—0,03
+0,60	+0,04	+0,62	0,00
+0,55	+0,11	+0,70	—0,06
+0,56	—0,03	+0,53	—0,10
+0,54	+0,02	+0,60	—0,02

Nous renverrons à l'article de M. Boss pour le détail des opérations qui font connaître les erreurs A et B de 30° en 30°, etc., ainsi que pour ce qui concerne la détermination de la flexion des cercles, aisée à obtenir une fois qu'on a les valeurs des corrections A et B. Le Tableau des valeurs des coefficients F et F′ montre autant d'accord que celui des A, B.

M. Boss est arrivé à cette conviction que, pour les rayons du cercle fixés au disque central, une section en T est préférable à la forme trapézoïdale employée par Pistor et Martins.

On trouvera, après le Tableau des corrections adoptées pour les erreurs de division, la comparaison des résultats obtenus en 1880 et 1895, puis des détails intéressants sur le mode de division des cercles par les constructeurs.

Quant aux avantages du procédé suivi, qui exige à la vérité deux observateurs et certaines précautions du côté des variations de température et de la torsion de l'axe, ils résident, pour M. Boss, dans ce fait que les mesures sont exécutées, dans les mêmes conditions, avec les mêmes microscopes et le même éclairage que les mesures habituelles, et aussi dans la facilité avec laquelle un même arc peut être déterminé par des combinaisons variées.

Tantôt on s'est servi de grands cercles divisés (cercle mural de Gambey par exemple), tantôt on a cru inutile d'en avoir d'assez grands. M. Boss

Digitized by Google

est conduit par ses recherches à partager l'opinion de Gambey; la crainte que, pour les cercles de grande dimension, l'influence de la flexion devienne notable est mal fondée tant que la flexion suit la loi théorique, et il lui paraît que les constructeurs sont aujourd'hui capables d'exécuter d'excellents cercles de 1^{m} au moins de diamètre, permettant d'accroître la précision des mesures qui se réduisent en définitive à des mesures de longueurs. Il n'y a pas lieu de s'arrêter à la gêne que peut entraîner dans l'usage habituel une dimension plus grande. On ne voit pas de raison pour que l'effet de la température soit angulairement plus sensible avec les grands cercles qu'avec les petits; et l'on peut dire qu'il s'agit là d'erreurs semi-accidentelles. En revanche, avec un grand cercle, les erreurs systématiques peuvent être déterminées avec plus de précision et de facilité, ce qui devient d'une importance majeure dans la détermination des positions des étoiles fondamentales.

BOSS (Lewis). — Corrections des divisions des cercles de l'instrument méridien d'Albany (*Astr. Journ.*, 401).

Sans revenir sur le procédé décrit (n°s 382-383) pour obtenir les corrections des divisions, M. Boss profite de l'expérience acquise dans l'étude des cercles de Pistor et Martins, divisés à partir des degrés, en copiant une échelle auxiliaire. Une fois déterminées les erreurs des divisions principales, avec tout le soin désirable, il ne paraît pas avantageux de répéter cette détermination pour les traits intermédiaires copiés sur l'échelle, supposée, bien entendu, aussi exacte que dans le cas de l'instrument d'Albany, à moins que l'erreur probable d'une détermination avec le cercle méridien ne soit négligeable relativement aux erreurs de l'échelle.

Il est fort utile pour les astronomes de connaître les principes du procédé de division de leurs cercles, car la recherche des erreurs pourra être ainsi conduite de la manière la plus efficace et en même temps la plus économique.

O. C.

DÉTERMINATION DE LA CONSTANTE DE PRÉCESSION.

NEWCOMB (S.). — Une nouvelle détermination du mouvement de précession (*Astr. Journ.*, 405, 413, 426, 429).

Cet article de l'éminent auteur, qui a donné lieu à une discussion assez longue, appelle quelques explications préliminaires. A la Confé-

Digitized by Google

rence tenue à Paris, en mai 1896, pour convenir d'un système unique d'étoiles fondamentales, M. Newcomb fut invité à étudier la question d'une nouvelle détermination de la constante de précession. Pressé d'aboutir, M. Newcomb a surtout voulu faciliter les recherches de l'avenir en présentant l'ensemble de la théorie et des formules du mouvement de précession qui, tout en se rapprochant beaucoup de la vérité, possèdent la consistance et l'homogénéité désirables (1). On se rappelle que l'un des motifs de M. Newcomb pour entreprendre la revision des théories des planètes de Le Verrier était le défaut d'homogénéité que l'illustre astronome n'avait pu éviter complètement.

M. Lewis Boss, dont nous reproduirons plus loin les articles, se place à un autre point de vue que M. Newcomb. Il considère, en prenant la chose de haut, que la détermination du mouvement de précession est intimement liée aux autres problèmes de l'Astronomie stellaire et par suite dépend de la précision et de l'étendue des séries d'observations tant anciennes que modernes. Il craint, à tort peut-être, que le choix d'un nombre par la Conférence n'entrave les progrès de l'Astronomie stellaire. Le changement de la constante de Struve, presque partout adoptée, pour une autre qui n'est pas assurée de l'assentiment des astronomes aurait pu être certes évité sans grand dommage.

M. Newcomb prend pour base la nouvelle réduction des observations de Bradley par le Dr Auwers combinée avec les positions obtenues à Greenwich pour 1860 et 1865. Les mouvements propres de toutes les étoiles se trouvant calculés par le Dr Auwers, la suite du calcul se trouve d'autant abrégée. Des corrections systématiques sont appliquées aux mouvements propres pour les réduire aux systèmes du *Catalogue d'étoiles fondamentales* de M. Newcomb (2).

La circonstance la plus gênante dans la discussion est le mouvement parallactique des étoiles provenant de la translation solaire. Sans doute il paraît y avoir proportionnalité entre les deux comme Stumpe l'a trouvé. Mais en même temps les mouvements propres dépendent du mouvement de précession adopté. M. Newcomb a jugé nécessaire d'accepter, comme ses prédécesseurs dans la théorie de la précession, l'hypothèse que la distance d'une étoile dépend de la grandeur.

Une autre difficulté provient du fait que les mouvements propres ne peuvent être assimilés à des variations ou erreurs accidentelles. Il y a un grand excès de mouvements propres très faibles ou considérables

(1) L'article résume un Mémoire plus étendu inséré dans les *Astronomical Papers*, t. VIII, Partie I.

(2) Pour les ascensions droites, le Catalogue est compris dans le tome I des *Astronomical Papers*. Un nouveau système de déclinaisons a été construit.

Digitized by Google

par rapport à ce que donnerait la loi théorique des erreurs sur laquelle on s'appuie dans la combinaison des observations. Ce fait est une conséquence très naturelle des distances inégales des étoiles. Il paraît donc nécessaire d'exclure *a priori* les grands mouvements propres.

Pour remédier aux deux difficultés signalées, M. Newcomb a utilisé toutes les méthodes possibles : (*a*) en partageant les étoiles par quadrants d'ascension droite et par groupes de grandeurs (c'est la méthode *statistique*); (*b*) en prenant pour inconnue l'effet du mouvement parallactique ou du mouvement propre dû au mouvement solaire, ainsi que la constante de précession, formant les équations pour chaque étoile et les résolvant en séparant les résultats fournis par les ascensions droites de ceux des déclinaisons; (*c*) en procédant par zones d'étoiles $< 4^{M}$ et faisant pour le centre de chaque zone le même calcul que dans la méthode précédente (*b*), afin de tenir compte du fait que des étoiles voisines ont souvent un même mouvement propre; (*d*) en choisissant des coordonnées auxiliaires (rapportées suivant la proposition de Kapteyn à l'apex solaire comme pôle) de manière à éliminer le mouvement parallactique, partageant le ciel en quatre régions et considérant les grandeurs des étoiles de 3^{M} à 7^{M}.

Comme résultats principaux, M. Newcomb trouve pour la correction Δp_1 de la précession luni-solaire $\times 100$, en introduisant la correction ΔE dépendant du mouvement de l'équinoxe dans le cas des $\mathbb{R}$:

D'après les ascensions droites seules.....	$+0^{s},35$	$+1,09\,\Delta E$
D'après les déclinaisons seules.....	$+1,10$	
En éliminant le mouvement parallactique...	$+0,64$	

M. Newcomb estime que la valeur à adopter est $\Delta p_1 = +0'',80$.

Il est clair que l'incertitude qui peut subsister est une fraction notable de la différence entre les nombres de Newcomb ($50\,36'',84$) et de Struve ($50\,38'',23$) pour la précession luni-solaire.

Dans le n° 413, répondant à M. Boss, M. Newcomb insiste sur la nécessité de l'homogénéité des formules, et il met en doute la possibilité de la respecter en prenant la constante de Struve et les données déduites des meilleures théories existantes. S'il n'a pas utilisé tous les catalogues, son point de départ est, en fait, aussi solide : avec les étoiles de Bradley on n'a pas à redouter l'erreur systématique de la grandeur de l'étoile sur le passage observé, qui aurait de l'importance dans le cas des étoiles faibles. Le *motus peculiaris* d'une portion plus considérable qu'on n'aurait pu croire des étoiles de Bradley n'atteint pas, d'après les recherches de Kapteyn et les siennes, $1''$ par siècle.

Quant à l'erreur systématique dans les mouvements propres en déclinaison de la forme $\Delta\delta_\alpha = k \cos\alpha$, qui n'est pas éliminée du mouvement

Digitized by Google

de précession déduit des étoiles distribuées uniformément dans toutes les zones de la sphère céleste, M. Newcomb dit qu'il s'est servi, en fait, des mouvements propres de M. Boss, desquels ceux de M. Auwers ne diffèrent pas, et qu'après coup il a encore vérifié que les derniers n'étaient pas affectés d'une erreur de la forme susdite (M. Boss avait émis un doute dans le n° 410, p. 10, sur la non existence des erreurs $\Delta\delta_\alpha$, d'après la discordance des valeurs Δp_1 déduites des Æ et des ⊕).

Un progrès marqué peut-il être espéré avant 40 ou 50 ans, dans la connaissance des constantes? M. Newcomb ne le pense pas. En tous cas, pour les recherches de l'avenir, il faut commencer par adopter une valeur de la précession.

Le n° 426 contient un nouvel article de M. Newcomb, dans lequel il s'attache surtout à montrer que l'adjonction de 12000 ou 15000 positions d'étoiles faibles n'auraient pas amélioré son résultat, au moins en ce qui concerne les erreurs systématiques $\Delta\alpha\delta$ difficiles à apprécier; que l'utilisation des séries d'étoiles australes, très désirable en principe, rencontre des difficultés. Les positions les plus anciennes sont celles du Catalogue du Cap pour 1840, les dernières sont fournies par les observations du Cap entre 1875 et 1889; ce qui donne un intervalle moyen de 45 ans. Or pour le Catalogue de 1840 les matériaux nécessaires à la discussion du Catalogue sont insuffisants. On ne peut ni déterminer la réduction $\Delta\alpha\delta$ ni se former une idée de leur grandeur, et il n'y a que quelques centaines d'étoiles à utiliser.

A cause du petit intervalle de temps, 45 ans, les erreurs accidentelles et systématiques se trouveraient doublées relativement à ce qu'elles sont pour les étoiles de Bradley.

Nous laissons de côté ici une série de critiques adressées par M. G.-W. Hill à M. Newcomb (n° 428) touchant la détermination de l'équinoxe, parce qu'elles ne rentrent pas aussi directement dans la discussion. Mais l'éminent auteur nous semble avoir raison en trouvant que M. Newcomb exagère les difficultés provenant de l'équation personnelle due à la grandeur de l'étoile et en disant que si le point de départ de la discussion devait être fourni par Bradley, le second terme représenté par les seules observations faites à Greenwich jusqu'en 1875 aurait pu être consolidé par l'adjonction d'autres séries.

BOSS (Lewis). — Sur la détermination de la précession, par le professeur Newcomb, et sur la Conférence de Paris en 1896 (*Astr. Journ.*, 410, 423, 430).

M. Boss, après avoir constaté que dans les trois recherches clas-

Digitized by Google

siques sur la précession dues à O. Struve (1844), L. Struve (1887) et S. Newcomb (1897), les observations de Bradley constituent le seul et unique point de départ, estime qu'il serait prudent d'avoir égard aux lois connues de la combinaison des observations.

Ayant eu l'occasion de s'occuper autrefois de la détermination de la constante de précession, il constata que le nombre des séries d'observations à introduire dans la discussion était un élément de première importance. Les erreurs systématiques des Catalogues d'étoiles sont ordinairement du même ordre de grandeur que les erreurs accidentelles des positions individuelles. Il arrive d'habitude qu'ayant un nombre relativement limité de telles positions comparées avec des positions fondamentales imparfaites, on veut déterminer non seulement les coefficients de l'erreur systématique, mais encore ce qu'on peut appeler sa *loi*, et c'est cette dernière opération qui introduit la principale incertitude dans cet ordre de discussions. Il est impossible par conséquent de débarrasser aucun Catalogue de ses erreurs systématiques. La combinaison de beaucoup de Catalogues donne seulement lieu à la possibilité d'avoir des résultats moyens dégagés de telles erreurs. Il est important aussi que la discussion embrasse autant d'étoiles que possible, de manière que les mouvements propres considérables ou anormaux aient une moindre part dans le résultat.

Dans les différentes discussions jusqu'ici, la détermination de la contante de précession a été faite en ayant surtout égard au mouvement de l'équinoxe, une grande prépondérance étant donnée aux étoiles voisines de l'équateur. Mais on peut aussi déduire la constante du mouvement du pôle à travers les étoiles, déterminer, en d'autres termes, n ou m.

Après la période de transition où paraît se trouver actuellement la Science, on peut croire que les problèmes d'Astronomie stellaire, aberration, variation de latitude, etc., concentreront surtout l'attention. Le besoin de Catalogues d'étoiles fondamentales pour les observations méridiennes différentielles se fait sentir de plus en plus. Quand on possédera des Catalogues avec des positions plus nombreuses et plus précises, beaucoup d'instruments méridiens aujourd'hui non utilisés rendront les services des instruments extra-méridiens avec moins de peine. M. Boss estime que le travail de calcul pour ces mesures différentielles sera diminué de moitié et le poids des résultats au moins doublé en comparaison de ce que l'on obtient aujourd'hui. Les éphémérides principales à l'usage des marins, des géodésiens, aussi bien que des astronomes, ne paraissent pas répondre aux desiderata de l'Astronomie de position indiqués ci-dessus. M. Boss se demande s'il ne conviendrait pas d'en préparer pour l'usage exclusif des astronomes. Dans un numéro postérieur de *l'Astr. Journal* (n° 423) il formule les critiques à l'adresse de

Digitized by Google

M. Newcomb, après avoir insisté jusqu'alors sur la question d'opportunité : les matériaux d'observation pour les étoiles brillantes existent en abondance pour une recherche du mouvement de précession beaucoup plus étendue que celle présentée dans le Mémoire de M. Newcomb; des observations de zones d'étoiles faibles peuvent aussi être employées utilement dans l'étude du problème, et l'on peut attendre des nouvelles observations en cours un progrès marqué; en même temps il faudrait tenir compte de l'influence de la variation de latitude (*Cf.* Chandler, n° 284).

M. Boss montre le parti qu'on peut tirer des observations de zones d'étoiles faibles et des recherches du Dr Dreyer et du Dr Bolte ainsi que des siennes concernant la discussion des observations de Lalande, comparées avec celles de Schjellerup et celles d'Albany; et comment les erreurs systématiques $\Delta\delta_\alpha = k \cos\alpha$ se laissent connaître avec une approximation remarquable. On pourrait sans doute utiliser encore les observations de Bessel comme tendent à le prouver les recherches récentes du Dr Ristenpart. L'objection tirée de l'équation personnelle dépendant de la grandeur n'est pas, pour M. Boss, une difficulté insurmontable. D'ailleurs on ne l'évite pas avec les étoiles de Bradley puisque beaucoup d'entre elles sont $< 6^M$.

Les astronomes trouveront dans le n° 430 une exposition plus précise des vues et des critiques du Prof. Boss. Il n'admet pas que la Conférence de Paris ait voulu imposer silence à ceux qui trouvent que le temps n'est pas encore arrivé de l'adoption générale de nouveaux nombres pour l'aberration et la précession. Tout en rendant justice aux mérites du travail de M. Newcomb, il ne correspond pas, pour lui, à l'ensemble des matériaux accumulés qui appellent la discussion. Vient ensuite l'examen de quelques points particuliers.

(*a*). *Équation personnelle dépendant de la grandeur.* — Pour voir jusqu'à quel point cette erreur, qui ne lui paraît pas (n° 423) devoir influencer beaucoup les passages observés à l'œil et à l'oreille, affecte les anciennes observations, M. Boss donne la comparaison des observations d'Albany (zone 0° à + 5°) avec les observations correspondantes de Lalande, Bessel et Schjellerup. Il trouve que les différences, supposées réelles, indiqueraient une équation positive pour les anciennes observations, alors qu'*a priori* on pouvait adopter le signe opposé. Avec des comparaisons analogues embrassant divers Catalogues se rapportant à des époques variées, beaucoup d'observations étant comprises dans chaque groupe, il semble à M. Boss possible de distinguer entre les éléments qui varient progressivement avec le temps et ceux, s'il en existe, qui impliquent une équation personnelle.

Digitized by Google

(*b*). *Erreurs systématiques.* — M. Boss, tout en comprenant les motifs de l'emploi par M. Newcomb des mouvements propres de Bradley-Auwers, est d'opinion que la combinaison des observations toutes récentes avec celles d'un Catalogue se rapportant à 1830±, de plus grand poids que le Catalogue de Bradley, aurait conduit à une valeur de la précession méritant autant de confiance que le nombre de M. Newcomb. Mais alors pourquoi ne pas combiner toutes les observations comme on le fait pour obtenir des valeurs sûres des mouvements propres?

(*c*). *Valeur relative de la précession déduite des Æ et des ☉.* — M. Boss insiste particulièrement sur ce point. Il énumère toutes les incertitudes qui peuvent affecter la détermination de l'équinoxe au moyen des Æ, c'est-à-dire par l'intermédiaire des observations du Soleil et appelle en témoignage Wagner (*Cf.* V. J. S. 1873, p. 46; *Observations de Poulkovo,* t. XII, p. 90) ainsi que Nyrén (Cf. *Das Æquinox für* 1865, p. 27); il reproduit l'opinion même de M. Newcomb sur le peu de poids qu'il faut attribuer aux équinoxes déterminés par Maskelyne et Piazzi (*Equatorial fundamental Stars*, *Cf.* p. 20-24, 33), ce qui jette le doute sur le mouvement de l'équinoxe. Pour remédier à cet état de choses, il faudrait, en premier lieu, faire les observations du Soleil dans des stations plus basses en latitude que Greenwich et Poulkovo.

(*d*). *Importance des déclinaisons d'étoiles pour assurer la valeur de la précession luni-solaire.* — Un autre moyen, comportant moins d'incertitudes, ainsi que le dit lui-même M. Newcomb (*The Precession constant,* p. 70), est d'utiliser les déclinaisons des étoiles. La source la plus sérieuse d'incertitude réside ici dans la possibilité d'erreurs systématiques $\Delta\delta_\alpha$. Mais en prenant $0'',10$ pour erreur probable de $\Delta\delta_\alpha$ ou de n, la combinaison des différentes séries conduirait à une erreur probable de $\pm \frac{0'',10}{\sin\varepsilon} = \pm 0'',25$ pour la précession luni-solaire, ce qui est inférieur à l'erreur probable affectant la même constante déduite des Æ. M. Boss montre que son Catalogue de 500 étoiles publié il y a vingt ans réalise les *desiderata* en ce qui concerne les erreurs systématiques $\Delta\delta_\alpha$. Il faut donc faire à la discussion des déclinaisons une part aussi large qu'aux ascensions droites.

(*e*). *Observations méridiennes d'étoiles australes.* — M. Boss, qui s'est beaucoup occupé des étoiles australes depuis quelques années, montre le parti qu'on peut tirer des matériaux que M. Newcomb re-

Digitized by Google

grettait de laisser inutilisés. Si l'on pose

ρ = Distance à l'étoile ou au groupe d'étoiles considéré;

c = Mouvement de translation du Soleil exprimé avec la même unité que ρ;

$M = \frac{c}{\rho}$;

$\Delta\psi$ = Correction cherchée de la précession luni-solaire;

ε = Obliquité de l'écliptique;

A et D = Æ et ⦶ de l'apex solaire;

$\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ = Mouvements propres calculés ou moyennes de ceux du groupe,

on a les deux équations

$$(\Delta\psi \cos\varepsilon)\cos\delta + (\Delta\psi \sin\varepsilon)\sin\delta \sin\alpha + (M \cos D \cos A)\sin\alpha - (M \cos D \sin A)\cos\alpha = \Delta\alpha \cos\delta,$$

$$(\Delta\psi \sin\varepsilon)\cos\alpha + (M \cos D \cos A)\sin\delta \cos\alpha + (M \cos D \sin A)\sin\delta \sin\alpha - (M \sin D)\cos\delta = \Delta\delta.$$

Le premier terme dans la première équation est le seul qui se ressentirait de l'erreur systématique $\Delta\alpha_\delta$ sur les ascensions droites, qui a fixé l'attention de M. Newcomb. Dans le cas idéal d'une distribution régulière des étoiles d'un pôle à l'autre, on voit que $\Delta\psi \sin\varepsilon$ résulterait des équations indépendamment de toute hypothèse sur la translation solaire. M. Boss évalue ensuite les poids relatifs des termes dans la solution utilisant une zone ou une portion du ciel. L'incertitude de $\Delta\alpha_\delta$ se montre beaucoup affaiblie. Mais le fait surtout important est celui signalé tout à l'heure pour la correction $\Delta\psi \sin\varepsilon$ déduite d'observations embrassant tout le ciel. C'est pour cela que M. Boss a insisté sur la convenance de combiner plusieurs Catalogues pour les différentes régions du Ciel. Sans doute ces Catalogues sont souvent affectés par des erreurs systématiques, mais d'après son expérience M. Boss estime possible de les débarrasser de ces erreurs de telle sorte qu'ils puissent être utilisés de la manière indiquée. Il annonce la publication prochaine de ses études sur les Catalogues d'étoiles australes qui confirmeront ce qui précède.

O. C.

Digitized by Google

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE;

PAR M. H. POINCARÉ.

1. Les coefficients du développement de la fonction perturbatrice sont eux-mêmes des fonctions des éléments et peuvent être développés, par exemple, suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons. On peut se proposer de rechercher quelles sont les conditions de convergences de ces développements.

Nous désignerons par Δ la distance des deux planètes, par u et u' les deux anomalies excentriques, par l et l' les deux anomalies moyennes, et nous étudierons le développement de $\frac{1}{\Delta}$, c'est-à-dire de la partie principale de la fonction perturbatrice; nous distinguerons le développement suivant les anomalies moyennes et le développement suivant les anomalies excentriques.

Soient

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma A_{m,m'} E^{\sqrt{-1}(ml+m'l')}$$

le premier de ces développements et

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma B_{m,m'} E^{\sqrt{-1}(mu+m'u')}$$

le second. Je représente par E la base des logarithmes népériens.

Les coefficients $A_{m,m'}$ de même que les coefficients $B_{m,m'}$ peuvent s'exprimer par des intégrales définies.

Posons

$$x = E^{\sqrt{-1}u}, \qquad y = E^{\sqrt{-1}u'}.$$

Alors $\Delta^2 x^2 y^2$ sera un polynome du sixième degré en x et y.

Soient e et e' les deux excentricités et posons

$$\Omega = \frac{me}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{m'e'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

$$V = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right].$$

Digitized by Google

Nous aurons alors

$$(1) \qquad 4\pi^2 B_{m,m'} = \int\int \frac{dx\,dy}{x^{m+1}y^{m'+1}\Delta},$$

$$(2) \qquad 4\pi^2 A_{m,m'} = \int\int \frac{dx\,dy\,VE^{\Omega}}{x^{m+1}y^{m'+1}\Delta},$$

les intégrales étant prises le long des deux circonférences

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1.$$

Considérons ces intégrales définies comme des fonctions des excentricités et des inclinaisons; ces fonctions seront évidemment développables suivant les puissances de ces variables pourvu qu'elles soient assez petites.

Pour trouver les limites de convergence de ces développements, j'appliquerai la méthode de Cauchy et chercherai quels sont les points singuliers de ces intégrales définies, considérées comme fonctions des excentricités et des inclinaisons.

2. Nous sommes donc ainsi amenés à expliquer comment on trouve les points singuliers des fonctions représentées par des intégrales définies et d'abord par des intégrales définies simples.

Soit

$$\int F(x, z)\,dx,$$

une intégrale définie prise par rapport à x le long d'un certain contour : cette intégrale sera alors fonction du paramètre z.

Pour que pour cette fonction une valeur de z soit critique, il faut d'abord que l'un des points singuliers de $F(x, z)$, considérée comme fonction de x, se trouve sur le contour d'intégration.

Mais comme on peut déformer ce contour d'une manière continue, on peut le faire fuir devant le point singulier, et l'on n'est arrêté que quand ce contour se trouve pris entre deux points singuliers et ne peut plus fuir.

On obtiendra donc toutes les valeurs critiques de z, en exprimant que deux des points singuliers de F, considérée comme fonction de x, se confondent. Mais toutes les valeurs critiques ainsi trouvées ne conviennent pas; il faut, en effet, que les deux points singuliers qui se confondent ainsi soient, avant de s'être

Digitized by Google

confondus, de part et d'autre du contour; c'est seulement à cette condition que le contour, pris entre deux feux, ne peut plus fuir.

Soit donc

$$\varphi(x, z) = 0$$

l'équation qui exprime que la fonction $F(x, z)$ présente une singularité, et supposons qu'elle se décompose en un certain nombre d'équations indépendantes, trois par exemple :

$$\varphi_1(x, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, z) = 0, \qquad \varphi_3(x, z) = 0.$$

On obtiendra les valeurs critiques de z de l'une des deux manières suivantes :

1° En annulant deux des trois fonctions φ_1, φ_2, φ_3, et en écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, z) = \varphi_2(x, z) = 0.$$

En éliminant x et résolvant par rapport à z, on aura une valeur critique de z.

2° En annulant l'une de ces trois fonctions et sa dérivée et écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, z) = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0.$$

On aura encore une valeur critique de z, en éliminant x et résolvant par rapport à z.

3. Considérons maintenant une intégrale double

$$\int\int F(x, y, z)\,dx\,dy,$$

envisagée comme fonction du paramètre z et étendue à un champ quelconque.

Le cas particulier le plus simple est celui où l'on doit intégrer par rapport à x, le long d'un contour fixe indépendant de y, et par rapport à y, le long d'un contour fixe indépendant de x. C'est précisément ce cas particulier simple que l'on rencontre en ce qui concerne les intégrales (1) et (2).

Si l'on ne donne à x et à y que des valeurs réelles, de telle façon que le champ d'intégration se réduise à une aire plane ordinaire, ce cas particulier simple correspond au cas où cette aire est un rectangle.

Digitized by Google

Le cas général peut d'ailleurs toujours être ramené à ce cas particulier simple. Pour nous en rendre compte supposons, d'abord qu'on ne donne à x et y que des valeurs réelles et que le champ d'intégration soit une aire plane. Cette aire plane pourra toujours être décomposée en une infinité d'aires rectangulaires, les unes finies, les autres de dimensions indéfiniment décroissantes. Pour que l'intégrale totale présente une singularité, il faut et il suffit que l'une des intégrales étendues aux aires rectangulaires partielles ait une singularité. Il suffit donc de considérer les aires rectangulaires.

Le même raisonnement, que je ne développe d'ailleurs pas entièrement, serait applicable quand on donnerait aux variables des valeurs imaginaires, si l'on observe d'autre part que l'on peut toujours déformer le champ d'intégration d'une manière continue.

On ne restreint donc pas d'une façon essentielle la généralité en se supposant placé dans ce cas particulier simple; peu nous importe d'ailleurs au point de vue qui nous occupe, puisque avec les intégrales (1) et (2) nous nous trouvons d'emblée dans ce cas simple.

Soient donc C_x et C_y les deux contours fixes d'intégration par rapport à x et à y. Soit

$$\theta(y, z) = \int F(x, y, z)\,dx,$$

l'intégrale étant prise le long de C_x.

Notre intégrale double sera alors

$$\eta(z) = \int \theta(y, z)\,dy,$$

l'intégrale étant prise le long de C_y.

Nous n'avons plus qu'à appliquer les principes du numéro précédent aux deux intégrales simples

$$\int F\,dx, \quad \int \theta\,dy.$$

Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation qui exprime que la fonction F a une singularité.

Décomposons cette équation en équations irréductibles

$$(3) \qquad \varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_3(x, y, z) = 0.$$

Digitized by Google

On obtiendra les singularités de la fonction $\theta(y, z)$:

1° En annulant deux des fonctions φ_1, φ_2, φ_3 et écrivant, par exemple,

$$\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) = 0;$$

2° En annulant une des trois fonctions et sa dérivée et écrivant

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0.$$

Ces singularités peuvent ne pas toutes convenir, car il peut arriver que les deux points singuliers, qui se confondent, soient d'un même côté du contour d'intégration.

Pour avoir les singularités de $\eta(z)$, considérons maintenant celles de $\theta(y, z)$, qui nous seront données par des systèmes d'équations de l'une des deux formes

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$
$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0,$$

et cherchons les conditions pour que deux de ces singularités se confondent.

Si nous considérons z comme un paramètre, x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan, les équations (3) représentent un certain nombre de courbes planes.

Les singularités de θ données par un système d'équations de la forme

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

correspondront aux points d'intersection de ces courbes; celles qui seront données par un système de la forme

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0$$

correspondront aux points de contact d'une de ces courbes avec une tangente parallèle à l'axe des y.

Pour que deux de ces singularités se confondent, il faut :

1° Ou bien que trois des fonctions φ s'annulent à la fois

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0;$$

Digitized by Google

2° Ou bien que l'on ait à la fois

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \qquad \varphi_2 = 0;$$

mais comme la condition ne doit pas dépendre du choix des coordonnées, et qu'en particulier elle doit subsister quand on permute x et y, on devra avoir aussi

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dy} = 0, \qquad \varphi_2 = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dy} = 0,$$

ce qui veut dire que l'une des courbes (3) aura un point double;

3° Ou bien que les deux courbes

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0$$

soient tangentes l'une à l'autre;

4° Ou enfin que les deux courbes

$$\varphi_1 = 0, \qquad \frac{d\varphi_1}{dx} = 0$$

soient tangentes l'une à l'autre. Mais cela entraîne : ou bien

$$\frac{d\varphi_1}{dy} = 0,$$

ou bien $\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = 0$; mais, comme la condition ne doit pas changer quand on permute x et y, on devra avoir dans tous les cas

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dy} = 0.$$

En résumé, les valeurs critiques de z sont :

1° Celles pour lesquelles trois des courbes (3) se coupent en un même point;

2° Celles pour lesquelles deux de ces courbes sont tangentes;

3° Celles pour lesquelles une de ces courbes a un point double.

Seulement toutes ces valeurs peuvent ne pas convenir, car les deux singularités qui se confondent peuvent être situées d'un même côté du contour d'intégration.

Digitized by Google

4. Appliquons ces principes aux intégrales (1) et (2). La fonction sous le signe $\int$ sera holomorphe tant par rapport à x et y que par rapport aux excentricités e et e' et à $\sin\frac{J}{2}$, J étant l'inclinaison.

Il y aura exception seulement :

1° Si $e = 1$ ou $e' = 1$ (condition où x et y n'interviennent pas et sur laquelle nous reviendrons);

2° Si x ou y est nul ou infini;

3° Si Δ s'annule, c'est-à-dire si

$$F = \Delta x^2 y^2,$$

qui est un polynome entier du sixième ordre en x, y, est égal à zéro.

Cela est vrai quels que soient les entiers m et m'; cela est vrai d'ailleurs aussi bien de l'intégrale (2) que de l'intégrale (1), car

$$V \quad \text{et} \quad E^{\Omega}$$

ne cessent d'être holomorphes que si x ou y est nul ou infini.

Les courbes qui correspondent aux courbes (3), c'est-à-dire celles dont les équations expriment que la fonction sous le signe $\int$ cesse d'être holomorphe, se réduisent donc, en ce qui concerne les intégrales (1) et (2), aux quatre droites

$$(4) \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x = \infty, \quad y = \infty$$

et à la courbe du sixième degré

$$(4\ bis) \qquad F = 0.$$

Cette dernière, dans le cas où l'inclinaison est nulle, se décompose en deux courbes du troisième degré

$$(4\ ter) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0.$$

Pour trouver les valeurs critiques des excentricités ou des inclinaisons, nous devons donc chercher celles pour lesquelles trois des courbes (4) ou (4 *bis*) se coupent, ou pour lesquelles deux de ces courbes se touchent, ou pour lesquelles une de ces courbes a un point double.

Mais, comme ces courbes sont les mêmes pour les intégrales (1)

Digitized by Google

et (2), les valeurs pour lesquelles une de ces trois circonstances se présentera, seront également les mêmes pour les intégrales (1) et (2).

Ainsi les valeurs critiques des excentricités ou des inclinaisons sont les mêmes pour les deux intégrales (1) et (2).

Mais une question pourrait encore se poser; nous avons vu que toutes les valeurs critiques ne conviennent pas. Ne pourrait-il se faire qu'une de ces valeurs convînt à (1) sans convenir à (2) ou inversement.

La réponse doit être négative. Comment se fait-il, en effet, que certaines valeurs critiques conviennent et que d'autres ne conviennent pas? Pour nous en rendre compte, faisons varier d'une manière continue l'un de nos paramètres, par exemple l'excentricité e, et, en même temps, déformons d'une manière continue les contours d'intégration. Nous devons diriger cette déformation de telle sorte qu'aucune des valeurs singulières définies par les équations (4) et (4 *bis*) ne se trouve dans le champ d'intégration. Si, e variant d'une manière continue depuis zéro jusqu'à e_0, on peut s'arranger de façon que cette condition ne cesse jamais d'être remplie, c'est que e_0 n'est pas une véritable valeur critique; e_0 ne convient pas; si, au contraire, il est impossible de s'arranger pour que la condition soit remplie (parce que, comme je l'expliquais plus haut, le contour d'intégration se trouve pris entre deux points singuliers), c'est que e_0 est une véritable valeur critique; e_0 convient.

Faisons donc varier e de zéro à e_0 et, en même temps, déformons nos contours d'intégration en partant des contours initiaux

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1$$

qui sont les mêmes pour les intégrales (1) et (2); si e_0 ne convient pas à l'intégrale (1), c'est que nous pouvons déformer nos contours de telle façon qu'à aucun moment une des valeurs singulières satisfaisant aux équations (4) et (4 *bis*) ne se trouve dans le champ d'intégration. Mais si cette condition ne cesse jamais d'être remplie en ce qui concerne l'intégrale (1), elle ne cessera jamais non plus de l'être en ce qui concerne l'intégrale (2), puisque les équations (4) et (4 *bis*) qui définissent les valeurs sin-

Digitized by Google

gulières sont les mêmes pour (1) et pour (2). Donc e_0 ne conviendra pas non plus à l'intégrale (2). C. Q. F. D.

Voici donc un premier résultat.

Les coefficients $B_{m,m'}$ *du développement de la fonction perturbatrice suivant les anomalies excentriques, ainsi que les coefficients* $A_{m,m'}$ *du développement suivant les anomalies moyennes sont eux-mêmes développables suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons.*

Les limites de convergence de ces nouveaux développements sont les mêmes pour les coefficients $B_{m'm'}$ *et pour les coefficients* $A_{m'm'}$; *elles sont les mêmes pour tous ces coefficients quels que soient les entiers* m *et* m'.

5. Considérons le cas particulier où les excentricités sont nulles

$$e = e' = 0.$$

On a alors

$$\Omega = 0, \qquad V = 1$$

et, par conséquent,

$$A_{m,m'} = B_{m,m'}.$$

On a alors

$$\Delta^2 = \cos^2\frac{J}{2}\left[a'^2 + a^2 + aa'\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right] + \sin^2\frac{J}{2}\left[a'^2 + a^2 + aa'\left(xy + \frac{1}{xy}\right)\right].$$

Si nous posons

$$X = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \qquad Y = xy + \frac{1}{xy};$$

on en tirera

$$\Delta^2 = a'^2 + a^2 + aa' X \cos^2\frac{J}{2} + aa' Y \sin^2\frac{J}{2}.$$

On trouvera toutes les singularités en écrivant que la courbe $\Delta^2 = 0$ a un point double; or, comme Δ^2 est fonction linéaire de X et de Y, cette courbe ne peut avoir de point double que si les équations

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = X, \qquad xy + \frac{1}{xy} = Y,$$

où X et Y sont regardés comme les données, $\frac{x}{y}$ et xy comme les

Digitized by Google

inconnues, ont l'une et l'autre une racine double, d'où

$$X = \pm 2, \qquad Y = \pm 2.$$

Voici donc la condition pour que la courbe $\Delta^2 = 0$ ait un point double

$$(5) \qquad a^2 + a'^2 \pm 2aa' \cos^2 \frac{J}{2} \pm 2aa' \sin^2 \frac{J}{2} = 0.$$

Il n'y a pas lieu de chercher ce que donneraient les autres conditions, à savoir que trois des courbes (3) passent par un même point ou que deux de ces courbes se touchent. Ici, où les courbes (3) sont les quatre droites (4) et la courbe $\Delta^2 = 0$, aucune de ces circonstances ne se présentera.

Il reste donc à étudier la condition (5).

Posons $\nu = \sin^2 \frac{J}{2}$ et proposons-nous de développer suivant les puissances croissantes de ν. La condition (5) devient

$$a^2 + a'^2 + 2aa'[\pm(1 - \nu) \pm \nu] = 0,$$

ce qui peut s'écrire de l'une des deux manières suivantes

$$(5\ bis) \qquad (a' \pm a)^2 = 0; \qquad a^2 + a'^2 \pm 2aa'(1 - 2\nu) = 0.$$

Dans la première de ces relations ν n'entre pas; la seconde donne

$$\pm \nu = \frac{(a' \pm a)^2}{4aa'}.$$

Le rayon de convergence sera donc la plus petite des deux valeurs

$$\left| \frac{(a' \pm a)^2}{4aa'} \right|,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(a' - a)^2}{4aa'}.$$

Ainsi la condition de convergence du développement sera

$$\sin^2 \frac{J}{2} < \frac{(a' - a)^2}{4aa'}.$$

La discussion des équations (5 *bis*) montrerait de même que les coefficients $A_{m,m'}$ sont développables suivant les puissances

Digitized by Google

de a, pourvu que

$$a < a'.$$

Mais on peut encore envisager un autre mode de développement.

Posons

$$\mu = \cos^2\frac{J}{2},$$

on aura

$$\mu + \nu = 1.$$

Mais nous pourrons écrire

$$4\pi^2 A_{m,m'} = \iint \frac{dx\,dy}{x^{m+1}y^{m'+1}\sqrt{(a'^2 + a^2) + \mu aa'\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \nu aa'\left(xy + \frac{1}{xy}\right)}}.$$

La quantité sous le radical se réduit évidemment à Δ^2 quand on fait $\mu = \cos^2\frac{J}{2}$, $\nu = \sin^2\frac{J}{2}$. Mais nous pouvons regarder $A_{m,m'}$ comme fonction de μ et de ν considérées comme des variables indépendantes, et développer cette fonction suivant les puissances croissantes de μ et de ν.

La relation (5), qui définit les limites de convergence, s'écrit alors

$$a^2 + a'^2 \pm 2aa'\mu \pm 2aa'\nu = 0$$

ou

$$\pm\mu \pm \nu = \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

La condition de convergence du développement est donc

$$|\mu| + |\nu| < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Cette condition est toujours remplie, car on a

$$|\mu| = \mu; \qquad |\nu| = \nu;$$

$$|\mu| + |\nu| = 1 < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Nos coefficients sont donc toujours développables suivant les puissances de $\cos^2\frac{J}{2}$ *et* $\sin^2\frac{J}{2}$.

Digitized by Google

6. Considérons maintenant le cas particulier où l'inclinaison est nulle et développons suivant les puissances des excentricités e et e'.

Les courbes qui correspondent aux courbes (3) sont les courbes (4) et (4 *ter*), à savoir

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \infty, \quad y = \infty, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0.$$

1° Cherchons d'abord la condition pour que $F_1 = 0$ ait un point double. Pour nous en rendre compte, cherchons la signification de ces équations. Soient C l'orbite de la première planète, C′ celle de la seconde; d'après notre hypothèse ces deux coniques sont dans un même plan. A chaque valeur de x correspond un point M de la conique C et à chaque valeur de y un point M′ de la conique C′.

L'équation $F = 0$ exprime alors que la distance MM′ est nulle, ce qui peut ne pas vouloir dire que les deux points M et M′ coïncident puisque ces deux points peuvent être imaginaires.

L'équation $F_1 = 0$ exprime que le coefficient angulaire de la droite MM′ est égal à $\sqrt{-1}$ et l'équation $F_2 = 0$ exprime que ce coefficient est égal à $-\sqrt{-1}$.

Les équations $x = 0$, $x = \infty$ expriment que le point M est à l'infini sur l'une des deux branches infinies de la conique C; les équations $y = 0$, $y = \infty$ expriment que le point M′ est à l'infini sur la conique C′.

Pour que la courbe $F_1 = 0$ ait un point double, il faut et il suffit que la droite MM′ soit tangente à la fois aux deux coniques C et C′. Les deux coniques C et C′ ont un foyer commun, le Soleil. La droite MM′, qui est une tangente isotrope à C, doit passer par un des foyers de C, et pour la même raison elle doit passer par un des foyers de C′. Soient alors S le foyer commun de C et C′, F le second foyer de C, F′ celui de C′.

Pour que les deux coniques admettent une tangente isotrope commune (en dehors de celle qui passe par S qui existe toujours et qui ne saurait convenir), il faut donc que la droite MM′ passe par F et F′; c'est-à-dire que la droite FF′ ait pour coefficient angulaire $\sqrt{-1}$. Cette condition s'exprime analytiquement comme il suit :

$$ae\,E^{-i\varpi} = a'e'\,E^{-i\varpi'}.$$

Digitized by Google

Je représente par ϖ et ϖ' les longitudes des périhélies.

C'est, là, la condition pour que $F_1 = 0$ ait un point double (en dehors de celui qui, correspondant à la tangente isotrope passant par S, existe toujours et ne saurait convenir).

2° De même, la condition pour que $F_2 = 0$ ait un point double s'écrit

$$ae E^{i\varpi} = a' e' E^{i\varpi'}.$$

3° Pour que les deux courbes $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ soient tangentes, il faut que les deux coniques C et C′ se touchent; car les points d'intersection à distance finie des deux courbes $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ correspondent aux quatre points d'intersection des deux coniques.

Il faut donc que la distance des deux foyers F et F′ soit égale à la somme ou à la différence des grands axes; ce qui s'écrit

$$(ae E^{i\varpi} - a' e' E^{i\varpi'})(ae E^{-i\varpi} - a' e' E^{-i\varpi'}) = (a' \pm a)^2.$$

4° Il faut voir ensuite si l'un des points d'intersection des courbes (4 *ter*) ne peut pas se confondre avec l'un des points d'intersection de l'une de ces courbes avec l'une des droites (4) ou de deux de ces droites entre elles.

Ces deux catégories de points correspondent respectivement : aux quatre intersections de C et de C′ (M et M′ confondus) et aux cas où les deux points M et M′ sont à l'infini sur les deux coniques C et C′.

La condition est donc que l'une des quatre intersections de C et de C′ s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire qu'une asymptote de C soit parallèle à une asymptote de C′.

Cela s'écrit d'une des quatre manières

$$\tang^2 \frac{\varphi}{2} E^{2i\varpi} = \tang^2 \frac{\varphi'}{2} E^{2i\varpi'},$$

$$\cot^2 \frac{\varphi}{2} E^{2i\varpi} = \tang^2 \frac{\varphi'}{2} E^{2i\varpi'},$$

$$\tang^2 \frac{\varphi}{2} E^{-2i\varpi} = \tang^2 \frac{\varphi'}{2} E^{-2i\varpi'},$$

$$\cot^2 \frac{\varphi}{2} E^{-2i\varpi} = \tang^2 \frac{\varphi'}{2} E^{-2i\varpi'},$$

en posant

$$e = \sin\varphi, \qquad e' = \sin\varphi'.$$

Digitized by Google

Je puis écrire aussi

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{1 \mp \sqrt{1-e^2}} E^{2i\varpi} = \frac{1 \pm \sqrt{1-e'^2}}{1 \mp \sqrt{1-e'^2}} E^{2i\varpi'},$$

en prenant dans chaque fraction le signe inférieur dans les deux termes ou le signe supérieur dans les deux termes.

7. Voici donc quelles sont les équations qui définissent les valeurs critiques

$$ae E^{-i\varpi} = a'e' E^{-i\varpi'}, \tag{7}$$

$$ae E^{i\varpi} = a'e' E^{i\varpi'}, \tag{8}$$

$$(ae E^{i\varpi} - a'e' E^{i\varpi'})(ae E^{-i\varpi} - a'e' E^{-i\varpi'}) = (a' \pm a)^2, \tag{9}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{1 \mp \sqrt{1-e^2}} E^{2i\varpi} = \frac{1 \pm \sqrt{1-e'^2}}{1 \mp \sqrt{1-e'^2}} E^{2i\varpi'}, \tag{10}$$

auxquelles il convient d'adjoindre

$$e = 1, \qquad e' = 1. \tag{11}$$

Mais nous avons vu que toutes les valeurs ainsi trouvées peuvent ne pas convenir et il est même aisé de voir qu'elles ne peuvent pas toutes convenir.

En effet, envisageons l'équation (7); elle est satisfaite pour

$$e = e' = 0.$$

Si donc les valeurs critiques définies par cette équation convenaient, notre fonction présenterait des singularités pour des valeurs très petites de e et e'. Nos coefficients ne seraient pas développables suivant les puissances de e et de e', *même pour des valeurs très petites de ces quantités*. Nous savons qu'il n'en est pas ainsi. Donc les valeurs définies par l'équation (7) ne sauraient convenir.

Le même raisonnement s'applique aux équations (8) et (10). Il importe de remarquer que l'équation (10), malgré la présence des doubles signes, ne représente qu'une seule équation analytique irréductible qui prendrait sa forme algébrique si l'on chassait les radicaux. Cette équation irréductible est satisfaite pour $e = e' = 0$.

Restent les équations (9) et (11). Pour trouver la limite de con-

Digitized by Google

vergence définie par l'équation (9), remarquons que a, a', ϖ et ϖ' sont des données de la question et sont réelles, mais que e et e' qui sont nos variables indépendantes pourront prendre des valeurs imaginaires.

Donnons à e une série de valeurs de module constant $|e|$, mais d'argument variable; faisons de même pour e'. Le maximum du module du premier membre de (9) est

$$a^2|e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi')|;$$

la condition de convergence est donc

$$a^2|e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi')| < (a' - a)^2.$$

Nous sommes ainsi conduits à supposer que les seules conditions de convergence de notre développement sont

$$(12)\quad \begin{cases} |e| < 1, \quad |e'| < 1, \\ a^2|e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi')| < (a' - a)^2. \end{cases}$$

Je ne voudrais pas entrer dans trop de détails; je ne puis cependant me contenter d'un aperçu : il faut donc que j'explique en quelques mots comment on peut donner à la démonstration toute sa rigueur.

Considérons le domaine D défini par les inégalités (12). Il ne contient pas de valeurs singulières satisfaisant aux équations (9) et (11). Mais il en contient qui satisfont aux équations (7), (8), (10). Si l'une de ces valeurs convenait, il en serait de même de toutes celles qui satisferaient à la même équation et qu'on pourrait rencontrer en faisant varier e et e' d'une manière continue et sans cesser de satisfaire à cette équation. Cela serait vrai au moins en ce qui concerne la détermination de la fonction que l'on atteindrait par cette variation continue.

Or on verrait qu'on peut atteindre, par une variation continue, une quelconque des valeurs singulières qui satisfont aux équations (7), (8), (10) et aux inégalités (12) en partant de la valeur $e = 0$, $e' = 0$ et sans cesser de satisfaire à ces équations et sans sortir du domaine D. La valeur singulière $e = 0$, $e' = 0$ ne convenant pas, aucune de ces valeurs ne convient.

Les conditions (12) *sont donc les seules conditions de convergence.*

Digitized by Google

La troisième condition (12) sera satisfaite quels que soient ϖ et ϖ', si l'on a

$$|ae| + |a'e'| < a' - a,$$

c'est-à-dire si la distance périhélie de l'une des planètes est plus grande que la distance aphélie de l'autre.

OBSERVATIONS DES PLANÈTES

(194), (273), (377), (379), (403), 1897 DG, DH, DJ, DL, DM, DN, DO ET 1898 DP,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE NICE (équatorial coudé):

PAR M. CHARLOIS

Dates.	T. m. de Nice.	ΔR.	ΔP.	N. de c.	R app.	log f. p.	P app.	log f. p.	*
				(194).					
1897.	h m s	m s	°		h m s		° ′ ″		
Aout 20.	10.14.36	—1.11,70	— 4.53,9	4	22.31.17,74	$\bar{1}$,388n	94.40.15,8	0,813n	1
21.	10.31. 2	+2.15,30	— 0.19,2	4	22.30.46,34	$\bar{1}$,324n	94.59. 8,5	0,816n	2
23.	10.41.25	+1. 3,88	+12.14,1	4	22.29.41,37	$\bar{1}$,253n	95.36.47,4	0,822n	3
				(273).					
Nov. 25.	11. 9.30	+0.53,96	— 4.44,8	4	3.37.19,12	$\bar{2}$,145n	102. 3. 1,9	0,863n	4
				(377).					
Aout 23.	10.18.18	—0.56,91	— 0.53,7	4	21.49.33,19	$\bar{1}$,173n	93. 5.53,2	0,807n	5
24.	9.27.57	—1.43,40	+ 4.51,7	4	21.48.46,71	$\bar{1}$,354n	93.11.38,5	0,805n	5
				(379).					
Aout 21.	9.50.27	+1.17,40	+ 0.14,1	4	20. 9.55,03	$\bar{2}$,540n	108.24.26,9	0,892n	6
23.	8.51. 3	+0.17,15	+ 5. 5,8	4	20. 8.54,77	$\bar{1}$,122n	108.29.18,6	0,888n	6
				(403).					
Nov. 23.	7.52.10	+1.59,77	— 0.30,3	4	2.51. 3,54	$\bar{1}$,481n	70. 1.49,8	0,612n	7
24.	9. 9.14	+1.10,51	+ 6.54,8	4	2.50.14,28	$\bar{1}$,216n	70. 9.14,9	0,568n	7
				DG (25 août 1897) = (188). Grandeur 11,8.					
Aout 28.	9.13.24	+3. 0,32	+ 6.37,7	3	22.30.38,10	$\bar{1}$,467n	77.35.26,5	0,691n	8
Sept. 4.	8.24.15	+2.11,70	— 0.54,6	4	22.25.16,90	1,498n	78.15.18,4	0,704n	9
				DH (25 août 1897) = (426). Grandeur 12,2.					
Sept. 1.	10.49.21	+2.12,29	+ 0.15,5	4	22.31. 4,72	$\bar{1}$,020n	83.49.30,9	0,731n	10
2.	9. 9.56	+1.21,42	+ 1.14,6	4	22.30.13,86	$\bar{1}$,421n	83.50.29,9	0,741n	10
4.	8.44.49	—0.27,16	+ 3.35,4	4	22.28.25,29	$\bar{1}$,457n	83.52.50,4	0,745n	10

Digitized by Google

Dates.	T. m. de Nice.	ΔR.	ΔP.	N. de c.	R app.	log f. p.	P app.	log f. p.	*
					DJ (27 août 1897) = (427).				
					Grandeur 12,5.				
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Sept. 2.	9.35. 1	−1.54,41	− 4.47,4	4	22.22.12,56	$\bar{1}$,325 *n*	94.37.43,5	0,814 *n*	11
					DL (23 novembre 1897) = (429).				
					Grandeur 11,8.				
Nov. 24.	8.39.40	−0.51,18	+ 4. 6,3	5	3.18.55,22	$\bar{1}$,410 *n*	76.20.15,9	0,671 *n*	12
29.	8. 5.46	+0.45,20	− 3.11,4	5	3.15. 1,47	$\bar{1}$,435 *n*	76.56.13,9	0,680 *n*	13
Déc. 17.	8.59.34	+0.32,61	+ 0.26,0	5	3. 5.38,95	$\bar{2}$,562 *n*	78.31. 6,9	0,672 *n*	14
22.	10.14.14	+3.51,63	+ 2.47,1	4	3. 4.37,08	$\bar{1}$,154	78.46.26,2	0,681 *n*	15
					DM (18 décembre 1897) = (430).				
					Grandeur 12,2.				
1897.									
Déc. 21.	10.56.22	−4.32,58	− 6.51,3	3	4.39.54,85	$\bar{2}$,579	72.32.18,9	0,590 *n*	16
27.	10.49.44	+0.37,01	− 0.16,0	3	4.36.18,94	$\bar{2}$,889	73.29. 4,0	0,607 *n*	17
1898.									
Janv. 21.	10.10.59	+0.18,26	− 1.39,7	6	4.33.31,64	$\bar{1}$,280	76. 4. 4,9	0,655 *n*	18
22.	9.20.55	+0.36,36	+ 1.47,6	5	4.33.49,73	$\bar{1}$,027	76. 7.32,2	0,646 *n*	18
					DN (18 décembre 1897) = (431).				
					Grandeur 12,8.				
1897.									
Déc. 22.	9.25.23	+2.15,28	− 4.29,6	4	4.43.54,90	$\bar{1}$,149 *n*	69.20. 4,8	0,549 *n*	19
27.	8.45. 5	−1.20,67	− 0.41,0	4	4.40.18,97	$\bar{1}$,238 *n*	69.23.53,4	0,558 *n*	19
1898.									
Janv. 18.	8. 9.24	−1.58,02	− 1.27,7	5	4.30.18,92	$\bar{2}$,745 *n*	69.29.38,3	0,541 *n*	20
22.	8.11.55	−2.36,46	− 2.52,3	5	4.29.40,45	$\bar{2}$,257 *n*	69.28.13,8	0,538 *n*	20
					DO (18 décembre 1897) = (432).				
					Grandeur 12,0.				
1897.									
Déc. 21.	9.54.29	+1.29,28	−11.21,6	3	4.50.29,99	$\bar{1}$,019 *n*	70.29.17,7	0,563 *n*	21
27.	11.16. 0	+0.12.58	− 1.37,0	5	4.44.29,92	$\bar{1}$,057	70.13.29,4	0,560 *n*	22
1898.									
Janv. 11.	8.27. 4	+1. 8,73	+ 0. 8,2	5	4.33.25,72	$\bar{2}$,910 *n*	69.31.14,2	0,543 *n*	23
17.	11.12. 6	−0.15,14	+ 2.43,6	6	4.30.41,18	$\bar{1}$,447	69.12.18,5	0,590 *n*	24
18.	8.48.35	−0.33,32	− 0. 6,7	4	4.30.22,99	$\bar{2}$,350	69. 9.28,2	0,533 *n*	24
22.	8.37.17	+0.42,96	− 9.50,7	5	4.29.18,85	$\bar{2}$,524	68.56.25,7	0,529 *n*	25
					DP (16 juillet 1898).				
					Grandeur 11,0.				
1898.									
Juill. 18.	11. 6.28	−3.10,49	+ 3.55,7	4	20.10. 8,18	$\bar{1}$,154 *n*	100.15.51,3	0,850 *n*	26
20.	11.25.15	−4.57,40	− 4.54,3	5	20. 8.21,29	$\bar{2}$,957 *n*	100. 7. 1,1	0,851 *n*	26
22.	10. 5.46	−1.54,27	+ 3.49,4	5	20. 6.37,05	$\bar{1}$,331 *n*	99.59. 9,2	0,843 *n*	27

Digitized by Google

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	AR moy. 1897,0-98,0.	Réd au j.	℘ moy. 1897,0-98,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	5,0	22.32.25,24	+4,20	94.45.32,3	−22,6	Radcliffe 6062.
2.	9,5	22.28.26,82	+4,22	94.59.50,1	−22,4	Munich$_1$ 31176.
3.	8,0	22.28.33,24	+4,25	95.24.55,9	−22,6	Munich$_1$ 31181.
4.	7,0	3.36.20,44	+4,72	102. 8. 6,6	−19,9	Radcliffe 868.
5.	8,2	21.50.25,87	+4,23	93. 7. 7,0	−20,1	Weisse$_1$ 1127, h. XXI.
5.	8,2	21.50.25,87	+4,24	93. 7. 7,0	−20,2	Id.
6.	7,8	20. 8.33,10	+4,53	108.24.22,2	− 9,4	Radcliffe 5426.
6.	7,8	20. 8.33,10	+4,52	108.24.22,2	− 9,4	Id.
7.	7,5	2.48.58,55	+5,22	70. 2.46,5	−26,4	A. G. Berlin 782.
7.	7,5	2.48.58,55	+5,22	70. 2.46,5	−26,4	Id.
8.	7,0	22.27.33,74	+4,04	77.29.11,2	−22,4	A. G. Leipzig 8998.
9.	7,5	22.23. 1,12	+4,08	78.16.36,4	−23,4	Glasgow$_2$ 1951.
10.	9,0	22.28.48,29	+4,14	83.49.38,6	−23,2	Schjellerup 9227.
10.	9,0	22.28.48,29	+4,15	83.49.38,6	−23,3	Id.
10.	9,0	22.28.48,29	+4,16	83.49.38,6	−23,6	Id.
11.	9,0	22.24. 2,66	+4,31	94.42.53,9	−23,0	$\frac{1}{2}$(M$_1$ 31039 + M$_2$ 12509).
12.	7,9	3.19.41,22	+5,18	76.16.32,8	−23,2	A. G. Leipzig 1004.
13.	7,7	3.14.11,09	+5,18	76.59.48,8	−23,5	A. G. Leipzig 989.
14.	6,5	3. 5. 1,21	+5,13	78.31.14,3	−23,4	$\frac{1}{2}$(Paris 3798 + Y$_3$ 1378).
15.	7,5	3. 0.40,36	+5,09	78.44. 2,6	−23,5	$\frac{1}{2}$(Paris 3717 + Gl. 713).
16.	8,0	4.44.21,69	+5,74	72.39.24,1	−13,9	A. G. Berlin 1322.
17.	8,8	4.35.36,23	+5,70	73.29.34,7	−14,7	A. G. Berlin 1266.
18.	8,0	4.33.11,24	+2,14	76. 5.50,7	− 6,1	$\frac{1}{2}$(Paris 5313 + Gl. 1120).
18.	8,0	4.33.11,24	+2,13	76. 5.50,7	− 6,1	Id.
19.	10,0	4.41.33,77	+5,85	69.24.49,0	−14,6	An. rapp. à A. G. Berlin 1506.
19.	10,0	4.41.33,77	+5,87	69.24.49,0	−14,6	Id.
20.	6,0	4.32.14,71	+2,23	69.31.14,1	− 8,1	$\frac{1}{2}$(A. G. Berlin 1476 + Paris 5297).
20.	6,0	4.32.14,71	+2,20	69.31.14,1	− 8,0	Id.
21.	6,8	4.48.54,89	+5,82	70.40.52,8	−13,5	A. G. Berlin 1344.
22.	8,5	4.44.11,49	+5,85	70.15.20,5	−14,1	A. G. Berlin 1320.
23.	6,0	4.32.14,71	+2,28	69.31.14,1	− 8,1	$\frac{1}{2}$(A. G. Berlin 1476 + Paris 5297).
24.	9,0	4.30.54,08	+2,24	69. 9.43,1	− 8,2	A. G. Berlin 1473.
24.	9,0	4.30.54,08	+2,23	69. 9.43,1	− 8,2	Id.
25.	8,5	4.28.33,70	+2,19	69. 6.24,7	− 8,3	A. G. Berlin 1461.
23.	8,5	20.13.14,39	+4,28	100.12. 7,4	−11,8	$\frac{1}{2}$(Schj. 7941 + M$_1$ 23823).
26.	8,5	20.13.14,39	+4,30	100.12. 7,4	−12,0	Id.
27.	7,5	20. 8.27,00	+4,32	99.55.31,6	−11,8	Munich$_1$ 23508.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE COMÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial de $0^m,26$ d'ouverture);

PAR M. STEPHAN.

Dates.	T. m. Marseille.	ΔA.	ΔΦ.	N. déc.	A app.	log f. p.	Φ app.	log f. p.	★
				Coddington-Pauly.					
1898.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JUIN 17.	11. 2.44	−2. 5,05	+ 2.21,3	5.5	16. 5.17,62	$\bar{2}$,958	118.50.17,0	−0,926	1
18.	10.51.50	+8.23,82	+ 6.13,5	5.5	16. 1.47,29	$\bar{2}$,922	119.26.51,3	−0,928	2
19.	10.16.51	−4.25,72	+ 2.58,2	5.5	15.58.19,11	$\bar{2}$,380	120. 2.26,8	−0,932	3
20.	10.15.26	−1.47,03	− 1.11,1	5.5	15.54.46,22	$\bar{2}$,574	120.38.29,3	−0,933	4
21.	10.50.53	−7.56,52	+ 4.10,5	5.5	15.51. 6,19	$\bar{1}$,121	121.15. 0,0	−0,929	5
23.	11. 2.48	−1.15,04	+ 2. 0,4	5.5	15.43.54,99	$\bar{1}$,283	122.24.58,4	−0,924	6
24.	11. 6.13	−1.20,46	−12. 5,3	5.5	15.40.19,82	$\bar{1}$,333	122.58.56,7	−0,922	7
				Étoile de comparaison du 24 juin, ★ n° 7.					
JUIN 28.		−2.52,59	− 8.12,5	5.5	15.41.40,27		123.11. 2,3		8
				Giaccobini.					
JUIN 19.	12.34.35	−5.53,89	+ 6.19,8	5.5	20.26.40,26	−$\bar{1}$,366	111.27. 1,5	−0,889	9
20.	13.43.19	−1.14,16	+ 1.47,4	5.5	20.14.25,57	−$\bar{2}$,839	111.45.53,2	−0,905	10
23.	12.31.36	+1. 9,18	+ 5.42,7	5.5	19.35. 4,74	−$\bar{1}$,047	112.23.18,8	−0,906	11
28.	12.40.40	−2.59,80	− 3.31,0	5.5	18.15.31,94	+$\bar{1}$,035	111.50.19,9	−0,905	12
29.	11.47.42	−1.36,82	− 1. 7,4	5.5	17.59.31,79	+$\bar{2}$,618	111.26. 9,8	−0,906	13

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	A moy. 1898,0.	Réd. au j.	Φ moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	7	16. 7.18,40	+4,27	118.47.41,5	+14,2	½ [8818 Cape Cat. + 6814 Yarn. (1889)].
2.	7	15.53.19,25	+4,22	119.20.22,2	+15,6	½ [8686 Cape Cat. + 6593 Yarn. (1878)].
3.	9	16. 2.40,53	+4,30	119.59.13,7	+14,9	½ [12434 Arg. W. + 6782 Yarn. (1889)].
4.	7	15.56.28,96	+4,29	120.39.24,8	+15,6	½ [8713 Cape Cat. + 6729 Yarn. (1889)].
5.	7,8	15.58.58,39	+4,32	121.10.35,6	+13,9	8734 Cape Cat.
6.	6,8	15.45. 5,75	+4,28	122.22.40,9	+17,1	½ [8610 Cape Cat. + 6637 Yarn. (1889)].
7.	8,9	15.41.35,99	+4,29	123.10.44,4	+17,6	Anonyme rapportée à γ Loup 5227 B. A. C.

Digitized by Google

★	Gr.	Æ moy. 1898,0.	Réd. au j.	ℙ moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
8.	4	15.44.28,56	+4,30	123.18.57,2	+17,6	$\frac{1}{3}$ [5227 B. A. C. + 8602 Cape Cat. + 6631 Yarnall (1889)].
9.	6,3	20.32.30,23	+3,92	111.20.54,0	—12,3	$\frac{1}{3}$ [7116 B. A. C. + 8953 Yarnall (1878) + 16268 Arg. W.).
10.	8	20.15.35,69	+4,04	111.44.16,8	—11,0	$\frac{1}{2}$ (Cinc. Z. + 16067 Arg. W.).
11.	7,5	19.33.51,29	+4,27	112.17.43,4	— 7,3	$\frac{1}{2}$ [8421 Yarnall (1878) + 21167 Cat. Munich].
12.	9	18.18.27,31	+4,43	111.53.50,5	+ 0,4	14329 Arg. W.
13.	7	18. 1. 4,19	+4,42	111.27.15,0	+ 2,2	$\frac{1}{3}$ [6125 B. A. C. + 7631 Yarn. (1878) + 2944 Porter].

Du 17 au 24 juin, la comète Coddington-Pauly a sensiblement conservé le même aspect : elle possédait un noyau de 7e grandeur avec une trace de chevelure au nord-est.

Le 19 juin, la comète Giaccobini est assez faible et d'apparence un peu grenue; le 20 juin, elle semble plus faible et plus condensée que la veille; le 23, au contraire, elle est plus brillante que le 20; elle est fortement condensée autour d'un petit noyau très net de 10e grandeur. Le 29, la clarté de la Lune rend l'observation difficile.

OBSERVATIONS DE LA NOUVELLE PLANÈTE DP (CHARLOIS),

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial de 0m,26 d'ouverture);

PAR M. LOUIS FABRY.

Dates. 1898.	T. m. Marseille.	ΔÆ.	ΔℙP.	N. de c.	Æ app.	log f. p.	ℙ app.	log f. p.	★
	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
JUILL. 22.	10.23.35	—0.28,40	— 1.14,6	24:8	20. 6.36,75	$\bar{1}$,268 *n*	99.59. 3,5	0,843 *n*	1
23.	9.41.23	—2.47,28	+ 0. 0,8	20:8	20. 5.44,02	$\bar{1}$,393 *n*	99.55.20,3	0,837 *n*	2
25.	10.32.59	+3. 3,72	— 0.45,4	30:12	20. 3.55,12	$\bar{1}$,155 *n*	99.48. 1,5	0,845 *n*	3
26.	9.53.54	+4. 4,08	+ 1.17,2	20:8	20. 3. 3,40	$\bar{1}$,308 *n*	99.44.43,0	0,841 *n*	4

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	Æ moy. 1898,0.	Réd. au j.	ℙ moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	9	20. 7. 0,82	+4,33	100. 0.29,7	—11,6	82 Weisse, XXh.
2.	8	20. 8.26,96	+4,34	99.55.31,4	—11,9	5425 Radc. 1894, 23508 Mun. I.
3.	9	20. 0.47,04	+4,36	99.48.58,3	—11,4	Munich I, 22966; II, 9746.
4.	8	19.58.54,96	+4,36	99.43.37,1	—11,3	Munich I, 22831; II, 9696.

GRANDEUR DE LA PLANÈTE : 10,8.

Digitized by Google

OBSERVATIONS DE LA PLANÈTE DP 1898 (CHARLOIS),

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE (équatorial de $0^m,26$ d'ouverture);

PAR M. BORRELLY.

Dates 1898.	T. m. Marseille. h m s	ΔÆ. m s	ΔΦ. ′ ″	N. dec.	Æ app. h m s	log f. p.	Φ app. ° ′	log f. p.	★
AOUT 11.	11.27. 8	+0.33,18	+ 9.53,0	5.5	19.50.44,99	$-\bar{1}$,043	99.10.51,0	−0,847	1
12.	8.51.18	+0. 3,27	+ 9. 2,8	5.5	19.50.15,08	$-\bar{1}$,237	99.10. 0,7	−0,844	2
13.	9.49.55	−0.30,58	+ 8. 7,4	5.5	19.49.41,23	$-\bar{2}$,765	99. 9. 5,3	−0,849	3
16.	9.23. 6	−1.55,50	+ 6.17,9	5.5	19.48.16,30	$-\bar{2}$,935	99. 7.15,7	−0,848	4
17.	8.43.44	−2.19,00	+ 5.52,1	5.5	19.47.52,80	$-\bar{1}$,174	99. 6.49,8	−0,845	5
18.	8.47.50	−2.41,38	+ 5.31,8	5.5	19.47.30,41	$-\bar{1}$,120	99. 6.29,5	−0,846	6
19.	8.47.25	−3. 1,46	+ 5.14,0	5.5	19.47.10,33	$-\bar{1}$,103	99. 6.11,7	−0,846	7
20.	8.53.23	−3.19,35	+ 5. 4,5	5.5	19.46.52,44	$-\bar{1}$,095	99. 6. 2,1	−0,846	8
22.	8.48. 6	−3.48,50	+ 4.56,3	5.5	19.46.23,28	$-\bar{1}$,009	99. 5.53,8	−0,847	9
24.	9. 7. 8	−4. 8,37	+ 5. 2,2	5.5	19.46. 3,40	$-\bar{2}$,702	99. 5.59,6	−0,848	10
25.	8.36.13	+0.24,97	− 0.14,7	5.5	19.45.57,59	$-\bar{1}$,006	99. 6. 9,4	−0,847	11
26.	8.56.17	+0.20,72	− 0. 5,8	5.5	19.45.53,33	$-\bar{2}$,743	99. 6.18,3	−0,848	12
27.	10.35. 5	+0.19,39	+ 0. 0,9	5.5	19.45.51,99	$+\bar{1}$,144	99. 6.25,0	−0,846	13
29.	8.11.10	+0.23,11	+ 0.41,0	5.5	19.45.55,69	$-\bar{1}$,075	99. 7. 5,0	−0,847	14
30.	8.21.24	+0.28,00	+ 1. 3,9	5.5	19.46. 0,57	$-\bar{2}$,966	99. 7.27,9	−0,847	15
31.	8.56.22	+0.35,77	+ 1.24,4	5.5	19.46. 8,33	$-\bar{2}$,257	99. 7.48,4	−0,849	16
SEPT. 1.	8.20.28	+0.45,69	+ 1.50,8	5.5	19.46 18,24	$-\bar{2}$,902	99. 8.14,7	−0,848	17
2.	8.37. 8	+0.57,74	+ 2. 9,7	5.5	19.46.30,28	$-\bar{2}$,612	99. 8.33,6	−0,849	18
3.	8.42.24	+1.12,41	+ 2.39,9	5.5	19.46.44,94	$-\bar{2}$,375	99. 9. 3,8	−0,849	19
5.	9. 9.37	+1.48,66	+ 3.33,9	5.5	19.47.21,17	$+\bar{2}$,627	99. 9.57,7	−0,849	20
6.	9. 4.17	+2.10,01	+ 3.55,7	5.5	19.47.42,51	$+\bar{2}$,258	99.10.19,5	−0,849	21
7.	8.59. 6	+2.33,80	+ 4.26,6	5.5	19.48. 6,29	$-\bar{2}$,590	99.10.50,4	−0,849	22
8.	8.50.18	+2.59,76	+ 4.48,2	5.5	19.48.32,24	$+\bar{2}$,408	99.11.11,9	−0,849	23
9.	8.42.45	−1.11,91	+10.40,9	5.5	19.48.59,72	$+\bar{2}$,246	99.11.37,4	−0,849	24
10.	8. 5.47	−0.42,14	+11. 6,5	5.5	19.49.29,48	$-\bar{2}$,668	99.12. 3,1	−0,849	25
12.	8.43.47	+0.25,95	+11.53,1	5.5	19.50.37,54	$+\bar{2}$,596	99.12.49,8	−0,849	26
13.	9. 8. 1	+1. 3,34	+12. 9,9	5.5	19.51.14,91	$+\bar{1}$,963	99.13. 6,6	−0,844	27
14.	9. 1.55	+1.42,66	+12.26,6	5.5	19.51.54,22	$+\bar{2}$,937	99.13.23,4	−0,848	28
15.	8.26.47	+2.22,89	+12.37,4	5.5	19.52.34,44	$+\bar{2}$,406	99.13.34,3	−0,849	29
16.	9. 2. 0	+0.53,88	− 5.47,5	5.5	19.53.18,71	$+\bar{2}$,895	99.13.53,3	−0,847	30
17.	8.22.50	+1.37,90	− 5.41,6	5.5	19.54. 2,72	$+\bar{1}$,482	99.13.59,2	−0,849	31
19.	8.31. 4	+3.14,96	− 5.31,2	5.5	19.55.39,77	$+\bar{2}$,764	99.14. 9,6	−0,849	32
20.	9.12.33	−1. 0,16	− 5. 2,4	5.5	19.56.32,61	$+\bar{2}$,517	99.14. 7,7	−0,849	33
21.	9.30.11	−0. 6,61	− 5. 7,6	5.5	19.57.26,14	$+\bar{1}$,252	99.14. 2,5	−0,844	34
22.	8.55.40	+0.47,99	− 5.15,0	5.5	19.58.20,72	+1,089	99.13.55,1	−0,847	35
23.	8.59.52	+1.44,96	− 5.24,5	5.5	19.59.17,68	$+\bar{1}$,130	99.13.45,6	−0,847	36

Digitized by Google

Positions des étoiles de comparaison.

★	Gr.	AR moy. 1898,0.	Réd. au j.	P moy. 1898,0.	Réd. au j.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
1.	8,9	19.50. 7,42	+4,39	99. 1. 9,6	—11,6	1208 W_1 XIX (1).
2.	»	»	+4,39	»	—11,7	Id.
3.	»	»	+4,39	»	—11,7	Id.
4.	»	»	+4,38	»	—11,8	Id.
5.	»	»	+4,38	»	—11,9	Id.
6.	»	»	+4,37	»	—11,9	Id.
7.	»	»	+4,37	»	—11,9	Id.
8.	»	»	+4,37	»	—12,0	Id.
9.	»	»	+4,36	»	—12,1	Id.
10.	»	»	+4,35	»	—12,2	Id.
11.	8,9	19.45.28,28	+4,34	99. 6.35,8	—11,7	½ (21982 Munich I + 9351 Munich II).
12.	»	»	+4,33	»	—11,7	Id.
13.	»	»	+4,32	»	—11,7	Id.
14.	»	»	+4,30	»	—11,8	Id.
15.	»	»	+4,29	»	—11,8	Id.
16.	»	»	+4,28	»	—11,8	Id.
17.	»	»	+4,27	»	—11,9	Id.
18.	»	»	+4,26	»	—11,9	Id.
19.	»	»	+4,25	»	—11,9	Id.
20.	»	»	+4,23	»	—12,0	Id.
21.	»	»	+4,22	»	—12,0	Id.
22.	»	»	+4,21	»	—12,0	Id.
23.	»	»	+4,20	»	—12,1	Id.
24.	8,9	19.50. 7,42	+4,21	99. 1. 9,6	—13,1	1208 W_1 XIX (1).
25.	»	»	+4,20	»	—13,0	Id.
26.	»	»	+4,17	»	—12,9	Id.
27.	»	»	+4,15	»	—12,9	Id.
28.	»	»	+4,14	»	—12,8	Id.
29.	»	»	+4,13	»	—12,7	Id.
30.	7,8	19.52.20,71	+4,12	99.19.53,6	—12,8	5335 Radcliffe.
31.	»	»	+4,11	»	—12,8	Id.
32.	»	»	+4,10	»	—12,8	Id.
33.	8	19.57.28,66	+4,11	99.19.23,4	—13,3	5365 Radcliffe.
34.	»	»	+4,09	»	—13,3	Id.
35.	»	»	+4,07	»	—13,3	Id.
36.	»	»	+4,06	»	—13,3	Id.

(1) L'étoile 1208 W_1 XIX, qui est aussi 8773 Yarnall II, a été comparée trois fois à l'étoile 5335 Radcliffe. La position adoptée ci-dessus est la moyenne arithmétique des catalogues Weisse et Yarnall et du résultat de cette comparaison.

Digitized by Google

REVUE DES PUBLICATIONS ASTRONOMIQUES.

THE ASTRONOMICAL JOURNAL.
nos 361-398.

Chandler (*S.-C.*). — Une nouvelle détermination de la constante de nutation (n° 361).

Elle est fondée sur 20294 observations, faites à Greenwich, avec les cercles muraux de Troughton et Jones, entre 1825 et 1848. A chaque culmination, chaque étoile était observée directement et par réflexion. Les étoiles sont bien distribuées et couvrent tout l'espace de temps utile. Il y a là pour M. Chandler une série idéale d'observations.

L'auteur s'est déjà occupé de leur réduction (*A. J.*, 313, 315, 320), de la correction des déclinaisons à cause de la variation de latitude (*A. J.* 322, p. 74). Ces résultats de la discussion, suivant différentes hypothèses, sont indiqués dans trois Tableaux : corrections de la constante 9″,2235 de Peters; déclinaisons moyennes des 36 étoiles pour 1830; mouvements propres; le résultat final obtenu est 9″,192 ± 0″,012. Vient ensuite la combinaison de cette valeur avec les autres déterminations connues à l'égard desquelles M. Chandler fait plusieurs remarques critiques; il donne le poids le plus fort aux observations de Greenwich. La moyenne générale adoptée est 9″,202 correspondant à une masse de la Lune de $\frac{1}{81,80}$ (pour une précession luni-solaire de 50″,36).

Chandler (*S.-C.*). — Sur les systèmes fondamentaux de déclinaisons et de mouvements propres (n° 364).

Comparaison des systèmes de Boss, Auwers et du système C conclu par l'auteur des observations de Greenwich et pratiquement indépendant des deux autres. Le système B corrigé de la variation de latitude s'accorde parfaitement avec C, mais les différences C — A montrent aussi bien pour les mouvements propres que pour les déclinaisons des écarts notables, qui tiennent certainement pour M. Chandler, partageant l'opinion émise autrefois par M. Boss, au rôle trop exclusif donné aux observations de Bradley.

Newcomb (*S.*). — Sur le système de déclinaisons de Boss et sur celui de l'*Astronomische Gesellschaft* (n° 365).

Comparaison des deux systèmes en ce qui concerne la zone équato-

Digitized by Google

riale et les erreurs systématiques dépendant soit des déclinaisons soit des ascensions droites. M. Newcomb examine la réalité des corrections introduites par Auwers en rapprochant les nombres répondant à 1755 (Auwers) et aux époques des Catalogues modernes de Poulkovo et Greenwich. Il conclut que les corrections n'ont pas de réalité et que les déclinaisons de Bradley sont responsables de ces erreurs apparentes.

Kurt Laves. — Détermination définitive de l'orbite de la comète 1879 V (n° 362).

See (*T.-J.-J.*). — Recherches sur l'orbite de 70 Ophiuchus et sur une perturbation périodique dans le mouvement du système provenant de l'action d'un corps inconnu (n° 363).

On sait qu'un écart notable s'est manifesté, pour les angles de position, entre les observations et l'orbite que l'on doit au professeur Schur (*Astr. Nachr.*, 3220-21). Cet écart serait dû, suivant M. See, à la présence d'un satellite sombre dont le mouvement aurait une période d'environ 40 ans. Mais le problème est difficile à élucider. En attendant, M. See a réuni toutes les mesures disponibles (voir aussi *Astr. Journ.*, 384). Un graphique montre l'étendue des perturbations dont il s'agit.

See (*T.-J.-J.*). — Recherches sur les orbites d'étoiles doubles (99 Hercule, β 416, γ Couronne boréale) et résultats déduits de quarante orbites.

L'auteur a fait paraître l'ensemble de ses recherches dans un Volume dont il a été rendu compte (*Bull.* XIV, p. 116).

Thome (*J.-M.*). — Liste additionnelle d'*errata* dans les Catalogues de Cordoba (n° 364).

Lane Poor (*C.*). — Éphéméride pour la réapparition de la comète 1889 V (n°s 364-380).

Cette comète remarquable a été retrouvée à Nice par M. Javelle.

Dyson, Jacoby (*H.*). — Sur les réfractions photographiques (n°s 366 et 373).

M. Jacoby avait fait des réserves (*Astr. Journ.*, 354) sur les formules

Digitized by Google

publiées par M. Turner dans les *Monthly Notices* (novembre 1893). M. Dyson explique qu'il s'agit d'une confusion dans les notations.

Barnard (*E.-E.*). — Mesures micrométriques du nouveau satellite de Jupiter, pendant l'opposition de 1894 (n° 367).

Hill (*G.-W.*). — Perturbations du premier ordre de Cérès par Jupiter et déduction des éléments moyens (n° 368).

Ce calcul est présenté comme illustration d'une méthode proposée par l'auteur en 1874 (*Astr. Nachr.*, 1982) pour le calcul des perturbations absolues. Ce qui la distingue c'est l'emploi de l'anomalie vraie comme variable indépendante.

Schaeberle (*J.-M.*). — Établissement des formules fondamentales pour les télescopes de Cassegrain et de Gregory (n° 364).

En vue des applications à la Photographie astronomique.

Stone (*O.*), *Lovett* (*E.-O.*). — Positions relatives de Tethys et Rhea, de Tethys et Dione (n° 368).

Newcomb (*S.*). — Sur la variation de l'équation personnelle avec la grandeur de l'étoile observée (n° 369).

De la discussion entreprise par M. Newcomb, en vue de la formation d'un Catalogue d'étoiles fondamentales, il résulterait que la variation de l'équation personnelle est la même qu'il s'agisse d'observations avec l'œil et l'oreille ou avec le chronographe; elle a été trouvée d'environ $0^s,01$ par grandeur.

Barnard (*E.-E.*). — Mesures micrométriques des satellites d'Uranus. Mesures des diamètres de la planète (n° 370, 374).

Belles séries d'observations en 1894 et 1895, accompagnées de remarques intéressantes.

Newcomb (*S.*). — Influence des courants de l'atmosphère et des océans sur les latitudes terrestres (n° 371).

Conséquences générales d'un théorème sur le mouvement de rotation d'un sphéroïde recouvert d'un fluide. Rapprochements avec les résultats de Chandler.

Digitized by Google

Stockwell (*J.-N.*), *Lynn* (*W.-T.*). — Éclipses et chronologie (nos 372, 375, 380).

Roberts (*A.-W.*). — Orbite de RS Sagittaire (n° 373).

Déduction des éléments de l'orbite en partant des observations photométriques.

Dunér (*N.-C.*). — Sur l'étoile variable ζ Hercule (nos 374, 380).

M. Dunér montre que les conclusions de son article publié dans l'*Astrophysical Journal* en 1895 sont confirmées par les observations indépendantes de M. Yendell.

Chandlér (*S.-C.*). — Éléments de variation de U Pégase (n° 374).

Avec des remarques sur les erreurs systématiques provenant de l'inégale sensibilité des différentes portions de la rétine suivant les positions des étoiles variables relativement aux étoiles de comparaison.

Stone (*O.*). — Observations de Mimas et des satellites voisins (n° 374).

Comstock (*G.-C.*). — Sur certaines erreurs systématiques dans les ascensions droites des étoiles fondamentales (n° 376).

Il s'agit des erreurs provenant de la variation de l'équation personnelle avec la grandeur de l'étoile observée, qui a occupé M. Newcomb (*Astr. Journ.*, n° 369) ainsi que le Dr Gill (Cf. *Catalogue du Cap* pour 1885, p. XIV). M. Comstock résume les résultats obtenus par lui avec l'appareil à prismes imité de celui de M. Lœwy, résultats publiés dans le Tome IX des *Publications de l'observatoire Washburn.*

Doolittle (*E.*). — Perturbations séculaires de Mercure par la Terre et Mars (nos 376, 381).

Applications de la méthode de Gauss sous la forme que lui a donnée M. Hill.

Hall (*A.*). — Perturbations absolues du premier ordre de Némausa par Jupiter (n° 377).

Elles ont été calculées par la méthode de Hansen. M. Hall donne

Digitized by Google

quelques indications sur le temps nécessaire pour le calcul des expressions des perturbations et celui d'un lieu, et il conclut qu'il est désirable d'abréger les opérations assez laborieuses.

Collins (*W.-H.*). — Observations d'étoiles doubles (n° 378).

Chandler (*S.-C.*). — Troisième catalogue d'étoiles variables (n° 379).

Cette nouvelle édition du Catalogue de M. Chandler est construite sur le même plan que l'édition précédente (*A. J.*, 300). Les éléments de toutes les variables connues s'y trouvent réunis avec les corrections nécessaires. A la fin se trouvent des listes d'étoiles réclamant un supplément d'observations : variables douteuses, etc.

Tucker (*R.-H.*). — Détermination de l'effet de la grandeur sur les passages (n° 380).

En observant alternativement, dans les nuits successives, une série d'étoiles avec ou sans écrans : l'effet de l'interposition de l'écran est de retarder les passages d'environ $0^s,01$ pour chaque grandeur; c'est ce qu'avait trouvé déjà M. Newcomb (*voir* plus haut).

Stone (*O.*). — Positions relatives de Dione et de Rhea (n° 380).

Gaillot (*A.*). — Discordances dans les observations de d'Agelet (n° 381).

Roberts (*A.-W.*). — Sur l'élimination de l'erreur causée par la position de l'œil dans les observations d'étoiles variables (n° 381).

M. Roberts, après avoir cité les remarques publiées par MM. Barnard et Chandler (*Astr. Journ.*, 370, 374), dit comment il évite l'erreur en question (Cf. *Bulletin*, XII, p. 467).

Leavenworth (*F.-P.*). — Observations d'étoiles doubles. Suite des mesures déjà publiées.

Hedrick (*J.-T.*). — Sur la variation de l'équation personnelle avec la grandeur de l'étoile observée (n° 382).

Le passage d'une étoile brillante est observé par l'œil plus tôt que

Digitized by Google

celui d'une étoile faible. La comparaison de plusieurs Catalogues indique une différence d'environ $0^{s},01$ par grandeur.

Hussey (*W.-J.*). — Projection du terminateur de Mars (n° 384).

See (*T.-J.-J.*). — Mesures de 70 Ophiuchus. Recherche d'un compagnon supposé (n° 384).

Chandler (*S.-C.*). — Sur les compagnons de la comète périodique 1889 V (n° 385).

De même que pour les deux noyaux de la comète de Biéla, il y a doute quant à l'identité des objets aperçus : il faut s'assurer si la composante aperçue lors des récentes observations est identique avec le fragment A vu en 1889 (*voir* aussi n° 386).

See (*T.-J.-J.*). — Redécouverte et mesures du compagnon de Sirius (385).

Autres mesures du compagnon supposé par MM. Aitken (n° 388), Brown (n° 390), Schaeberle (n° 394), Pritchett (n° 399). Il est possible qu'on ait d'abord eu affaire à une fausse image.

Doolittle (*E.*). — Perturbations séculaires des planètes principales.

De Mercure par Jupiter (n° 386), par Saturne (n° 392), par les autres planètes (n° 398).

Aitken (*R.-G.*). — Requête pour les observations non publiées de la comète *b* 1896.

Searle (Rev. *G.-M.*). — Formules abrégées pour le calcul des orbites d'après trois observations (n° 387).

Jacoby (*H.*). — Notes sur la réfraction différentielle pour les mesures photographiques.

M. H. Jacoby revient sur une discussion antérieure avec M. Dyson et rapproche ses formules de celles de MM. Turner, Baillaud, Henry (n° 387). Réplique de M. Turner (n° 390).

Perrine (*C.-D.*). — Requête pour les observations non publiées de la comète 1895 IV (n° 387).

Digitized by Google

Swift (*L.*). — Catalogues de nébuleuses faibles (n° 388).

Notice sur Benjamin Apthorp Gould (n° 389).

Elle a été reproduite dans le *Bulletin* (XIV, p. 49).

Les météores de novembre en 1896.

Notes de MM. E.-F. Sawyer, G.-C. Comstock et A.-S. Flint, E.-E. Barnard (n° 389).

Mesures de 70 Ophiuchus.

M. F.-P. Leavenworth (n° 389).

Schaeberle (*J.-M.*). — Découverte du compagnon de Procyon.

Par $p = 318°,8$ et $d = 4''59$ (n° 389).
Voir aussi les n°s 394-403 pour d'autres mesures du même objet.

Newcomb (*S.*). — La translation du système solaire et les distances des étoiles (n° 390).

Recherches préliminaires à la nouvelle détermination de la constante de précession. Comparaison de la distribution effective des mouvements propres en déclinaison (d'après Auwers) avec la distribution théorique. On peut dire que l'effet de la translation solaire diminue moins rapidement qu'on ne l'avait supposé, avec les étoiles faibles. Le prof. Boss avait déjà montré que l'effet du mouvement parallactique est nettement sensible dans les étoiles de Lalande et dans les zones d'Argelander. Plus récemment le Dr Stumpe est arrivé à la conclusion que l'effet du mouvement parallactique ne dépendait guère de la grandeur.

Enfin, M. Newcomb propose une explication de l'asymétrie évidente de la courbe des mouvements propres.

Schaeberle (*J.-M.*). — Mesures de 85 Pégase (n° 391).

Hall (*A.*). — Sur la convergence des séries du mouvement elliptique (n° 391).

Rectification d'une erreur de calcul dans la *Mécanique céleste* de Laplace.

Schaeberle (*J.-M.*). — Mesures micrométriques du satellite de Neptune (n° 392).

Digitized by Google

Chandler (*S.-C.*). — Trajectoire du pôle pour le calcul des variations de latitude en 1897 (n° 392).

Cette éphéméride, avec le Tableau des nombres pour Poulkovo, Berlin, Paris et Washington, fait suite à celle publiée déjà dans le t. XV de l'*Astr. Journal*.

Tucker (*R.-H.*). — Comparaison des positions des étoiles fondamentales avec les observations (n°s 391-398).

Les observations faites à l'observatoire Lick par M. Tucker pendant les dernières années sont comparées avec les Éphémérides principales : *American ephemeris, Connaissance des Temps, Nautical almanac.* Comme les observations dont il s'agit sont rapportées aux étoiles fondamentales du *Berliner Jahrbuch,* on a, en définitive, de nouveaux documents de comparaison à ajouter à ceux que le Dr Auwers a publiés dans le *Jahrbuch* pour 1884. Chaque étoile a été observée quatre fois dans chaque position de l'instrument (pour chaque culmination s'il s'agit des circompolaires).

Laissant de côté les Tableaux comparatifs nous noterons les points suivants : l'effet de la grandeur sur les passages des étoiles a été constaté par plus de 150 passages et trouvé égal à $0^s,01$ par grandeur, les étoiles faibles étant observées plus tard que les brillantes. Ce résultat est confirmé par les observations de o Baleine.

L'erreur de pointé s'obtient au moyen d'observations alternées d'étoiles zénithales ou de couples d'étoiles dans les nuits successives, en faisant face au nord ou au sud; la demi-différence des pointés donne l'erreur de bissection ($+0'',06$ environ, qu'on suppose ne pas varier quand on s'éloigne du zénith); les mêmes séries permettant d'évaluer l'erreur des passages due à la direction du mouvement de l'étoile ($-0^s,029$ dans le sens S-N; $-0^s,023$ séc δ pour la déclinaison δ).

Les erreurs probables des positions obtenues, moyennes de 8 ou même de 16 déterminations dans le cas des circompolaires, sont indiquées comme il suit :

En Æ.	En ⊕.
$\pm 0^s,010$ séc δ pour $\delta < 70°$	$\pm 0'',11$ à $\pm 0'',25$ de l'équat. à l'hor.
$\pm 0^s,004$ séc δ pour les circompol.	$\pm 0'',10$ pour les circompolaires.

On a donc affaire à des observations excellentes. L'auteur montre, dans le n° 398, ce qu'on peut en tirer pour la variation de la latitude.

Quimby (*A.-W.*). — Observations de taches solaires (n° 393).

Digitized by Google

Kurt Laves. — Intégration des équations différentielles du mouvement dans le problème des deux corps (n° 394).

D'après les *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi.

Hill (*G.-W.*). — Sur les valeurs des excentricités et des longitudes des périhélies de Jupiter et de Saturne pour les époques reculées (n° 395).

L'éminent auteur fait application de la méthode publiée (*Annals of Mathematics*, t. V, p. 177) pour intégrer les équations différentielles des variations séculaires de deux planètes comprises dans le même plan. La méthode est ainsi illustrée par une application remarquable et éprouvée numériquement.

O. C.

CORRESPONDANCE.

SUR UN PHÉNOMÈNE CÉLESTE INSTANTANÉ.

I. — Lettre à M. Callandreau.

Bourg-d'Ault (Somme).

Cher Monsieur,

Hier soir, 1er août, vers $8^h 45^m$, je regardais la région du ciel qui avoisine la Polaire lorsque mes yeux, un instant écartés, furent sollicités par une masse lumineuse brusquement apparue que je crois avoir saisie vers la fin de sa très rapide période de croissance pour la voir s'éteindre en un temps inappréciable.

Cette masse lumineuse, d'un éclat sensiblement supérieur à celui de Vénus, d'aspect analogue, parfaitement blanche et rigoureusement immobile, était à environ deux ou trois degrés à l'est, et sans doute un peu vers le sud de la Polaire.

En dépit de la lumière crépusculaire encore assez forte, le phénomène eut une telle netteté qu'il frappa de la même manière une personne qui se trouvait près de moi, et de façon indépen-

Digitized by Google

dante, car l'instantanéité eût rendu caduque toute tentative de communication quelconque.

Je pense qu'il y aurait lieu de vérifier si les étoiles de cette région sont encore au complet et, en même temps, s'il n'existe là aucun astre nouveau.

Il est en effet impossible de ne pas songer, au moins tout d'abord, à un phénomène extra-terrestre : l'explosion d'un soleil, ou ce qui est à peu près équivalent au point de vue des manifestations extérieures, un conflit dynamique de deux soleils.

Je vous livre ceci pour que vous en fassiez l'usage que vous jugerez bon, car je n'ai ici aucun moyen de poursuivre les recherches que ce fait pourrait suggérer.

Veuillez agréer, etc....

C. Rozé.

II. — **Note complémentaire.**

Les trois premiers alinéas de cette lettre, insérés aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* ont conduit certains lecteurs, pourtant attentifs, à une interprétation en contradiction absolue avec celle indiquée dans les deux alinéas suivants.

Il est bien clair que, en toute rigueur, le lieu d'un tel phénomène ne peut être conclu de celles des circonstances de l'observation qui sont susceptibles d'une exposition précise; cependant, à défaut d'autres renseignements, l'impression d'un observateur professionnel peut et doit être énoncée, sous les réserves fatales en de pareilles matières. L'auteur de l'observation insiste donc sur l'apparence très nettement spéciale du phénomène : sans la quasi-certitude ou tout au moins la conviction inéluctable qu'il s'agissait d'un fait extra-terrestre et peut-être stellaire il n'aurait pas songé à le relater de façon quelconque.

Quant au commentaire formulé à la fin de la lettre il était plutôt destiné à spécifier, de façon frappante, le jugement de l'observateur sur l'aspect du phénomène, car le simple énoncé d'une telle interprétation, que d'ailleurs elle soit vraie ou fausse, soulève aussitôt des objections dont la discussion comporterait les plus grosses difficultés.

4 septembre 1898.

C. Rozé.

Digitized by Google

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XV; 1898.

RECUEILS PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSES DANS CE VOLUME.

Astronomische Nachrichten, nos 3422-3467, p. 200, 260, 386 et 431.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXXIV et CXXV, p. 194, 269 et 396

Monthly Notices, t. LVII, p. 150 et 197.

Vierteljahrschrift, 30e année (fasc. I-IV), p. 426.

The Astronomical Journal, nos 361-404, p. 471.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Dans cette Table, comme dans celle des Noms, on a indiqué en chiffres **GRAS** les pages des articles originaux, tant pour les Mémoires que pour les Observations, les Variétés, etc.; et l'on a indiqué en caractères ordinaires les pages des Analyses, Mémoires, Observations et Indications quelconques signalés dans d'autres publications. Enfin l'abréviation (bibl.) qui accompagne parfois l'indication de la page signifie que l'article en question figure seulement dans les *Bulletins bibliographiques*.

Pages.

Académies. Voir *Sociétés savantes.*

Aciers :

— Propriétés magnétiques des aciers trempés..... 400

Aciers au nickel :

— Recherches sur ces aciers. Dilatation aux températures élevées; résistance électrique.. 270

Actinométrie :

— Enregistrement de l'intensité calorifique de la radiation solaire..... 396

— L'actinométrie et les ballons.. 274

— Observations actinométriques faites au Mont-Blanc..... 397

Voir *Oxalique* (*acide*).

Aérolithes :

Voir *Bolides*, *Étoiles filantes.*

Aérostats :

Voir *Ballons.*

Alliages métalliques :

— Leur constitution..... 196

Voir *Aciers.*

Pages.

Amas stellaires :

— Effets de la distance sur les spectres des amas d'étoiles.. 150

— Amas d'étoiles variables..... 387

— Distribution des étoiles dans les amas..... 202

— Sur l'amas 4410 G. C... 208 (bibl.)

— Mesures micrométriques de l'amas 4410 G. C..... 389

— Amas d'Hercule..... 427

Analyse spectrale. Voir *Spectroscopie.*

Anémomètre :

— Divers perfectionnements apportés à un anémomètre, système Bourdon..... 397

Arbitraires non canoniques :

— Sur leurs variations; applications à la théorie des planètes..... 152

Archives :

— Archives du musée Teyler. 240 (bib.)

Ascensions droites :

— Erreurs systématiques dans les

Digitized by Google

Pages.

Ascensions droites :
ascensions droites des étoiles fondamentales..... 474
— Sur les erreurs systématiques dans l'observation des ascensions droites des nébuleuses. 150
— Équation personnelle dépendant de la grandeur des étoiles et affectant les ascensions droites du Catalogue de Cambridge; sa détermination au moyen des plaques du Catalogue photographique..... 158
— Méthode nouvelle pour déterminer l'erreur de collimation qui affecte les ascensions droites fondamentales..... 201

Astéroïdes. Voir *Planètes (petites)*.

Atlas :
— Atlas photographique de la Lune par MM. Lœwy et Puiseux..... 196 et **401**

Atmosphère :
— Son mouvement oscillatoire diurne..... 196
— Nature des petites ondulations de l'air, visibles dans les courants qu'on observe à travers une lunette..... 393
— Influence des courants de l'atmosphère et des océans sur les latitudes terrestres..... 473
Voir *Météorologie*.

Attractions locales :
— Observées dans le Fergana.... 195

Aurore boréale :
— L'aurore boréale du 4 mars 1896..... 151

Bain de mercure :
— Sur l'amortissement des trépidations du sol. Application au bain de mercure à couche épaisse..... **172**
— Principes mécaniques qui ont permis de réaliser un bain de mercure à couche épaisse à l'Observatoire de Paris..... 396

Ballons :
— L'actinométrie et les ballons.. 274

Bibliographie :
— Bulletins bibliographiques.... 208 et 239

Bolides :
— Radiants de bolides dans le zodiaque..... 154
— Spectre d'un bolide..... 432
Voir *Étoiles filantes, Météores*.

Carbone :
— Son spectre..... 269

Calendrier universel :
— Calendrier universel d'après les autographes et les manuscrits de feu M. I. Dubarré..... 192

Carte photographique du Ciel :
Voir *Photographie*.

Catalogues stellaires :
— Catalogue fondamental pour les observations de zones australes..... 207
— Deux nouveaux catalogues de l'observatoire de Greenwich. 427
— Déclinaisons moyennes de 388 étoiles pour 1892,0... 208 (bibl.)
— Déclinaisons moyennes de 135 circompolaires pour 1895,0.. 208 (bibl.)
— Remarques et rectifications relatives au B.D. et à quelques autres catalogues.... 203 et 432
— Liste additionnelle d'errata dans le catalogue de Cordoba..... 472
— Sur les systèmes fondamentaux de déclinaisons et de mouvements propres..... 471
— Systèmes de déclinaisons de Bonn et de l'*Astr. Gesellschaft*..... 471
— Additions aux tables de réduction des divers catalogues d'étoiles..... 434

Digitized by Google

Pages.

Catalogues stellaires :

— Détermination de la correction de l'époque d'un catalogue d'étoiles horaires fondamentales, en tenant compte des équations personnelles; application à la détermination des erreurs tabulaires du Soleil et de la Lune 157

— Comparaison des positions des étoiles fondamentales avec les observations 478

— Mouvements propres de quelques étoiles du Catalogue de Paris..... 391

— Équation personnelle dépendant de la grandeur des étoiles et affectant les ascensions droites du catalogue de Cambridge; sa détermination au moyen des plaques du catalogue photographique 158

Voir *Circompolaires.*

Champ (éclairement du) :

— Effet de l'illumination générale du ciel sur l'éclairement du champ au foyer d'une lunette. 199

Champ électrique :

— Étude de sa variation normale avec la hauteur dans les hautes régions de l'atmosphère..... 272

Circompolaires :

— Positions moyennes et mouvements propres pour 1900 de 24 étoiles circompolaires australes 159

— Catalogue de circompolaires australes 207

— Déclinaisons moyennes de 135 circompolaires pour 1895,0.. 208 (bibl.)

— Corrections des positions de quelques circompolaires..... 395

— Circompolaires additionnelles dont l'observation est recommandée 267

Voir *Catalogues stellaires.*

Pages

Circumzénithales (observations) :

— Sur un mode particulier de ces observations..... 400

Chronologie :

— Chronologie astronomique 427

— Éclipses et chronologie 474

Climatologie. Voir *Météorologie.*

Comètes 426

— Observations. **27**, **35**, **147**, 197, 200, 202, **226**, 266, 275, **321**, **422**, **423** et **467**

— Sur la désagrégation des comètes. Rôle de Jupiter à l'égard des comètes à courte période 196

— Les comètes périodiques : état actuel de leurs théories..... **323**

Comète de Tempel (1866 I)

— Son prochain retour..... 390

Comète de d'Arrest.

— Éphéméride pour le retour de 1897. ..... 261 et 275

— Observations..... **228** et 275

Comète de Winnecke.

— Éphéméride pour le retour de 1897-1898..... 388

Comète de Brooks (1889 V = 1896 V).

— Éphéméride pour son retour.. 392 et 472

— Observation 197

— Sur ses compagnons..... 476

Comète de 1652.

— Quelques dessins inédits de cette comète..... 156

Comète 1871 IV.

— Orbite définitive..... **129**

Comète 1879 V.

— Orbite définitive 472

Comète 1895 III.

— Orbite définitive 202

— Observations..... **35**

Comète 1895 IV.

— Requête pour les observations non publiées 476

Comète 1896 III.

— Requête pour les observations non publiées 476

Digitized by Google

Pages.

Comètes :

Comète 1896 IV.
— Observations..... 197
Comète 1896 V.
— Observations..... 197
Comète 1896 VII.
— Observations..... 197 et **228**
Comète 1897 I.
— Observations..... **147**, 197 et 228
— Éléments paraboliques..... 266
Comète Perrine (1897 octobre 16).
— Découverte..... 392
— Observations..... 275
Comète Perrine (1898 mars 19).
— Observations..... **321** et **423**
Comète Coddington-Pauly (1898 juin 11).
— Observations..... **321** et **467**
Comète Perrine (1898 juin 14).
— Observations..... **321**
Comète Giacobini (1898 juin 18).
— Observations..... **322**, **422** et **467**

Coordonnées :

— Détermination des coordonnées absolues des étoiles, ainsi que de la latitude, à l'aide des instruments méridiens..... 399
Voir *Longitude, Latitude.*

Déclinaisons. Voir *Catalogues stellaires.*

Définition des images :

— Conditions atmosphériques essentielles à une bonne définition..... 264
Voir *Atmosphère.*

Développements en série :

— Sur la valeur approchée des coefficients d'ordre élevé dans les développements en série. 102

Distances lunaires. Voir *Lune.*

Dualité :

— La dualité et l'homographie... 240 (bibl.)

Éclipses :

— Éclipses et chronologie..... 474
— Moyen d'empêcher les erreurs de signe dans le calcul des éclipses et des occultations.. 207

Éclipses de Soleil :

— du 9 août 1896. Observations.. 150 et 156
— » Rapports des expéditions du Japon. 152
— du 29 juillet 1897. Observations..... 273
— Renseignements météorologiques sur les stations propices à l'observation de l'éclipse totale de Soleil en 1898..... 156

Electricité atmosphérique :

— Variation de l'état électrique des hautes régions de l'atmosphère par beau temps... 194

Ellipsoïde :

— Sur le disque apparent et sur l'ombre d'un ellipsoïde..... 157

Éphémérides astronomiques :

— Almanaque nautico de San Fernando..... 240 (bibl.).
— Berliner Jahrbuch pour 1900.. 240 (bibl.).
— Connaissance des Temps et Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1898..... 399

Équation :

— Équation de Gyldén-Lindstedt généralisée..... **209**
— Équation de Poisson..... **411**

Équation personnelle :

— Sa variation avec la grandeur de l'étoile observée.. 473 et 475
— Équation personnelle dépendant de la grandeur des étoiles et affectant les ascensions droites du Catalogue de Cambridge: sa détermination au moyen des plaques du Catalogue photographique..... 158
— Sur les différentes espèces d'équation personnelle dans les passages méridiens des étoiles..... 159

Digitized by Google

Pages.

Équation personnelle :

— Équation personnelle dans la mesure des plaques photographiques d'Oxford..... 200

Voir *Erreurs*.

Équatorial :

— Nouveau système de remontage du mouvement d'horlogerie d'un équatorial..... 159

— Réglage de la monture parallactique..... 391

Errata..... 392

— Liste additionnelle d'errata dans les Catalogues de Cordoba.. 472

Erreurs :

— Sur la représentation de lois des erreurs..... 205

— Moyen d'empêcher les erreurs de signe dans le calcul des éclipses et des occultations.. 207

— Causes d'erreur dans la recherche des vitesses radiales des astres. Importance de l'erreur due aux variations de température. Méthodes de correction..... 49

— Détermination de la correction de l'époque d'un Catalogue d'étoiles horaires fondamentales; application à la détermination des erreurs tabulaires du Soleil et de la Lune. 157

— Élimination de l'erreur causée par la position de l'œil dans les observations d'étoiles variables..... 475

Erreurs de division :

— Flexion et erreurs de division des cercles de l'instrument méridien d'Albany..... 437

Erreur de collimation :

— Méthode nouvelle pour déterminer celle qui affecte les ascensions droites fondamentales..... 201

Pages.

Erreurs systématiques :

— Usage des facteurs de projection dans l'investigation des erreurs systématiques des mesures de distances héliométriques..... 206

— Emploi de la méthode des moindres carrés pour révéler la présence d'erreurs systématiques..... 397

— Erreurs systématiques dans l'observation des ascensions droites des nébuleuses... .. 150

— Erreurs systématiques dans les ascensions droites des étoiles fondamentales..... 201

État-Major général russe :

— État actuel de ses travaux géodésiques au Turkestan russe. 269

Étoiles :

— Catalogues d'étoiles. Voir *Catalogues*.

— Cause de la scintillation des étoiles..... 393

— Distribution des étoiles dans les amas..... 202

— Détermination des coordonnées absolues des étoiles, à l'aide des instruments méridiens..... 399

— Influence de la position de l'étoile sur l'estimation des grandeurs..... 158

— Constitution chimique des étoiles les plus chaudes..... 204

— Sur les vitesses des étoiles.... 191

— Cause de l'apparition de rayons et de franges autour des images stellaires..... 265

— La translation du système solaire et les distances des étoiles..... 477

— Équation personnelle dépendant de la grandeur des étoiles..... 158, 473 et 475

Étoiles de comparaison :

— Étoiles de comparaison pour les grosses planètes..... 205

Digitized by Google

Pages.

Étoiles :

Étoiles fondamentales :

— Erreurs systématiques dans leurs ascensions droites..... 201
— Comparaison des positions des étoiles fondamentales avec les observations 478
— Détermination de la correction de l'époque d'un Catalogue d'étoiles horaires fondamentales..... 157
Étoiles doubles..... 436
— Mesures... 160, 198, 202, 389, 435, 475, 476 et 479
— Mesures héliométriques..... 434
— Orbites... 156, 160, 268, 388, 393, 472 et 474
— Étoiles doubles nouvelles..... 156, 160, 204, 205, 265 et 433
— Étoiles doubles australes..... 388
— Changements de couleur de Sirius..... 240 (bibl.).
— Redécouverte et mesures du compagnon de Sirius..... 476
— Découverte du compagnon de Procyon..... 477
— Sur un système quadruple.... 157
— Nouveau couple avec une période de cinq ans et demi... 198
— Recherches sur l'orbite de 70 Ophiuchus et sur une perturbation dans le mouvement du système provenant de l'action d'un corps inconnu.... 472
— Spectres des composantes colorées des étoiles doubles... 272

Étoiles circompolaires :

Voir *Circompolaires.*

Étoiles de culmination lunaire :

— Observations méridiennes..... 261

Étoiles filantes :

— L'essaim des Léonides... 151, **181**, 201, 392 et 396
— L'essaim des Perséides..... 434
— Les Lyrides de 1897..... 204
— Observation des Orionides.... 400

Pages.

Étoiles :

Étoiles occultées :

— Observations..... **184**, 202, 264, 269, 387, 395 et 397
Étoiles variables. 153, 264, 388, 391, 392, 431, 437 et 474
— Observations..... 156
— Nouvelles..... 203, 260, 268, 388, 390 et 433
— Éphémérides..... 208 (bibl.).
— Amas d'étoiles variables..... 387
— Observations des variations de Mira Ceti..... 203
— Élimination de l'erreur causée par la position de l'œil dans les observations d'étoiles variables..... 475
— Catalogue d'étoiles variables de M. Chandler..... 475
Étoiles à mouvements propres.. 159 et 391
— Le plus fort mouvement propre connu..... 435
— Investigation du mouvement propre de 523 étoiles australes. 261
Voir *Parallaxe, Amas stellaires.*

Facteurs de projection :

— Leur usage dans l'investigation des erreurs systématiques des mesures de distances héliométriques..... 206

Fils :

— Sur la courbure des fils d'araignée..... 157
— Substitution aux fils d'araignée de fils de quartz argentés... 199
— Détermination de l'inclinaison des fils horizontaux à la lunette méridienne..... 265

Flexion :

— Recherches sur l'influence que les défauts d'ajustement d'un réflecteur photographique peuvent exercer sur la qualité des images. Détermination de la flexion relative du réfracteur de Potsdam..... 433

Digitized by Google

Pages.

Flexion :
— Flexion et erreurs de division des cercles de l'instrument méridien d'Albany..... 437

Fonction perturbatrice :
— Sur son développement. 70 et 449
— Sur son développement dans le cas des excentricités nulles.. 369
Voir *Mécanique céleste.*

Fonctions de grands nombres :
— Sur l'approximation des fonctions de grands nombres.... 398

Géodésie :
— Attractions locales observées dans la Fergana (Pamir)... 195
Voir *État-Major général russe, Service géographique de l'Armée.*

Géographie :
— Quelques observations faites à bord du *Fram*..... 393

Gnomon :
— Le gnomon de l'Observatoire et les anciennes toises; restitution de la toise de Picard... 269

Grandeurs stellaires :
— Influence de la position de l'étoile sur l'estimation des grandeurs (avec graphiques). 158

Gravitation :
— Ses causes 268
— L'équilibre instable dans le cas de la gravitation universelle. 389 et 395

Gravité. Voir *Pesanteur.*

Héliométriques (Mesures) :
— Détermination du diamètre et de l'aplatissement de Mars, d'après des observations héliométriques..... 153
— Sur l'usage des facteurs de projection dans l'investigation des erreurs systématiques des mesures de distances héliométriques..... 206

Pages.

Héliométriques (Mesures) :
— Mesures héliométriques de l'arc du Lion..... 432

Hodographe de Hamilton :
— Sur quelques-unes de ses applications..... 9

Homographie :
— La dualité et l'homographie... 240 (bibl.)

Horizon vrai :
— Méthode nouvelle pour le déterminer directement..... 200

Hydrodynamique :
— Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die theorie der Sonnenrotation.. 365

Hydrographie :
— Traité par E. Mouchez (traduction)..... 208 (bibl.)
— Publications du Bureau hydrographique de Pola... 208 (bibl.)

Illumination du Ciel :
— Effet de l'illumination générale du Ciel sur l'éclairement du champ au foyer d'une lunette. 199

Indices de réfraction :
— Application de la Photographie à leur mesure..... 197

Instruments méridiens :
— Sur un cercle méridien photographique..... 155
— Détermination de l'inclinaison des fils horizontaux de la lunette méridienne..... 265
— Détermination des coordonnées absolues des étoiles, ainsi que de la latitude, à l'aide des instruments méridiens..... 399
— Flexion et erreurs de divisions des cercles de l'instrument méridien d'Albany..... 437

Lampe à cadmium :
— Nouvelle lampe à cadmium pour

Digitized by Google

Pages.

la production des franges d'interférence à grande différence de marche 194

Latitude, latitudes terrestres :

— Influence des courants de l'atmosphère et des océans sur les latitudes terrestres..... 473

— Sur les déterminations de latitude effectuées par M. Périgaud au cercle Gambey de l'Observatoire de Paris **161**

— La détermination des latitudes par les hauteurs de la Polaire. 205

— Détermination de la latitude à l'aide des instruments méridiens..... 399

Variations de la latitude :

— Sur la loi de ces variations... 195

— Trajectoire du pôle pour le calcul des variations de la latitude..... 478

Lentilles. Voir *Objectifs.*

Léonides. Voir *Étoiles filantes.*

Longitudes terrestres :

— Leur détermination par la Photographie 160

Longueurs d'onde :

— Influence de la pression et du champ magnétique sur une source lumineuse et sur les longueurs d'onde des radiations qu'elle émet 253

— Effect of pressure on the wawe lengths of lines in the arc spectra of certain elements.. 253

— The effect of pressure on wawe length 253

— A further study of the effect of pressure on wawe length... 253

— Changes in the wawe lengths of the lines of emission spectra of elements, their dependance upon the elements themselves and upon the physical conditions under which they are produced..... 253

— On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance..... 253

— Radiation in a magnetic field. 253

— Doublets and triplets in the spectrum produced by external magnetic forces..... 253

— Sur l'observation et l'interprétation cinématique du phénomène découvert par le Dr Zeeman 253

— Sur une interprétation applicable au phénomène de Faraday et au phénomène de Zeeman..... 253

— Quelques résultats nouveaux relatifs au phénomène de Zeemann..... 253

— Doublets and triplets in a magnetic field..... 254

— Contribution à l'étude du phénomène de Zeeman 254

Lune..... 429

— L'action du Soleil et de la Lune sur l'atmosphère et les anomalies de la pression..... 195

— Sur les moyens mouvements du périgée et du nœud de la Lune. Sur la valeur théorique de l'accélération séculaire... 154

— Détermination de la correction de l'époque d'un Catalogue d'étoiles horaires fondamentales en tenant compte des équations personnelles. Application à la détermination des erreurs tabulaires du Soleil et de la Lune..... 157

— Culminations du bord lunaire et du cratère Mösting A.... 387

— Discussion d'observations méridiennes du cratère Mösting A 386

— Observations méridiennes du cratère Mösting A et des étoiles de culmination lunaire 261

— Réduction d'une distance lunaire 153

Digitized by Google

Pages.

Lune :

— Détails que peuvent révéler les photographies lunaires..... 205
— Atlas photographique de la Lune, publié par l'Observatoire de Paris (2e fascicule). 196
— Étude photographique sur quelques parties de la surface de la Lune..... **401**
— Tables auxiliaires pour le calcul de la parallaxe lunaire, destinées à faciliter le calcul des occultations..... 260
— Prédiction de l'occultation de Cérès par la Lune..... 200
— Occultation de Cérès par la Lune..... 432
— Occultations d'étoiles par la Lune... **184**, 202, 264, 269, 395 et 397

Lunettes :

— La lunette photographique Thompson à l'observatoire de Greenwich..... 197
— La grande lunette de l'observatoire Yerkes..... 198

Lyrides. Voir *Étoiles filantes.*

Magnétique (champ) :

— Influence de la pression et du champ magnétique sur une source lumineuse, et sur les longueurs d'onde des variations qu'elle émet..... 253
Voir *Longueurs d'onde.*

Magnétisme. Voir *Spectroscopie.*

Mécanique céleste :

— Sur une nouvelle démonstration des polynomes Hansen-Tisserand. Applications. Tables pour le calcul des perturbations de Jupiter sur les petites planètes..... 74
— Sur les intégrales premières du problème des *n* corps..... **81**
— Sur la valeur approchée des coefficients d'ordre élevé dans les développements en série. 122
— Variation des arbitraires non canoniques, application à la théorie des planètes..... 152
— Sur les moyens mouvements du périgée et du nœud. Sur les valeurs théoriques de l'accélération séculaire..... 154
— Formules abrégées pour le calcul des orbites d'après 3 observations..... 476
— Discussion de l'équation que l'on rencontre dans le calcul des orbites d'après 3 observations..... 155
— Sur les quadratures mécaniques..... 194
— Mouvement des périhélies de Mercure et de Mars, et du nœud de Vénus..... 197
— Équation de Gyldén-Linstedt généralisée..... **209**
— Deuxième méthode pour la détermination des termes à longues périodes dans l'expression de la longitude des petites planètes du type d'Hécube..... **5**
— Sur la désagrégation des comètes. Rôle de Jupiter à l'égard des comètes à courte période..... 196
— Façon de grouper les termes des séries trigonométriques qu'on rencontre en Mécanique céleste..... **289**
— Convergence des séries du mouvement elliptique..... 477
— Sur le problème des trois corps..... 377
— Probabilité d'une coïncidence entre les éléments de deux planètes..... **319**
— Perturbations séculaires des planètes principales..... 476
— Démonstrations élémentaires de quelques théorèmes connus. 201
— Sur les perturbations des petites planètes dont le moyen mouvement est approximative-

Digitized by Google

Pages.

Mécanique céleste :

ment le double de celui de Jupiter..... 392
— Intégration des équations différentielles du mouvement dans le problème des deux corps..... 479
— Développement de la puissance $\left(\frac{r}{p}\right)^n$..... 362
— Sur le cas des problèmes des trois corps (et de n corps) où deux des corps se choquent au bout d'un temps fini..... 400
— Sur les équations de Poisson.. **411**
— Contribution à l'étude des planètes télescopiques..... 235
— Traité analytique des orbites des huit planètes principales. 427
— Formules de nutation basées sur les décisions de la Conférence de 1896..... **241**
— Sur le développement de la fonction perturbatrice. **70** et **449**
— Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas des excentricités nulles. **369**
— Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes..... 275
— Hülfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in der absoluten Bewegungstheorie der kleinen Planeten..... 275
— Die Jupiter-Störungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus..... 275
— Ueber die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten..... 275
— Ueber die Bewegung der kleinen Planeten des Hecuba-Typus..... 275
— Theorie der kleinen Planeten. 275
— Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten..... 276
— Ueber eine neue Methode zur

Pages

Mécanique céleste :

Berechnung der Planetenstörungen im Falle einer genäherten Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen..... 276
— Ueber die Integration der Ungleichheiten langer Periode in der Planeten Theorie..... 276
— Formeln für eine erste Verbesserung des kleinen Divisors in Commensurabilitätsfällen. 276
— Entwickelung der Störungsfunction für Planetenbahnen grosser Excentricität..... 276
— Eine Methode die Störungen der Planeten in Bahnen beliebiger Excentricität und Neigung gruppenweise zu berechnen..... 276
— Die gestörte elliptische Bewegung. Hansen's ideale Coordinaten..... 276
— Jupiter Perturbations of Cérès of the first order, and the derivation of the mean elements. 276
— Sur quelques cas de commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire..... 276
— Sur un cas remarquable du problème des perturbations. Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire..... 276
— La libration des petites planètes..... 276
— Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste..... 276
— Sur l'orbite de (108) Hécube.. 276
— Intégrales définies qui jouent un rôle dans le calcul des perturbations. Applications aux petites planètes; calcul des éléments moyens de leurs orbites. Application au calcul des inégalités à longue période..... 277
— Untersuchung über die Me-

Digitized by Google

Pages.

Mécanique céleste :
thoden zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten 277
— Sur quelques formules de la théorie des perturbations ... 277
— Remarques relatives à la théorie des orbites 277
— On intermediary orbits in the Lunar theory 277
— Tables pour le calcul des perturbations de Jupiter sur les petites planètes ..... 74 et 277

Mercure. Voir *Planètes (grosses)*.

Météores :
— Orbites des météores de novembre 156
— Catalogues de trajectoires..... 153
Voir *Bolides, Étoiles filantes.*

Météorologie :
— Mouvement oscillatoire diurne de l'atmosphère 196
— Variation diurne de la direction du vent..... 196
— Renseignements météorologiques sur les stations propices à l'observation de l'éclipse totale de Soleil en janvier 1898..... 156
— L'action du Soleil et de la Lune sur l'atmosphère et les anomalies de la pression..... 195
— Résultats d'observations météorologiques faites en Mandchourie et autres pays limitrophes 196
— Variation de la température à la surface de sols de différentes natures..... 196
— Conditions atmosphériques essentielles à une bonne définition 264
— Le climat d'Athènes 269
— Annales de l'Office central météorologique de Rome. 240 (bibl.)
— Les derniers orages en France, en juillet et août 1897, et la période solaire 271
— Sur la nature des petites ondulations de l'air, visibles dans les courants qu'on observe à travers une lunette..... 393
— Influence des courants de l'atmosphère et des océans sur les latitudes terrestres..... 473
Voir *Atmosphère.*

Micromètre :
— Courbure des fils d'araignée... 157
— Substitution aux fils d'araignée de fils de quartz argentés ... 199

Mira Ceti. Voir *Étoiles variables.*

Miroirs :
— Le miroir nadiral et l'horizon vrai 200

Moindres carrés (Méthode des) :
— Son emploi pour révéler la présence d'erreurs systématiques..... 397
Voir *Erreurs.*

Monture parallactique :
— Son réglage..... 391

Mouvement d'horlogerie :
— Nouveau système de remontage du mouvement d'horlogerie d'un équatorial 159

Mouvements propres. Voir *Catalogues, Étoiles.*

Nadir :
— Le miroir nadiral et l'horizon vrai..... 200

Nébuleuses :
— Catalogue de nébuleuses faibles. 477
— Nouvelles nébuleuses annulaires..... 204
— Catalogue de nébuleuses découvertes à l'observatoire Lowe. 200
— Nébuleuses nouvelles découvertes par la Photographie.. 205
— Photographies de nébuleuses.. 198
— Erreurs systématiques dans l'observation des ascensions droites des nébuleuses..... 150

Digitized by Google

Pages.

Neptune. Voir *Planètes (grosses)*.

Nutation :

— Nouvelle détermination de sa constante 471
— Sur les formules de nutation basées sur les décisions de la Conférence de 1896..... **241**

Objectifs :

— Efficacité respective d'un réflecteur et des objectifs à portrait pour représenter les objets célestes..... 150

Objets collectifs :

— Sur leur mesure..... 384

Observations méridiennes :

— Observations méridiennes de petites planètes..... **119** et 433
— Observations méridiennes du bord lunaire et du cratère Mösting A..... 387
— Observations méridiennes du cratère Mösting A et des étoiles de culmination lunaire 261
— Discussion d'observations méridiennes du cratère Mösting A..... 386

Voir *Passages*.

Observatoires :

— Adelaïde..... 153
— Bâle..... 428
— Bamberg..... 427
— Berlin 428
— Bonn ..... 240 (bibl.)
— Breslau 427
— Bruxelles. Annales..... 208 (bibl.)
— Cambridge (Harvard college). 31e Rapport annuel .. 208 (bibl.)
— Carlsruhe..... 429
— Dresde..... 428
— Dusseldorf..... 429
— Etna..... 194
— Genève..... 429
— Göttingue..... 429
— Greenwich. La lunette photographique Thompson 197
— » Volume d'observations. 208 (bibl.)
— Hambourg..... 429
— Iéna (Université)..... 429
— » (observatoire Winkler). 429
— Kalocsa..... 429
— Kiel 430
— Königsberg..... 430
— Leipsig..... 430
— Lowe (Echo Mountain)..... 200
— Lowell (Flagstaff)..... 390
— Lund 430
— Madras. Remarques sur une nouvelle réduction des observations de Taylor à Madras. 156
— Manora..... 387 et 432
— Melbourne. 31e Rapport annuel. 208 (bibl.)
— Milan..... 430
— Mont Blanc (observatoire du sommet)..... 397 et 398
— Munich 430
— Nice. Tome IV de ses Annales. 195
— Paris. Atlas photographique de la Lune (2e fascicule)..... 196
— » Sur les déterminations de latitude effectuées au cercle de Gambey..... **161**
— Pola..... 390
— Potsdam..... 430
— Poulkovo. Mémoires des astronomes ..... 240 (bibl.)
— Prague..... 431
— Rio de Janeiro. Annuaire pour 1897 ..... 240 (bibl.)
— Rome. Annales de l'Office central météorologique.. 240 (bibl.)
— Strasbourg..... 431
— Tacubaya. Annuaire pour 1898. 240 (bibl.)
— Tokio..... 240 (bibl.)
— Turin..... 431
— Vienne (observatoire Küffner). 425 et 431
— Washington. Rapport.. 240 (bibl.)
— Yerkes. Sur sa grande lunette. 198
— Zurich..... 240 (bibl.) et 431

Digitized by Google

Pages.

Occultations :

— d'étoiles par la Lune, **184**, 202, 269 et 395
— des Pléiades par la Lune, 202, 264 et 397
— des Pléiades par la Lune le 23 juillet 1897..... 387
— Prédiction de l'occultation de Cérès par la Lune..... 200
— Occultation de Cérès par la Lune..... 432
— Moyen d'empêcher les erreurs de signe dans le calcul des éclipses et des occultations.. 207
— Tables auxiliaires pour le calcul de la parallaxe lunaire, destinées à faciliter le calcul des occultations..... 260

Océans :

— Leur influence sur les latitudes terrestres..... 473

Ondulations atmosphériques :

— Nature des petites ondulations de l'air, visibles dans les courants qu'on observe à travers une lunette..... 392
— Influence des courants de l'atmosphère et des océans sur les latitudes terrestres..... 473

Optique. Voir *Lunettes, Objectifs, Miroirs.*

Orages. Voir *Météorologie.*

Orionides. Voir *Étoiles filantes.*

Orbites (calcul des) :

— Formules abrégées pour le calcul des orbites d'après trois observations..... 476
— Discussion de l'équation que l'on rencontre dans le calcul des orbites d'après trois observations..... 155

Oxalique (acide) :

— Sa décomposition par la lumière solaire: influence de l'altitude et de la chaleur... 398

Pages.

Oxygène :

— Quelques nouvelles lignes spectrales de l'oxygène..... 274

Parallaxe :

— Tables auxiliaires pour le calcul de la parallaxe lunaire, destinées à faciliter le calcul des occultations..... 260
— Essai de détermination de la parallaxe du système formé par la Grande-Ourse..... 394

Passages (observations de) :

— Sur la formule de réduction des observations de passages.... **113**
— Les différentes espèces d'équation personnelle dans les passages méridiens des étoiles.. 159
Voir *Observations méridiennes.*

Pendule :

— Influence de l'élasticité des pendules sur les déterminations de la gravité absolue..... 206
Voir *Pesanteur.*

Perséides. Voir *Étoiles filantes.*

Perturbations :

— Perturbations des petites planètes dont le moyen mouvement est approximativement le double de celui de Jupiter. 392
— Perturbations séculaires des planètes principales..... 476
— Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes..... 275
— Hülfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in der absoluten Bewegungstheorie der kleinen Planeten..... 275
— Die Jupiter-Störungen der kleinen Planeten vom Hécuba-Typus..... 275
— Ueber die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten..... 275
— Ueber die Bewegung der kleinen Planeten des Hécuba-Typus..... 275

Digitized by Google

Pages.

Perturbations :

— Theorie der kleinen Planeten.. 275
— Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten 276
— Ueber eine neue Methode zur Berechnung der Planetenstörungen im Falle einer genäherten Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen..... 276
— Ueber die Integration der Ungleichheiten langer Periode in der Planeten theorie..... 276
— Formeln für eine erste Verbesserung des kleinen Divisors in Commensurabilitätsfällen. 276
— Entwickelung der Störungfunction für Planetenbahnen grosser Excentricität..... 276
— Eine Methode die Störungen der Planeten in Bahnen beliebiger Excentricität und Neigung gruppenweise zu berechnen..... 276
— Die gestörte elliptische Bewegung. Hansen's ideale Coordinaten 277
— Jupiter Perturbations of Cérès. of the first order, and the derivation of the mean elements..... 276 et 478
— Sur quelques cas de commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire..... 276
— Sur un cas remarquable du problème des perturbations. Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire..... 276
— La libration des petites planètes..... 276
— Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste..... 276
— Sur l'orbite de (108) Hécube.. 276
— Intégrales définies qui jouent un rôle dans le calcul des perturbations. Application aux petites planètes; calcul des éléments moyens de leurs orbites. Application au calcul des inégalités à longue période..... 277
— Untersuchung über die Methoden zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten. 277
— Sur quelques formules de la théorie des perturbations... 277
— Remarques relatives à la théorie des orbites..... 277
— On intermediary orbits in the Lunar theory..... 277
— Tables pour le calcul des perturbations de Jupiter sur les petites planètes..... 74 et 277
Voir *Fonction perturbatrice, Mécanique céleste.*

Pesanteur :

— Nouvelles déterminations..... 196
— Influence de l'élasticité des pendules sur les déterminations de la gravité absolue..... 206
— Appareil léger pour la détermination rapide de l'intensité de la pesanteur..... 270

Phénomène :

— Sur un phénomène céleste instantané..... **479**

Photographie astronomique.. 427
— Die Photographie der Gestirne. 42
— Conditions qui déterminent la durée du temps de pose en Photographie céleste..... 266
— Équation personnelle dépendant de la grandeur des étoiles et affectant les ascensions droites du Catalogue de Cambridge; sa détermination au moyen des plaques du Catalogue photographique..... 158
— Photographie des radiations électriques du Soleil et l'atmosphère de cet astre..... 194

Digitized by Google

Pages.

Photographie astronomique :

— Cause de l'insuccès de la reproduction photographique de détails très délicats sur un fond lumineux..... 389
— Sur un instrument propre à photographier un corps céleste qu'on ne voit pas, mais dont la présence est connue..... 392 et 436
— Recherches sur l'influence que les défauts d'ajustement d'un réfracteur photographique peuvent exercer sur la qualité des images. Détermination de la flexion relative du réfracteur de Potsdam..... 433
— Sur l'inégalité causée par la réfraction dans le mouvement diurne apparent et sur une manière d'en tenir compte dans la Photographie céleste..... 151
— Détermination des longitudes terrestres par la Photographie..... 160
— Sur les réfractions photographiques..... 472
— La lunette photographique Thompson à l'observatoire de Greenwich..... 197
— Sur un cercle méridien photographique..... 155
— Instruments divers, destinés à la Photographie céleste..... 43
— Études photographiques sur quelques parties de la surface de la Lune..... **401**
— Détails que peuvent révéler les photographies lunaires..... 205
— Atlas photographique de la Lune publié par l'Observatoire de Paris (2e fascicule). 196
— Photographies de nébuleuses... 198
— Nouvelles nébuleuses découvertes par la Photographie.. 205

Photographie stellaire :

— Réduction des photographies stellaires..... 199

Pages.

Photographie astronomique :

— Spectres photographiques de β Lyre et d'étoiles des types III et IV..... 150
— Équation personnelle dans la mesure des plaques photographiques d'Oxford..... 200

Photométrie :

— Die Photometrie der Gestirne. 42
— Détermination des éléments de l'orbite d'une étoile double en partant d'observations photométriques..... 474

Planètes :

— Sur la variation des arbitraires non canoniques; application à la théorie des planètes.... 152

Planètes (Grosses) :

— Perturbations séculaires des planètes principales..... 476
— Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales..... 427
— Étoiles de comparaison pour les grosses planètes..... 205
— MERCURE :
— » Dessins..... 152
— » Perturbations séculaires par la Terre et Mars..... 474
— » Sur le mouvement de son périhélie..... 197
— VÉNUS :
— » Observations.... 200 et 205
— » Caractère de sa surface.. 153
— » Rotation..... 153
— » Mouvement de son nœud. 197
— TERRE. *Voir* ce mot.
— MARS :
— » Détermination de son diamètre apparent et de son aplatissement, d'après des observations héliométriques..... 153
— » Mouvement de son nœud. 197
— » Observations astronomiques et physiques sur sa

Digitized by Google

Pages.

Planètes (Grosses) :

— MARS :
rotation et sa topographie..... 240 (bibl.)
— » Observations..... 200
— » Projection du terminateur de Mars..... 476
— JUPITER :
— » Observations..... 200
— » Observations physiques. 153
— » Mesures micrométriques. 387
— » Perturbations du premier ordre de Cérès par Jupiter et déduction des éléments moyens..... 473
— » Perturbations absolues du premier ordre de (51) Nemausa par Jupiter..... 474
— » Valeurs des excentricités et des longitudes des périhélies de Jupiter et de Saturne pour les époques reculées..... 479
— » Tables pour le calcul des perturbations de Jupiter sur les petites planètes. 74
— » Sur les perturbations des petites planètes dont le moyen mouvement est approximativement le double de celui de Jupiter..... 392
— *Satellites*..... 436
— » Sur leurs éclipses..... 203
— » Observations d'éclipses et autres phénomènes..... 202 et 269
— » Rotation de deux d'entre eux..... 203
— » Sur le 3e et le 4e satellite. 391
— » Mesures micrométriques du Ve satellite..... 473
— SATURNE :
— » Observations..... 432
— » Forme anormale de son ombre..... 435
— » Valeur des excentricités et des périhélies de Jupiter et de Saturne pour les époques reculées..... 479

Pages.

Planètes (Grosses) :

— SATURNE :
— *Anneau* :
— » Nouvelles divisions..... 205 et 390
— *Satellites* :
— » Observations d'Encelade. 204
— » Observations de Mimas et des satellites voisins... 474
— » Positions relatives de Téthys et de Rhea..... 473 et 475
— » Positions relatives de Téthys et Dioné..... 473
— URANUS :
— » Diamètre de la planète.. 473
— *Satellites* :
— » Mesures micrométriques. 473
— NEPTUNE :
— » Mesures micrométriques. 477

Planètes (Petites) :

— Découvertes..... 387, 431 et 437
— Observations. **22**, **27**, **72**, **120**, **144**, **182**, 200, 202, **226**, **231**, **247**, 264, 266, **317**, **419**, **420**, **422**, **423**, 433, 437, **464**, **468** et **469**
— Observations méridiennes..... **119** et 433
— Réduction d'anciennes observations de petites planètes.... 388
— Éléments... **41**, 202, **249**, 267, 311, 388, **414**, 433 et 437
— Corrections de quelques éphémérides planétaires..... 204
— Perturbations des petites planètes dont le moyen mouvement est approximativement le double de celui de Jupiter. 392
— Probabilité d'une coïncidence entre les éléments de deux planètes..... **319**
— Deuxième méthode pour la détermination des termes à longues périodes dans l'expression de la longitude des petites planètes du type d'Hécube..... **5**

Digitized by Google

Pages.

Planètes (Petites) :

— Contribution à l'étude des planètes télescopiques..... 235
— Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes..... 275
— Hülfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in der absoluten Bewegungstheorie der kleinen Planeten 275
— Die Jupiter Störungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus..... 275
— Ueber die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten..... 275
— Ueber die Bewegung der kleinen Planeten des Hecuba-Typus..... 275
— Theorie der kleinen Planeten . 275
— Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der Allgemeinen Störungen benachbarter Planeten..... 276
— Ueber eine neue Methode zur Berechnung der Planetenstörungen im Falle einer genäherten Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen..... 276
— Ueber die Integration der Ungleichheiten langer Periode in der Planetentheorie..... 276
— Formeln für eine erste Verbesserung des kleinen Divisors in Commensurabilitätsfällen... 276
— Entwickelung der Störungsfunction für Planetenbahnen grosser Excentricität..... 276
— Eine Methode die Störungen der Planeten in Bahnen beliebiger Excentricität und Neigung gruppenweise zu berechnen..... 276
— Die Gestörte elliptische Bewegung. Hansen's ideale Coordinaten..... 276
— Jupiter Perturbations of Cérès, of the first order, and the derivation of the mean elements..... 276
— Sur quelques cas de commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire..... 276
— Sur un cas remarquable du problème des perturbations. Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire..... 276
— La libration des petites planètes..... 276
— Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste..... 276
— Sur l'orbite de (108) Hécube.. 276
— Intégrales définies qui jouent un rôle dans le calcul des perturbations. Applications aux petites planètes; calcul des éléments moyens de leurs orbites. Application au calcul des inégalités à longue période..... 277
— Untersuchung über die Methoden zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten..... 277
— Sur quelques formules de la théorie des perturbations... 277
— Remarques relatives à la théorie des orbites..... 277
— On intermediary orbits in the Lunar theory..... 277
— Tables pour le calcul des perturbations de Jupiter sur les petites planètes..... 74 et 277
— (1) *Cérès*. Perturbations du premier ordre de Cérès par Jupiter et déduction des éléments moyens..... 473
— » Prédiction de son occultation par la Lune..... 200
— » Observation de cette occultation..... 432
— (3) *Junon*. Observations méridiennes..... 119

Digitized by Google

Pages.

Planètes (Petites) :

— (4) *Vesta*. Observations méridiennes..... 119
— (5) *Astrée*. Observations... 226
— (6) *Hébé*. Observations..... 27, 231 et 247
— (7) *Iris*. Observations..... 422
— (8) *Flore*. Observations.... 27
— (10) *Hygie*. Observations.... 27
— (11) *Parthénope*. Observations..... 27, 73 et 145
— (12) *Victoria*. Observations.. 28
— » Réductions d'anciennes observations..... 388
— (14) *Irène*. Observations..... 22
— (17) *Thétis*. Observations.... 28 et 232
— (18) *Melpomène*. Observations..... 226
— (20) *Massalia*. Observations. 28 et 147
— (22) *Calliope*. Observations. 28
— (24) *Thémis*. Observations... 28
— (29) *Amphitrite*. Observations..... 29
— » Éphéméride..... 434
— (33) *Polymnie*. Observations. 22 et 72
— (37) *Fides*. Observations.... 72
— (43) *Ariane*. Observations... 146
— (46) *Hestia*. Observations.... 226
— (49) *Palès*. Observations 29
— (51) *Nemausa*. Perturbations absolues du premier ordre par Jupiter..... 474
— (57) *Mnémosyne*. Observations..... 22
— (61) *Danaé*. Observations.... 231 et 247
— » Éléments et éphéméride..... 388

Pages.

Planètes (Petites) :

— (65) *Maximiliana* ou *Cybèle*. Observations..... 29 et 232
— (67) *Asia*. Observations..... 29
— (70) *Panopée*. Observations.. 29
— (77) *Frigga*. Observations... 146
— (80) *Sapho*. Observations... 30
— » Réduction d'anciennes observations..... 388
— (82) *Alcmène*. Observations. 30
— (86) *Sémélé*. Observations... 30
— (92) *Undine*. Observations... 30
— (100) *Hécate*. Observations... 30
— (106) *Dioné*. Observations.... 31 et 231
— (108) *Hécube*. Sur son orbite. 276
— » Deuxième méthode pour la détermination des termes à longues périodes dans l'expression de la longitude des petites planètes du type d'Hécube..... 5
— (113) *Amalthée*. Observations. 23. 31, 72 et 226
— (114) *Cassandre*. Observations. 182
— (115) *Thyra*. Observations.... 146
— (116) *Sirona*. Observations... 231
— (118) *Peitho*. Observations... 231
— (122) *Gerda*. Éphéméride.... 395
— (124) *Alceste*. Observations... 182
— (130) *Electre*. Observations... 31, 72, 182 et 226
— (136) *Austria*. Observations.. 317
— (137) *Melibœa*. Observations.. 23, 182 et 227
— (139) *Juewa*. Observations... 31
— (142) *Polana*. Observations.. 31
— (144) *Vibilia*. Observations... 144
— (153) *Hilda*. Observations.... 32, 120 et 182
— (161) *Athor*. Observations.... 32

Digitized by Google

Pages.

Planètes (Petites) :

— (162) *Laurentia*. Observations. 32 et 72
— (168) *Sibylle*. Observations... 32 et 317
— (169) *Zelia*. Observations..... 227
— (173) *Ino*. Observations 32
— (177) *Irma*. Observations..... 32
— (182) *Elsa*. Observations 33
— (184) *Déiopée*. Observations .. 24
— (188) *Ménippée* = 1897 DG. Observations ..... 145 et 464
— » Éléments provisoires..... 41
— » Redécouverte.... 387
— (194) *Procné*. Observations... 121, 145 et 464
— (201) *Pénélope*. Son éclat.... 433
— (209) *Dido*. Observations..... 33
— (210) *Isabelle*. Observations .. 227
— (213) *Lilæa*. Observations.... 233 et 423
— (225) *Henrietta*. Observations. 33
— (233) *Astérope*. Observations . 121
— (240) *Vanadis*. Observations.. 24 et 144
— (241) *Germania*. Observations. 33
— (247) *Eucrate*. Observations.. 232 et 248
— (248) *Lamée*. Observations ... 24
— 250 *Bettine*. Observations... 227
— (258) *Tyché*. Observations ... 317
— (273) *Atropos*. Observations.. 464
— (288) *Glauke*. Observations... 33
— (306) *Unitas*. Observations ... 34, 233 et 316
— (308) *Polyxo*. Observations... 121
— (313) *Chaldæa*. Observations. 34 et 419
— (338) *Boudrosa*. Éléments et éphéméride pour 1899..... 414

Pages.

Planètes (Petites) :

— (349) *Dembowska*. Observations..... 34
— (354) *Éléonora*. Observations 34, 317 et 423
— (377) Observations..... 464
— (379) AQ. Observations..... 24, 144, 227 et 464
— (385) *Ilmatar*. Observations.. 247
— » Éphéméride..... 437
— (386) AY. Observations..... 247
— (389) BB. Observations..... 423
— » Éléments..... 437
— (399) Observations.... 34
— (403) Observations.... 464
— (404) Observations.... 35
— (409) CE. Observations. 35 et 419
— (416) *Vaticana* = CS. Observations..... 73, 145, 227 et 231
— » Éléments et éphéméride..... 266 et 311
— (425) DC. Observations..... 182
— » DD. Observations..... 183
— » DE. Observations..... 183
— (424) DF. Découverte..... 387
— » Observations..... 183
— » Éphéméride..... 395
— » DG.
Voir (188) *Ménippée*.
— (426) DH. Découverte..... 387
— » Observations..... 145 et 464
— » Éléments et éphéméride pour 1898..... 249
— (427) DJ. Observations..... 465
— » DK. Découverte..... 433
— » Éléments et éphéméride..... 433
— (428) *Monachia*..... 400
— (429) DL. Découverte..... 433

Digitized by Google

Pages.

Planètes (Petites) :

— » Observations..... 231 et 465

— (430) DM. Découverte..... 437

— » Observations..... 232 et 465

— (431) DN. Découverte..... 437

— » Observations..... 465

— (432) DO. Découverte 437

— » Observations 465

— » DP. Observations..... 465, 468 et 469

— (433) DQ. Observations 420

Pléiades :

— Leur occultation par la Lune.. 202, 264, 275, 387 et 397

Pôle. Voir *Variations de la latitude.*

Polynomes Hansen-Tisserand :

— Nouvelle détermination de ces polynomes et applications... 74

Précession :

— Détermination de sa constante. 262, 441 et 444

— Quantités auxiliaires pour le calcul de la précession d'après Struve..... 434

Pression :

— Influence de la pression et du champ magnétique sur une source lumineuse et sur les longueurs d'onde des radiations qu'elle émet 253

— Effect of pressure on the wave lengths of lines in the arc spectra of certain elements.. 253

— The effect of pressure on wave length 253

— A further study of the effect of pressure on wave length ... 253

— Changes in the wave lengths of the lines of emission spectra of elements, their dependence upon the elements themselves and upon the physical conditions under which they are produced 253

— On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance..... 253

— Radiation in a magnetic field . 253

— Doublets and triplets in the spectrum produced by external magnetic forces..... 253

— Sur l'observation et l'interprétation cinématique du phénomène découvert par le Dr Zeeman..... 253

— Sur une interprétation applicable au phénomène de Faraday et au phénomène de Zeeman 253

— Quelques résultats nouveaux relatifs au phénomène de Zeeman 253

— Doublets and triplets in a magnetic field..... 254

— Contribution à l'étude du phénomène de Zeeman..... 254

Prix :

— Médaille de la Société royale astronomique..... 189

Problème :

— Mémoire sur les intégrales premières du problème des *n* corps 81

— Intégration des équations différentielles du mouvement dans le problème des deux corps. 479

— Sur le problème des trois corps 377

— Sur le cas des problèmes de trois corps (et de *n* corps) où deux des corps se choquent au bout d'un temps fini..... 400

Voir *Mécanique céleste.*

Quadratures mécaniques 194

Radiants. Voir *Étoiles filantes, Météores. Bolides.*

Digitized by Google

Pages.

Radiation :

— Influence de la pression et du champ magnétique sur une source lumineuse et sur les longueurs d'onde des radiations qu'elle émet 253
— Photographie des radiations électriques du Soleil et l'atmosphère de cet astre 194
— Enregistrement de l'intensité calorifique de la radiation solaire..... 396
— Appareil permettant de séparer les radiations simples très voisines..... 400
Voir *Spectroscopie.*

Rayons cathodiques :

— Actions mutuelles des électrodes et des rayons cathodiques dans les gaz raréfiés. Propriété nouvelle des rayons cathodiques..... 194

Rechen-Institut de Berlin :

— Publications ..... 208 (bibl.)

Réflecteur :

— Comparaison du réflecteur et de l'objectif à portraits..... 150
— Sur un défaut capital des réflecteurs paraboliques..... 394

Réfraction :

— L'inégalité causée par la réfraction dans le mouvement diurne et sur une manière d'en tenir compte dans la Photographie céleste..... 151
— Sur les réfractions photographiques..... 472
— Sur la réfraction différentielle quand on tient compte des termes d'ordre supérieur.... 152

Rendiconti :

— Publiés par la Société de Bologne ..... 240 (bibl.)

Satellites. Voir *Lune, Planètes (grosses).*

Saturne. Voir *Planètes (grosses).*

Pages.

Scintillation :

— Cause de la scintillation des étoiles 393

Sélénographie. Voir *Lune.*

Séries :

— Façon de grouper les termes des séries trigonométriques qu'on rencontre en Mécanique céleste..... **289**
— Convergence des séries du mouvement elliptique..... 477

Service géographique de l'armée :

— Travaux exécutés par le Service géographique du corps expéditionnaire de Madagascar, pendant la campagne de 1895. 194
Voir *Géodésie.*

Sidéral (Système) :

— Le système sidéral en 1896.... 155

Sirius :

— Changements de couleur observés..... 240 (bibl.)

Smithsonian institution :

— Rapport annuel..... 240 (bibl.)

Sociétés savantes :

— Académie royale de Bruxelles. 240 (bibl.)
— Royal Society of Canada. 208 (bibl.)
— Academy of Sciences of New-York..... 240 (bibl.)
— Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg..... 240 (bibl.)
— Académie des Sciences de Bologne ..... 240 (bibl.)
— Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen. 240 (bibl.)
— Oesterreichische Gradmessung-Commission..... 240 (bibl.)
— Avis communiqué par la Société royale de Göttingen ... **291**

Solaire (Système) :

— Sa translation et les distances des étoiles..... 477

Digitized by Google

Pages.

Soleil :

— Détermination de la correction de l'époque d'un catalogue d'étoiles horaires fondamentales, en tenant compte des équations personnelles; application à la détermination des erreurs tabulaires du Soleil et de la Lune..... 157
— Comparaison des longitudes du Soleil déduites des Tables de Le Verrier et Newcomb..... 150
— Photographie des radiations électriques du Soleil et l'atmosphère de cet astre..... 194
— L'action du Soleil et de la Lune sur l'atmosphère, et les anomalies de la pression..... 195
— Les derniers orages en France, en juillet et août 1897, et la période solaire..... 271
— Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. 365
— Enregistrement de l'intensité calorifique de la radiation solaire..... 396
— Influence de l'altitude et de la chaleur sur la décomposition de l'acide oxalique par la lumière solaire..... 398

Taches :

— Coordonnées héliographiques des taches du Soleil et des facules, d'après les dessins de Stonyhurst..... 152
— Observations..... 478
— Dénombrement..... 202
— Sur les théories des taches solaires..... 202 et 427
— Le noyau d'une tache solaire le 7 février 1897..... 156
Voir *Actinométrie. Éclipses.*

Spectre :

— Le spectre du carbone..... 269
Voir *Spectroscopie.*

Spectroscopie :

— Effect of pressure on the wave lengths of lines in the arc spectra certain elements.... 253
— The effect of pressure on wave length..... 253
— A further study of the effect of pressure on wave length.... 253
— Changes in the wawe lengths of the lines of emission spectra of elements, their dependence upon the elements themselves and upon the physical conditions under which they are produced.... 253
— On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance..... 253
— Radiation in a magnetic field. 253
— Doublets and triplets in the spectrum produced by external magnetic forces..... 253
— Sur l'observation et l'interprétation cinématique du phénomène découvert par le Dr Zeeman..... 253
— Sur une interprétation applicable au phénomène de Faraday et au phénomène de Zeeman..... 253
— Quelques résultats nouveaux relatifs au phénomène de Zeeman..... 253
— Doublets and triplets in a magnetic field..... 254
— Contribution à l'étude du phénomène de Zeeman..... 254
— Appareil permettant de séparer les radiations simples très voisines..... 400
— Spectre d'un bolide..... 432

Spectroscopie stellaire :

— Le spectre de β Lyre..... 159
— Photographies de spectres stellaires..... 150
— Spectres des composantes colorées des étoiles doubles... 272
— Effets de la distance sur les spectres des amas d'étoiles.. 150
— Sur quelques déterminations

Digitized by Google

Pages.

Spectroscopie :

spectroscopiques de vitesses radiales..... 198
— Spectres de brillantes étoiles australes..... 208 (bibl.).
— Cause de l'apparition de rayons et de franges autour des images stellaires..... 265
Voir *Vitesses radiales, Étoiles à spectres remarquables.*

Statistique :

— Annuaire statistique de la Ville de Paris..... 208 (bibl.).

Tables :

— Tables pour le calcul des perturbations de Jupiter sur les petites planètes..... 74
— Comparaison des longitudes du Soleil déduites des Tables de Le Verrier et Newcomb..... 150
— Tables auxiliaires pour le calcul de la parallaxe lunaire, destinées à faciliter le calcul des occultations..... 260
— Additions aux Tables de réduction des divers catalogues d'étoiles..... 434

Télescopes :

— Établissement des formules fondamentales pour les télescopes de Cassegrain et de Grégory..... 473
Voir *Lunettes, Réflecteurs.*

Température :

— Causes d'erreur dans la recherche des vitesses radiales des astres. Importance de l'erreur due aux variations de température. Méthodes de correction..... **49**
— Variations de la température à la surface de sols de différentes natures..... 196
— Dilatations des aciers au nickel aux températures élevées... 270

Pages.

Temps de pose :

— Conditions qui déterminent sa limite en Photographie céleste..... 266

Terre :

— Perturbations séculaires de Mercure par la Terre et Mars. 474
Voir *Pesanteur.*

Thallium :

— Quelques nouvelles lignes spectrales de l'oxygène et du thallium..... 275

Théorèmes :

— Démonstrations élémentaires de quelques théorèmes connus..... 201

Topographie. Voir *Géodésie.*

Translation :

— La translation du système solaire et les distances des étoiles..... 477

Trépidations du sol :

— Sur leur amortissement. Application au bain de mercure à couche épaisse..... **172**

Trigonométrie sphérique :

— Traité par E. Hammer. 240 (bibl.)

Trois corps (Problème des) :

Voir *Problème, Mécanique céleste.*

Univers :

— Das Weltgebaüde..... 288

Uranus. Voir *Planètes* (*grosses*).

Vent :

— Variation diurne de sa direction..... 196

Verticale :

— Précision comparée de divers modes de repérage de la verticale dans les observations

Digitized by Google

Pages.

Verticale :

astronomiques, géodésiques ou topographiques..... 195
— Méthode nouvelle pour déterminer directement l'horizon vrai..... 200
— Nouvelle méthode pour déterminer la verticale..... 399
Voir *Variations de la latitude.*

Pages.

Vitesses des étoiles..... 191
Vitesses radiales.
— Sur quelques déterminations spectroscopiques de vitesses radiales..... 198
— Causes d'erreur dans la recherche des vitesses radiales des astres. Importance de l'erreur due aux variations de température. Méthodes de correction..... 49

Digitized by Google

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS.

MM.

A

Abbe. 429.
Abetti. 204, 430.
Adams (J.-C.). 156.
Agelet. 475.
Ambronn. 429, 432.
Anderson (Th.-D.). 260, 269, 433.
Anding (E.). 201.
Andoyer (H.). 275.
Angot (A.). 196.
Auwers. 207, 267, 434, 435.

B

Backhouse (T.-W.). 151.
Backlund (O.). 275, 427. — Deuxième méthode pour la détermination des termes à longue période dans l'expression de la longitude des petites planètes du type d'Hécube, **5**.
Baillaud (B.). 194.
Ball (L. de). 425, 431.
Balmer. 152.
Bamberg. 431.
Barnard (E.-E.). 150, 391, 392, 436, 473, 477.
Battermann (H.). 206, 207, 260, 264, 395, 428.
Bauschinger (J.). 390, 392 et 430.
Becker. 431.
Becquerel (H.). 253.
Benko (I. de). 264, 390, 433.
Berberich (A.). 202, 433.
Bidschof (F.). 390.
Bigourdan (G.). 151, 275.
Blajko (S.). 391.
Boccardi (J.). Éléments et éphéméride de (416) Vaticana pour la troisième opposition, **311**.
Bohlin (K.). 276, 388.
Borrelly (A.). Observations de petites planètes. **231**, **420**, **469**.
Boss (L.). 437, 477.
Bourgeois (R.). 194.
Brendel (M.). 275.
Brenner (L.). 205, 387, 432.
Brillouin (M.). 270.
Brown (E.-W.). 154.
Bruns (H.). 205.
Burnham (S.-W.). 156, 160.

C

Callandreau (O.). 196, 275, 276, 277.
Campbell (G.). 152.
Celoria. 430.
Chandler (S.-C.). 471, 474, 475, 476, 478.
Charlier (C.-V.-L.). 277.
Charlois. 387, 433, 437. — Observations de petites planètes, **182**, **464**.
Charpy (G.). 196.
Chofardet. 389. — Observations de comètes et de petites planètes, **226**, **321**.
Christie (W.-H.-M.). 152, 197.
Clark (A.-G.). Notice nécrologique, 261.
Coggia. Observations de petites planètes et de comètes, **144**, **422**.
Collet (J.). 196.
Collins (V.-H.). 475.
Common (A.-A.). 152.
Comstock (G.-C.). 474.
Coniel (Ch.). 417.
Coniel (J.). 395. — Éléments de petites planètes, **144**, **422**.

Digitized by Google

MM.
CONTARINO (F.). 260.
CORNU (A.). 253.
CORTIE. 152.
COURTY. 197.
CROVA (A.). 396, 398.
CRULS. 272, 275. — Observations des Léonides, **181**.
CURIE (Mme S.). 400.

D

DECHEVRENS (le P. M.). 196.
DEICHMULLER. 200, 201, 388, 428, 432.
DENNING (W.-F.). 153, 154, 189, 434.
DESLANDRES (H.). 194, 253. — Causes d'erreur dans la recherche des vitesses radiales des astres. Importance de l'erreur due aux variations de température. Méthodes de correction, **49**.
DOBERCK (W.). 388, 435.
DONNER (A.). 427.
DOOLITTLE (E.). 474, 476.
DOUGLAS (A.-E.). 203.
DOWNING (A.-M.-W.). 150, 156, 200.
DREYER (J.-L.-E.). 150, 387, 427.
DUBARRÉ (M.-I.). 192.
DUBIAGO. 435.
DUNÉR (N.-C.). 437, 474.
DUPORT (H.). Sur le problème des trois corps, **377**.
DYSON (F.-W.). 399.
DZIOBEK. 389.

E

EBELL. 428.
EBERT (W.). 399.
EGINITIS (D.). 269, 400.
ENGELHARDT (Baron D'). 390, 428.
ESMIOL (E.). Observations de petites planètes, **22**, **423**.
EVDOKIMOW. 392.

F

FABRY (L.). Observations de petites planètes, **468**.
FAUQUEZ (A.). 431.
FAUTH (Ph.). 264.
FAYE (H.). 194, 195.
FAYET (G.) Observations de petites planètes, **120**.
FECHNER (G.-T.). 384.

MM.
FENYI. 429.
FÉRAUD (A.). 122. — Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas des excentricités nulles, **369**.
FLEMING (Mme M.). 202.
FLINT (A.-S.). 477.
FONTSÉRÉ (E.). 205.
FRANZ (J.). 386, 430, 434.
FRIC (J.). 436.

G

GAILLOT (A.). 475.
GALE (W.-E.). 204.
GARRIGOU-LAGRANGE (P.). 195.
GAUSS. 429.
GEELMUYDEN. 392, 393.
GILL (D.). 159, 203, 265, 268, 433.
GINZEL. 427.
GLEDHILL (J.). 200.
GOLDSTEIN. 428.
GONNESSIAT (F.). 195. Sur les déterminations de latitude effectuées par M. Périgaud au cercle Gambey de l'Observatoire de Paris, **161**.
GOULD (B.-A.). Notice nécrologique, 477.
GRAMONT (A. DE). 269.
GRAVES (R.-P.). 427.
GROSSMANN (E.). 265, 429.
GRUEY (L.-J.). 389.
GUILLAUME (J.). 204, 272, 275.
GYLDÉN (H.). 275, 427.

H

HAGEN (J.-C.). 431.
HALL (A.). 191, 474, 477.
HALL (M.). 155.
HALM. 431.
HAMMER (E.). 240.
HAMY (M.). 194, 396, 397, 398. Sur la formule de réduction des observations de passage, **113**. — Sur l'amortissement des trépidations du sol. Application au bain de mercure à couche épaisse, **172**.
HANSKY. 396.
HARTWIG (E.). 208, 264, 427.
HARZER (P.). 275, 432.
HEDRICK (J.-T.). 475.

Digitized by Google

MM.
HEEN (P. DE). 194.
HELMERT. 206.
HILL (G.-W.). 276, 277, 473, 479.
HILLEBRAND (C.). 388.
HILLS (Cap. E.-H.). 152, 160.
HINKS (A.-R.). 158.
HISGEN (J.). 203, 391.
HÖFFLER (F.). 394.
HUGGINS (W.). 272, 273.
HUMPHREYS. 253.
HUSSEY (W.-J.). 392, 476.

I

INNES (R.-T.-A.). 153, 157, 160, 265, 436.
IVANOV (A.). 208, 395. Sur les équations de Poisson, **411**.

J

JACOBY (H.). 427, 472, 476.
JANSSEN (J.). 398.
JAUBERT (J.). 196, 197.
JAVELLE. 472.
JESSE. 428.

K

KANN (L.). 430.
KAPTEYN (J.-C.). 435.
KEMPF. 431.
KLEIBER. 434.
KNOBEL (E.-B.). 156.
KNOPF (O.). 427, 429.
KNORRE. 428.
KOBOLD. 202, 261, 262, 390, 431.
KORNUCH-TROZKI. Notice nécrologique. 435.
KREUTZ (H.). 392, 426, 430, 434.
KRÜGER (A.). 427.
KÜFFNER (DE). 431.
KÜSTNER (F.). 203, 240, 428, 432.

L

LAGARDE (I.). Orbite de la comète Tempel 1871 IV, **129**.
LAGRULA. 275, 397.
LAISANT (C.). 240.
LALLEMAND (Ch.). 195.
LAMP (E.). 430.
LANE POOR (C.). 472.
LAVES (KURT). 472, 479.

MM.
LEAN (F. Mc). 150.
LEAVENWORTH (F.-P.). 475, 477.
LEBEUF (A.). 74, 277.
LE CADET. 194, 272, 275.
LEHMAN (P.). 426.
LEVEAU (G.). 261, 275.
LE VERRIER. 150.
LEWITZKY. 202.
LIEGEL (T.-O.). Notice nécrologique. 390.
LINDEMANN (A.-F.). 159.
LOCKYER (N.). 152, 204.
LŒWY (M.). 196, 396, 399. Études photographiques sur quelques parties de la surface de la Lune, **401**.
LOHSE (O.). 430.
LORENTZEN. 427.
LOWELL (P.). 152, 153.
LOVETT (E.-O.). 204, 473.
LUBRANO. Observations de petites planètes, **119**.
LUDENDORFF. 275.
LUMIÈRE (A. et L.). 197.
LUTHER (R.). 388, 429.
LYNN (W.-T.). 474.

M

MAILHAT (R.). 397.
MAITRE. Observations de petites planètes, **119**.
MARCHIS (L.). 273.
MARCUSE (A.). 428.
MARTH (A.). 157. Notice nécrologique, 387.
MASCART (J.). 235, 276, 397. Observations de petites planètes, **419**. Sur la probabilité d'une coïncidence entre les éléments de deux planètes, **319**.
MELLOR (T.-K.). 156.
MERFIELD. 266.
MEYER (W.). 288.
MICHELSON (A.). 253.
MILLOSEVICH (E.). 264, 266, 433.
MOHLER (J.-F.). 253.
MÖLLER (J.). 395.
MÖNNICHMEYER. 151, 428.
MOUCHEZ (E.). 208.
MÜLLER (G.). 42, 431, 432.
MYSZ. 432.

Digitized by Google

MM.

N

NAEGAMVALA (K.-D.) 198.
NEWALL (H.-F.). 198.
NEWCOMB (S.). 150, 471, 473, 477. — Sur les formules de nutation basées sur les décisions de la Conférence de 1896, **241**.
NIESSL (G. VON). 153.
NOBILE (A.). Notice nécrologique, 260.
NOVELLAS (F.). 205.
NYLAND (A.-A.). 203, 204, 208, 269, 387, 389, 391.
NYREN. 208.

O

OLSSON (K.-G.). 276.
OPPOLZER (E.). 427.

P

PAETSCH. 428.
PAINLEVÉ (P.). 400. Mémoire sur les intégrales premières du problème des *n* corps. **82**.
PANNEKOEK (A.). 394.
PENROSE (F.-C.). 153.
PERCHOT (J.). 399.
PERRINE. 392, 476.
PETERS (C.-W.-F). Notice nécrologique, 426.
PETIT. 389. Observations de planètes et de comètes, **226**.
PEYRA (D.). 430, 437.
PICART (L.). Sur l'équation de Gylden-Lindstedt généralisée, **209**.
PICKERING (E.-C.). 202, 208, 387, 388, 432.
PINI. 430.
POINCARÉ (H.). 276. — Sur le développement de la fonction perturbatrice, **70** et **449**. — Sur la façon de grouper les termes des séries trigonométriques que l'on rencontre en Mécanique céleste, **289**.
POMERANTSEF. 269.
PORRO. 430.
PORTER (J.-G.). 391.
POURTEAU. Éléments de (426) et éphéméride pour 1898, **249**.

MM.

PRIM. Occultations d'étoiles par la Lune, **184**.
PUISEUX (P.). 196. Études photographiques sur quelques parties de la surface de la Lune, **401**.

Q

QUIMBY (A.-M.). 478.

R

RADAU (R.). 277.
RAHTS. 430.
RAJNA. 430.
RAMBAUT (A.). 151, 199.
RAMBAUD (C.). 197, 264, 275, 400. Observations de petites planètes, **72**, **247**, **317**.
RAYET (G.). 197.
RICCO. 194, 202.
RIEM (J.). 434.
RIPERT (L.). 240.
RISTENPART. 269, 387, 429.
ROBERTS (A.-W.). 158, 159, 474, 475.
ROBERTS (I.). 205.
ROSSARD (F.). 197, 275. — Observations de planètes et de comètes, **27**.
ROUGET (Ch.). 400.
ROZÉ (C.). Sur un phénomène instantané, **479**.
RUSSELL (H.-C.). 202.
RYDZEWSKI. Sur quelques applications de l'hodographe de Hamilton, **9**.

S

SAFARIK. 431.
SAFFORD (Th.). 159.
SAWYER (E.-F.). 477.
SCHÆBERLE (J.-M.). 394, 473, 477.
SCHEIBNER (W.). 276.
SCHEINER (J.). 42, 427, 431.
SCHERING (E.). 429. — Notice nécrologique, 395.
SCHIAPARELLI (G.). 240, 430.
SCHILLING. 427.
SCHMIDT (A.). 427.
SCHORR. 202, 432.
SCHREIBER. 429.
SCHULHOF (L.). Les comètes périodiques.

Digitized by Google

MM.
État actuel de leurs théories, **323**.
SCHUMACHER (A.). 430.
SCHUR (W.). 153, 205, 393, 395, 429.
SCHWARTZ (L.). Notice nécrologique, 426.
SCHWASSMANN. 261, 431.
SEARLES (Rév. G.-M.). 476.
SEE (T.-J.-J.). 156, 160, 198, 205, 264, 265, 389, 390, 392, 393, 436, 472, 476.
SEELIGER (H.). 395.
SELLORS. 202.
SELLS (P.). 153.
SERAPHIMOFF. 266.
SIDGREAVES (W.). 159.
SIMONIN. 197, 276. — Lettre, **366**.
SPŒRER (F.-W.-G.). 430.
STEINBRINK (G.). 205.
STÉPHAN. Observations de comètes, **467**.
STICHTENOTH. 429.
STOCKWELL (J.-N.). 474.
STONE (E.-J.). 150, 156, 157. — Notices nécrologiques, 160, 204.
STONE (O.). 473, 474, 475.
STRATONOFF (W.). 201, 268.
STRUVE (H.). 430.
STUMPE. 477.
STUYVAERT. 202.
SWASEY. 198.
SWIFT (Lewis). 200, 477.
SY (F.). 197, 264, 275, 400. — Observations de petites planètes, **72**, **247**, **317**.

T

TACCHINI (P.). 271.
TEBBUTT (J.). 198, 202.
TEISSERENC DE BORT. 197.
MM.
TETENS. 428.
TEYLER. 240.
THOME (J.-M.). 266, 268, 388, 392, 472.
TIETJEN (F.). Notice nécrologique, 426.
TISSERAND (F.). 276.
TUCKER (R.-H.). 395, 475, 478.
TURNER (H.-H.). 152, 155, 157, 200.

V

VALENTINER. 429.
VALLOT (Mme G.). 398.
VENUKOFF (M.). 195, 196, 269.
VILLIGER. 266, 433.
VOGEL (H.-C.). 430.

W

WADSWORTH (O.). 199, 266.
WANACH. 431.
WASSILIEF (A.). 202.
WEILER (A.). 392.
WEINEK (L.). 205.
WELLMANN (V.). 203, 268.
WILCZYNSKI. 365.
WILLIAMS (Stanley). 268, 390.
WINNECKE. Notice nécrologique, 435.
WISLICENUS (W.-F.). 427, 431.
WITT (G.). 437.
WOLF (C.). 269.
WOLFER. 431.
WONASZEK (A.). 435.

Y

YOUNG (Mrs. W.-H.). 155.

Z

ZEEMAN (P.). 253.
ZENGER (Ch.-V.). 271.

ERRATA.

Tome XV, pages 315 et 316, têtes de la première colonne, *au lieu de :* 24h, t. m. de Berlin, *lisez :* 12h, t. m. de Berlin.

FIN DU TOME XV.

2301 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

3 2044 060 016 219

Digitized by Google

32044060016219

Digitized by Google